ANALITIKUS MÉRTANBÓL KITŰZÖTT ÁLLAMVIZSGA TÉTELEK KIDOLGOZÁSA

- INFORMATIKAI MATEMATIKA SZAK -

Tartalomjegyzék

1. Analitikus mértan síkban

1.1. Síkbeli egyenesek egyenletei Descartes-féle koordináta rendszerhez viszonyítva

Legyen $R = \{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ egy affin koordináta-rendszer a síkban.

1.1.1. Egy pont és egy vektor által meghatározott egyenes egyenlete

Legyen $A(x_0, y_0)$ egy rögzített pont a síkban és $\vec{d}(p, q)$ pedig egy rögzített vektor.

Ekkor levezethetjük az A ponton áthaladó $\vec{d}$ irányvektorú e egyenes vektoriális egyenletét teljesen hasonlóan, mint a térbeli egyenes esetén és itt is kapjuk az egyenes egyenletének, hogy

$$\boxed{e: \quad \vec{r}_M = \vec{r}_A + \lambda \cdot \vec{d}, \quad \lambda \in \mathbb{R},} \tag{1}$$

ahol $M(x, y)$ egy tetszőleges pont az e egyenesen.

Behelyettesítve az $\vec{r}_M, \vec{r}_A, \vec{d}$ vektorok koordinátáit, kapjuk az e (síkbeli) **egyenes paraméteres egyenleteit**:

$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + \lambda p \\ y = y_0 + \lambda q \quad \lambda \in \mathbb{R}. \end{cases}} \tag{2}$$

Kifejezzük a fenti egyenletrendszer mindkét egyenletéből a λ-t és egyenlővé tésszük egymással. Így jutunk az e (síkbeli) **egyenes kanonikus egyenletéhez**:

$$\boxed{\frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q}} \tag{3}$$

1.1. Megjegyzés. Konvenció szerint, ha az egyik tört nevezője nulla, akkor a számláló is nulla.

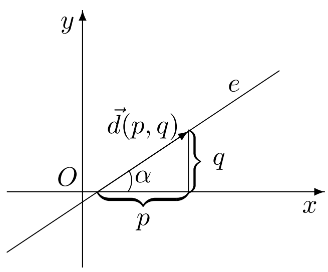
Példa. Ha az e egyenes egyenlete: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-3}{0}$, akkor ez ekvivalens azzal, hogy $e : y - 3 = 0$, vagyis az e párhuzamos az Ox tengellyel.

Ha az e egyenes nem párhuzamos az Oy tengellyel (vagyis $p \neq 0$), akkor az e bármely irányvektora esetén a $\dfrac{q}{p} = m$ arány állandó. Ezt az arányt az e **egyenes iránytényezőjének** nevezzük.

Ha az $\mathcal{R}$ Descartes-féle koordináta-rendszer (vagyis derékszögű), akkor

$$\boxed{m = \operatorname{tg} \alpha,} \tag{4}$$

ahol α az e egyenesnek az Ox tengellyel bezárt szöge.



1. ábra.

Ha a (3) összefüggést beszorozzuk q-val, kapjuk, hogy

$$y - y_0 = \frac{q}{p}(x - x_0). \tag{5}$$

Tehát, az adott $A(x_0, y_0)$ ponton áthaldó és adott m iránytényezőjű egyenes egyenlete

$$\boxed{y - y_0 = m(x - x_0).} \tag{6}$$

1.1.2. Két különböző pont által meghatározott egyenes egyenlete

Legyen $M_1(x_1, y_1)$ és $M_2(x_2, y_2)$ két rögzített pont a síkban. Ekkor az M_1 és M_2 pontokon áthaladó egyenes irányvektora $\overrightarrow{M_1M_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$, tehát az M_1M_2 egyenes kanonikus egyenlete:

$$\boxed{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1},} \tag{7}$$

amelyet még átírhatunk a következő könnyebben megjegyezhető alakba:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{8}$$

1.1.3. Egyenes tengelymetszetes alakja

Ha az egyenes a koordináta-tengelyeket az $A(a, 0)$ és $B(0, b)$ pontokban metszi, akkor egyenlete:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

1.2. Megjegyzés. Az M_1M_2 nem függőleges egyenes iránytényezője:

$$m_{M_1M_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

1.2. Két síkbeli egyenes szöge

I. módszer. Legyen

$$d_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0,$$

$$d_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

két *általános* egyenlettel megadott egyenes az xOy síkban. Ezt az két egyenletet átírva kanonikus alakra: $d_1 : \dfrac{x}{-b_1} = \dfrac{y + \frac{c_1}{b_1}}{a_1}$, $d_2 : \dfrac{x}{-b_2} = \dfrac{y + \frac{c_2}{b_2}}{a_2}$ kapjuk a két egyenes irányvektorát: $\vec{d_1}(-b_1, a_1)$ illetve $\vec{d_2}(-b_2, a_2)$. Felhasználva a (**??**) összefüggést, kapjuk, hogy

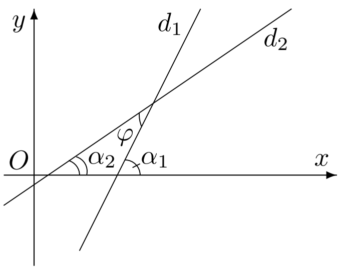
$$\boxed{\cos(\widehat{d_1, d_2}) = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}} \tag{9}$$

II. módszer. Legyen

$$d_1 : y = m_1x + n_1,$$

$$d_2 : y = m_2x + n_2$$

két *explicit* egyenlettel megadott egyenes az xOy síkban. Ekkor $m_1 = \mathrm{tg}\alpha_1$ és $m_2 = \mathrm{tg}\alpha_2$, ahol α_1 és α_2 a két egyenesnek az Ox tengellyel bezárt hajlásszögét jelölik (lásd 2 ábra).



2. ábra. Két egyenes szöge

Belátható, hogy ha φ-vel jelöljük a d_1 és d_2 egyenesek szögét, akkor $\varphi = \alpha_1 - \alpha_2$. Tehát

$$\mathrm{tg}\varphi = \mathrm{tg}(\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{\mathrm{tg}\alpha_1 - \mathrm{tg}\alpha_2}{1 + \mathrm{tg}\alpha_1 \cdot \mathrm{tg}\alpha_2} = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2}. \tag{10}$$

Ha felcseréljük az m_1 és m_2 sorrendjét, akkor a kiegészítő szög mértékét fogjuk megkapni. Mivel két egyenes szögén mindig a hegyesszöget értjük és tudjuk, hogy ennek tangense pozitív, a két síkbeli egyenes szögére levezetett összefüggést a következő alakban használjuk:

$$\boxed{\operatorname{tg}(\widehat{d_1, d_2}) = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2} \right|.} \tag{11}$$

1.3. Párhuzamos és merőleges egyenesek

1.3.1. Párhuzamos egyenesek

Két párhuzamos egyenes iránya megegyezik és ezáltal iránytényezőjük is egyenlő, vagyis:

$$\boxed{d_1 || d_2 \Leftrightarrow m_1 = m_2.} \tag{12}$$

1.3. Megjegyzés. *A fenti összefüggés onnan is következik, hogy Két egyenes akkor és csakis akkor párhuzamos, ha bezárt szögük 0, ami ekvivalens azzal a (11) összefüggés alapján, hogy iránytényezőik megegyeznek.*

1.3.2. Merőleges egyenesek

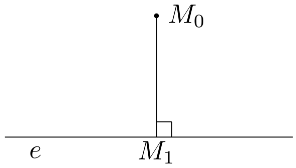
1.4. Megjegyzés. Legyen d_1, d_2 két egymásra merőleges egyenes. Ekkor irányvektoraik $\vec{d_1}(p_1, q_1)$ és $\vec{d_2}(p_2, q_2)$ szintén merőlegesek egymásra, ezért skaláris szorzatuk nulla. Tehát $p_1p_2 + q_1q_2 = 0$. Feltételezve, hogy egyik egyenes sem párhuzamos az Oy tengellyel, végigoszthajtuk ezt az egyenletet p_1p_2-vel és felhasználva az iránytényező értelmezését, kapjuk, hogy

$$\boxed{d_1 \perp d_2 \Longleftrightarrow m_1 \cdot m_2 = -1.} \tag{13}$$

1.5. Megjegyzés. 1. A (13) összefüggés másként is levezethető. Ay (11) összefüggés jobboldalának nincs értelme abban az esetben, ha $m_1 \cdot m_2 = -1$. Ez azt jelenti, hogy értelmetlen a $\operatorname{tg}(\widehat{d_1, d_2})$, vagyis a d_1 és d_2 egyenesek szöge $90°$.

1.4. Pont távolsága egyenestől (síkban)

Legyen $e : ax + by + c = 0$ egy egyenes az xOy síkban és $M_0(x_0, y_0)$ egy pont a síkban. Az M_0 **pont távolságán az** e **egyenestől** az $[M_0M_1]$ szakasz hosszát értjük, ahol M_1 az M_0 pont e egyenesre eső vetülete.



3. ábra. Az M_0 pont távolsága az e egyenestől: $|M_0M_1|$.

Felírjuk az M_0 ponton áthaladó és az e egyenesre merőleges M_0M_1 egyenes egyenletét:

$$M_0M_1 : y - y_0 = \frac{-1}{m_e}(x - x_0),$$

ahol $m_e = -\dfrac{a}{b}$ az e egyenes iránytényezője. Az M_1 pont (x_1, y_1) koordinátáit megkapjuk az e és M_0M_1 egyenesek egyenleteiből alkotott

$$\begin{cases} b(x - x_0) = a(y - y_0) \\ ax + by + cz = 0 \end{cases}$$

egyenletrendszer megoldásaként:

$$\begin{cases} x_1 = x_0 - a\dfrac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2} \\ y_1 = y_0 - b\dfrac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2}. \end{cases}$$

Kiszámítva a $[M_0M_1]$ szakasz hosszát, kapjuk, az M_0 pont távolságát az e egyenestől:

$$\boxed{d(M_0, e) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.} \tag{14}$$

Alkalmazás. Szögfelezők egyenletei (síkban).

Legyen $d_1 : a_1x + b_1y + c_1z = 0$, $d_2 : a_2x + b_2y + c_2z = 0$ két metsző egyenes a síkban. Célunk meghatározni a két egyenes által alkotott szög (belső és külső) szögfelezőinek egyenleteit.

Tudjuk, hogy a szögfelező azon pontok mértani helye, amelyeknek távolsága a szög két szárától megegyezik. Legyen $M(x, y)$ egy tetszőleges pont a síkban. Ez a pont akkor és csakis akkor lesz a d_1 és d_2 egyenesek szögfelezőjén, ha $d(M, d_1) = d(M, d_2)$, vagyis

$$\frac{|a_1x + b_1y + c_1|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \frac{|a_2x + b_2y + c_2|}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}.$$

Így a két szögfelező egyenlete:

$$\boxed{\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm\frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}.} \tag{15}$$

1.5. Kúpszeletek

1.5.1. Kör

Legyen M_0 egy rögzített pont a $\mathcal{P}$ síkban és legyen $r > 0$ egy rögzített szám.

1.1. Értelmezés. *Az M_0 középpontú és r sugarú $\mathcal{C}$ **kör** azon M pontok mértani helye a síkból, amelyeknek az M_0 ponttól vett távolsága állandó és egyenlő r-rel, vagyis*

$$\mathcal{C}(M_0, r) = \{M \in \mathcal{P} : |MM_0| = r.\} \tag{16}$$

Legyen xOy egy Descartes-féle koordináta-rendszer.

1.1. Tétel. *Az $M(x, y)$ pont akkor és csakis akkor van az $M_0(x_0, y_0)$ középpontú, r sugarú körön, ha*

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2. \tag{17}$$

Bizonyítás. Az M pont akkor és csakis akkor van az M_0 középpontú r sugarú körön, ha $|MM_0| = r$, vagyis

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = r \quad \Leftrightarrow \quad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

□

Tehát az $M_0(x_0, y_0)$ középpontú, r sugarú **kör implicit egyenlete**:

$$\boxed{\mathcal{C} : \ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.}$$

1.2. Tétel. *Az $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ egyenletű kör $M_1(x_1, y_1)$ pontjában szerkesztett **érintő egyenlete**:*

$$\boxed{(x - x_0)(x_1 - x_0) + (y - y_0)(y_1 - y_0) = r^2,} \tag{18}$$

*amelyet még a kör **duplázott egyenleté**nek is nevezünk az $M_1(x_1, y_1)$ pontban.*

Bizonyítás. Tudjuk, hogy a kör M_1 pontjába szerkesztett érintő merőleges az M_1 ponton áthaladó átmérőre. Felírjuk először az átmérő egyenletét:

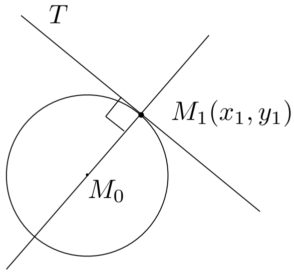
$$M_1M_0 : \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_0 - y_1}$$

majd az erre merőleges (érintő) egyenletét, felhasználva, hogy

$$m_{\text{érintő}} = -\frac{1}{m_{M_1M_0}} = -\frac{x_0 - x_1}{y_0 - y_1}.$$

Tehát az érintő egyenlete:

$$y - y_1 = -\frac{x_0 - x_1}{y_0 - y_1} \cdot (x - x_1). \Leftrightarrow$$



4. ábra. Kör érintője és normálisa.

$$(-x_0 + x_1)(x - x_1) - (y_0 - y_1)(y - y_1) = 0 \tag{19}$$

Mivel az M_1 pont rajta van a $\mathcal{C}$ körön, kielégíti annak egyenletét:

$$(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 = r^2. \tag{20}$$

Összeadva a (19) és (20) egyenleteket kapjuk, hogy

$$(y - y_0)(y_1 - y_0) + (x - x_0)(x_1 - x_0) = r^2. \tag{21}$$

□

1.2. Értelmezés. *A kör M_1 pontjába szerkesztett **normálisán** azt az egyenest értjük, amely áthalad az M_1 ponton és merőleges az M_1 pontba szerkesztett körérintőre.*

Kör esetén egy M_1 pontba szerkesztett normális megegyezik az M_1 ponton áthaladó átmérővel. Tehát egyenlete:

$$M_1M_0 : \boxed{\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_0 - y_1}}$$

1.6. Megjegyzés. Kör érintőjének egyenletét meghatározhatjuk felhasználva az analízisből jólismert eredményt is: Legyen $f : I \to \mathbb{R}$ egy deriválható függvény, $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum. A függvény grafikus képéhez az $M(x_1, f(x_1) = y_1)$ pontban szerkesztett érintő egyenlete:

$$\boxed{y - y_1 = f'(x_1)(x - x_1).}$$

Kör esetén: $y = f(x) = y_0 \pm \sqrt{r^2 - (x - x_0)^2}$, ahol az előjelet pozitívnak választjuk, ha M pont a kör felső körívén található és negatívnak ellenkező esetben.

1.5.2. Ellipszis

1.3. Értelmezés. *Azon pontok mértani helyét a síkból, amelyeknek két rögzített ponttól mért távolságuk összege állandó, **ellipszis**nek nevezzük.*

Legyen $c > 0$ és F, F' két rögzített pont a síkban úgy, hogy $|FF'| = 2c$ és legyen $a > c$. A sík azon M pontjainak mértani helyét, amelyre $|MF| + |MF'| = 2a$, ellipszisnek nevezzük:

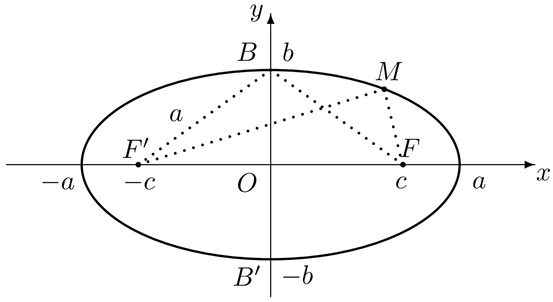
$$\mathcal{E} = \{M \in \mathcal{P} : |MF| + |MF'| = 2a\}.$$

További elnevezések:

1. F, F' : az **ellipszis fókuszai**
2. FF' egyenes: **fokális tengely**
3. $|FF'| = 2c$: **fókusztávolság**
4. $[MF']$ és $[MF]$ szakaszok: M ponthoz tartozó **vezérsugarak**.

1.7. Megjegyzés. Ha $c = 0$, akkor az ellipszis egy a sugarú kör lesz.

Legyen $\mathcal{E}$ egy adott ellipszis. Választunk egy xOy Descartes-féle koordináta-rendszert úgy, hogy az O pont legyen az $[FF']$ szakasz felezőpontja, az Ox tengely legyen a fokális tengely. Ekkor $F'(-c, 0)$ és $F(0, c)$.



5. ábra. Ellipszis.

1.3. Tétel. *Az $M(x,y)$ pont akkor és csakis akkor van az $\mathcal{E}$ ellipszisen, ha*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ \text{ahol } b^2=a^2-c^2.$$

Bizonyítás. Az M pont rajta van az $\mathcal{E}$ ellipszisen, ha $|MF|+|MF'|=2a$. Ekkor

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (x+c)^2+y^2=(x-c)^2+y^2+4a^2-2\cdot 2a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 4xc-4a^2=-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2c^2-2xca^2+a^4=a^2x^2-2a^2xc+a^2c^2+a^2y^2$$

$$x^2(a^2-c^2)+a^2y^2=a^2(a^2-c^2).$$

Bevezetjük az $a^2-c^2=b^2$ jelölést és végigosztva az előbbi egyenletet a^2b^2-tel kapjuk az **ellipszis kanonikus egyenletét:**

$$\boxed{\mathcal{E}:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.} \tag{22}$$

□

1.8. Megjegyzés. A $B(0,b=\sqrt{a^2-c^2})$ és a $B'(0,-b=-\sqrt{a^2-c^2})$ pontok rajta vannak az ellipszisen, mégpedig az ellipszis metszéspontját jelölik az Oy tengely-lyel. Valóban, a BOF és BOF' kongruens háromszögekben alkalmazva a Pithagorász tételét kapjuk, hogy $a^2+b^2=c^2$.

1.9. Megjegyzés. Ha jelöljük A, A' és B, B'-tel a (22) egyenlettel megadott ellipszis metszeteit az Ox illetve Oy tengelyekkel és $a>b$, akkor még használjuk a következő kifejezéseket:

1. az $[AA']$ szakasz az ellipszis **nagytengelye**;
2. a $[BB']$ szakasz az ellipszis **kistengelye**;
3. az $A(a,0), A'(-a,0), B(0,b), B'(-b,0)$ pontok: az ellipszis **csúcsai**.

1.10. Megjegyzés. Az ellipszis kanonikus egyenletében az x és y változók a második hatványon szerepelnek, ezért egy $M(x,y)$ ponttal együtt az ellipszisen vannak az $M_1(-x,-y)$, $M_2(-x,y)$, $M_3(x,-y)$ pontok is. Tehát az Ox és Oy tengelyek szimmetriatengelyei az ellipszisnek, az O pont pedig szimmetriaközéppontja.

1.4. Tétel. *Az $\mathcal{E}:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ egyenletű ellipszis $M_0(x_0,y_0)$ pontjába szerkesztett* **érintő egyenlete***:*

$$\boxed{\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1,}$$

amelyet még az ellipszis ***duplázott egyenleté****nek is nevezünk az M_0 pontban.*

Bizonyítás. Az ellipszis érintőjének meghatározására a 1.6 Megjegyzést használjuk fel. Az f függvény felírása érdekében az ellipszis egyenletéből kifejezzük az y-t:

$$y=\pm b\cdot\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}.$$

Tételezzük fel, hogy az M_0 pont az ellipszis "felső" ívén van, vagyis $y_0 \geq 0$ (ellenkező esetben teljesen hasonlóan járunk el). Ekkor az f függvényt is ennek megfelelően választjuk:

$$y = f(x) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Az érintő egyenlete:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow$$

$$y - y_0 = -\frac{b}{a} \cdot \frac{x_0}{\sqrt{a^2 - x_0^2}}(x - x_0). \tag{23}$$

Mivel az $M_0(x_0, y_0) \in \mathcal{E}$, következik, hogy $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$, vagyis $y_0^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x_0^2)$. Feltételeztük, hogy $y_0 \geq 0$, tehát $\sqrt{a^2 - x_0^2} = \frac{a}{b} \cdot y_0$. Visszahelyettesítve ezt a (23) összefüggésbe írhatjuk, hogy

$$y - y_0 = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_0}{y_0}(x - x_0).$$

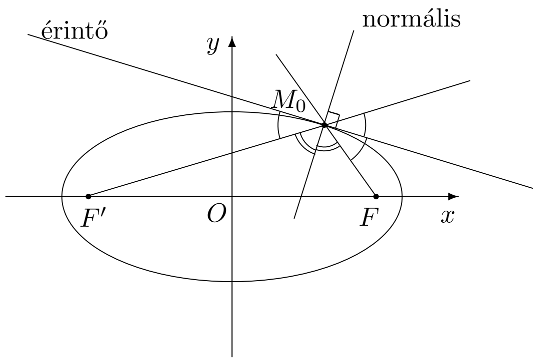
Beszorozva ezt az egyenletet $\frac{y_0}{b^2}$-tel, kapjuk, hogy

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{x_0^2}{a^2} = 1.$$

Tehát az érintő egyenlete: $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$. □

1.4. Értelmezés. *Az ellipszis M_0 pontba szerkesztett **normálisa** az az egyenes, amelyik áthalad az M_0 ponton és merőleges az ellipszis M_0 pontjában szerkesztett érintőre.*

1.5. Tétel. (***Az ellipszis optikai tulajdonsága***) *Az ellipszis M_0 pontjába szerkesztett érintő és normális felezik az FM_0 és $F'M_0$ vezéregyenesek által meghatározott szögeket.*



6. ábra. Ellipszis optikai tulajdonsága.

Bizonyítás. Úgy szerkesztjük meg a koordináta-rendszert, hogy az ellipszis egyenlete legyen $\mathcal{E} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, ahol $b^2 = a^2 - c^2$ és a fókuszok $F'(-c, 0); F(c, 0)$. Legyen $M_0(x_0, y_0) \in \mathcal{E}$ egy tetszőleges pont. Felírjuk az FM_0 és $F'M_0$ vezéregyenesek egyenleteit:

$$FM_0 : \frac{x - x_0}{c - x_0} = \frac{y - y_0}{-y_0} \quad \Leftrightarrow FM_0 : -y_0x + (x_0 - c)y + cy_0 = 0; \tag{24}$$

$$F'M_0 : \frac{x - x_0}{-c - x_0} = \frac{y - y_0}{-y_0} \quad \Leftrightarrow \quad F'M_0 : y_0x - (x_0 + c)y + cy_0 = 0. \tag{25}$$

FM és $F'M$ egyenesek által bezárt szögek szögfelezői (a 15 egyenlet alapján):

$$\frac{-y_0x + (x_0 - c)y + cy_0}{\sqrt{y_0^2 + (x_0 - c)^2}} = \pm\frac{y_0x - (x_0 + c)y + cy_0}{\sqrt{y_0^2 + (x_0 + c)^2}} \tag{26}$$

Kiszámítjuk a gyökjel alatti kifejezéseket:

$$y_0^2 + (x_0 - c)^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x_0^2) + (x_0 - c)^2 =$$

$$= \frac{a^2 - c^2}{a^2}(a^2 - x_0^2) + x_0^2 - 2x_0c + c^2 = \frac{(a^2 - cx_0)^2}{a^2}.$$

Mivel $x_0 \in [-a, a]$ és $0 < c < a$, következik, hogy $a^2 - cx_0 \geq 0$. Tehát

$$\sqrt{y_0^2 + (x_0 - c)^2} = \frac{a^2 - cx_0}{a}. \tag{27}$$

Hasonló számítások után kapjuk, hogy

$$\sqrt{y_0^2 + (x_0 + c)^2} = \frac{a^2 + cx_0}{a}. \tag{28}$$

Ekkor a (26), (27), (28) összefüggések alapján az $\widehat{FM_0F'}$ szög szögfelezőinek egyenletei:

$$\frac{-y_0x + (x_0 - c)y + cy_0}{a^2 - cx_0} = \pm \frac{y_0x - (x_0 + c)y + cy_0}{a^2 + cx_0}.$$

Két esetünk van, aszerint, hogy az egyenlőség jobboldalán melyik előjelet választjuk. Válasszuk például a "+" előjelet! Ekkor elvégezve a műveleteket és alkalmazva a $c^2 = a^2 - b^2$ összefüggést, kapjuk az alábbi egyenletet:

$$-a^2y_0x + a^2x_0y - a^2cy + a^2cy_0 - cx_0y_0x + cx_0^2y - c^2x_0y + c^2x_0y_0 =$$

$$= a^2y_0x - a^2x_0y - a^2cy + a^2cy_0 - cx_0y_0x + cx_0^2y + c^2x_0y - c^2x_0y_0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -a^2y_0x + b^2yx_0 + (a^2 - b^2)x_0y_0 = 0.$$

Átrendezve ezt az egyenletet észrevehetjük, hogy ez épp az M_0 pontba szerkesztett normális egyenlete. Így a másik szögfelező (a "$-$" előjeles) az M_0 pontba szerkesztett érintő lesz (mert a belső és külső szögfelezők merőlegesek egymásra az M_0 pontban, akárcsak az érintő és normális). □

1.11. Megjegyzés. A tételben kijelentett mértani tulajdonságok az alábbi optikai tulajdonságnak felel meg: az ellipszis egyik fókuszában elhelyezett fényforrásból kiinduló tetszőleges fénysugár az ellipszisről való visszaverődés után a másik fókuszon fog átmenni.

1.5.3. Hiperbola

1.5. Értelmezés. *A* ***hiperbola*** *azon pontok mértani helye, amelyeknek két rögzített ponttól vett távolságuk különbsége állandó.*

Legyen $c > 0$, F, F' két rögzített pont a síkban úgy, hogy $|FF'| = 2c$ és legyen $a \in (0, c)$. A sík azon M pontjainak $\mathcal{H}$ halmazát, amelyre $||MF'| - |MF|| = 2a$ hiperbolának nevezzük:

$$\mathcal{H} = \{M \in \mathcal{P} \mid ||MF'| - |MF|| = 2a\}.$$

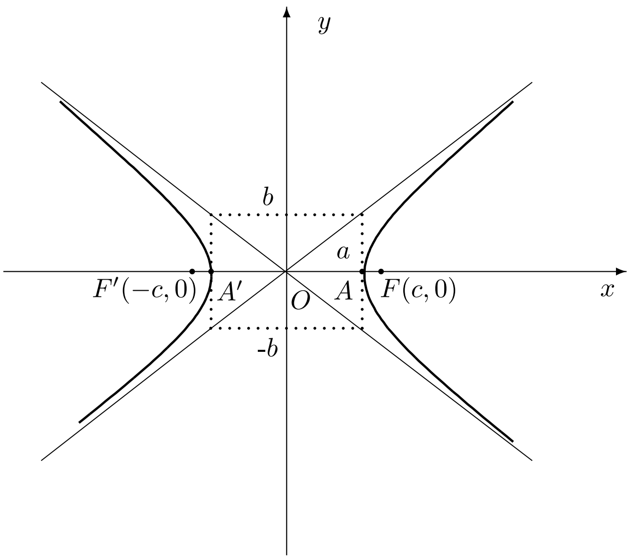
További elnevezések:
1. F, F': a hiperbola **fókuszai**
2. FF': **fokális tengely**
3. $|FF'| = 2c$: **fókusztávolság**
4. $[MF], [MF']$ szakaszok: az M ponthoz tartozó **vezérsugarak**.

Legyen xOy egy Descartes-féle koordináta-rendszer, amelynek origója legyen az $[FF']$ szakasz felezőpontja, Ox tengelye pedig a fokális tengely. Ekkor a fókuszok koordinátái: $F(c, 0), F'(-c, 0)$.

1.6. Tétel. *A $M(x, y)$ pont akkor és csakis akkor tartozik hozzá a $\mathcal{H}$ hiperbolához, ha*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

ahol $b^2 = c^2 - a^2$.



7. ábra. Hiperbola

Bizonyítás. A hiperbola értelmezése szerint az M pont akkor van a $\mathcal{H}$ hiperbolán, ha $||MF'|-|MF||=2a$, vagyis

$$|MF'|-|MF|=\pm 2a \Leftrightarrow \quad \sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\pm 2a.$$

Négyzetreemelve mindkét oldalt kapjuk, hogy

$$(x-c)^2+y^2=4a^2+(x+c)^2+y^2\pm 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2} \Leftrightarrow$$
$$-4xc-4a^2=\pm 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}.$$

Újra négyzetre emelést alkalmazva és átrendezve az egyenletet következik, hogy

$$x^2(c^2-a^2)-a^2y^2+a^2(a^2-c^2)=0.$$

Bevezetve a $b^2=c^2-a^2$ jelölést és elosztva az egyenletet a^2b^2-tel, megkapjuk a hiperbola **kanonikus egyenletét**: □

$$\mathcal{H}: \boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1} \tag{29}$$

1.12. Megjegyzés. A hiperbola egyenletéből adódik, hogy a hiperbolának két szimmetriatengelye van; az egyik a fókuszokat összekötő egyenes, ezt a hiperbola **hiperbola valós tengelyé**nek nevezzük; a másik fókuszokat összekötő szakasz felezőmerőlegese, melyet a hiperbola **képzetes tengelyé**nek nevezünk. A két tengely O metszépontja a hiperbola szimmetria-középpontja, amit a hiperbola középpontjának is mondunk.

1.13. Megjegyzés. Belátható, hogy az $A(a,0)$ és $A'(-a,0)$ pontok rajta vannak a hiperbolán, mégpedig ott, ahol az Ox tengely metszi a hiperbolát. Ezeket a pontokat a **hiperbola csúcspontjai**nak nevezzük. Az a, b számok a hiperbola valós és képzetes féltengelyei.

1.7. Tétel. *Az* $\mathcal{H}: \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ *egyenletű parabolának a van két* ***ferde aszimptotája*** *a* $\pm\infty$*-ben, melynek egyenletei:*

$$\boxed{y=\pm\frac{b}{a}x.} \tag{30}$$

Bizonyítás. Kifejezzük a hiperbola egyenletéből a y-t és legyen

$$f(x)=y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}.$$

Köztudott, hogy a ferde aszimptota egyenlete $\pm\infty$-ben: $y=mx+n$, ahol $m=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}$ és $n=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-mx)$. A mi esetünkben kiszámolva ezeket a határértékeket kapjuk, hogy $m=\pm\frac{b}{a}$ és $n=0$. □

1.8. Tétel. *A* $\mathcal{H} : \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ *egyenlettel megadott hiperbola* $M_0(x_0, y_0)$ *pontjában szerkesztett* ***érintő egyenlete:***

$$\boxed{\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1.} \tag{31}$$

Ezt az egyenletet még a hiperbola ***duplázott egyenleté****nek is nevezzük az* M_0 *pontban.*

Bizonyítás. A 1.6 Megjegyzés alapján a hiperbola érintője az $M_0(x_0, y_0)$ pontban : $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$, ahol $f(x) = y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$. Az f függvény előjelét azonosnak választjuk az y_0 előjelével.

Feltételezve, hogy $y_0 \geq 0$ az érintő egyenlete:

$$y - y_0 = \frac{b}{a} \cdot \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 - a^2}} \cdot (x - x_0). \tag{32}$$

(Ha $y_0 < 0$, teljesen hasonló számítások után ugyanahhoz az egyenlethez jutunk.) Mivel az $M_0(x_0, y_0) \in \mathcal{H}$, következik, hogy $\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1$, vagyis $y_0^2 = \frac{b^2}{a^2}(x_0^2 - a^2)$. Feltételeztük, hogy $y_0 \geq 0$, tehát $\sqrt{x_0^2 - a^2} = \frac{a}{b} \cdot y_0$. Visszahelyettesítve ezt a (32) összefüggésbe írhatjuk, hogy

$$y - y_0 = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_0}{y_0}(x - x_0).$$

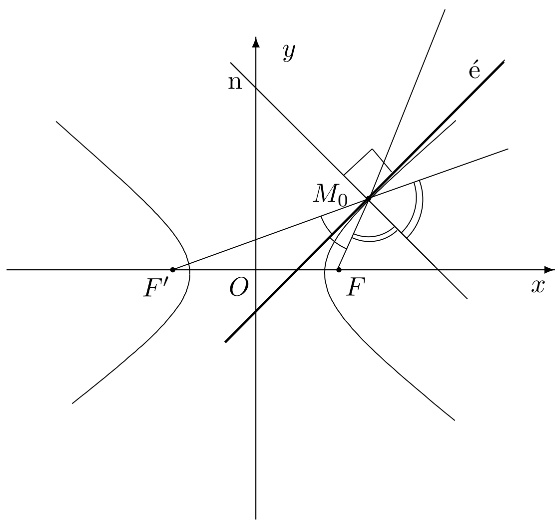
Beszorozva ezt az egyenletet $\frac{y_0}{b^2}$-tel, kapjuk, hogy

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = \frac{y_0^2}{b^2} - \frac{x_0^2}{a^2} = 1.$$

Tehát az érintő egyenlete: $\dfrac{xx_0}{a^2} - \dfrac{yy_0}{b^2} = 1.$ □

1.6. Értelmezés. *Azt az egyenest, amelyik átmegy az* M_0 *ponton és merőleges az* M_0 *pontba szerkesztett érintőre, a hiperbola* M_0 *pontjába szerkesztett* ***normális****nak nevezzük.*

1.9. Tétel. (***A hiperbola optikai tulajdonsága***) *A hiperbola* M_0 *pontjába szerkesztett érintő és normális az* FM_0 *és* $F'M_0$ *vezéregyenesek által meghatározott szögek szögfelezői.*



8. ábra. A hiperbola optikai tulajdonsága

Bizonyítás. Úgy szerkesztjük meg a koordináta-rendszert, hogy a $\mathcal{H}$ hiperbola egyenlete legyen $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, ahol $b^2 = c^2 - a^2$ és a fókuszok $F'(-c, 0); F(c, 0)$. Legyen $M_0(x_0, y_0) \in \mathcal{H}$ egy tetszőleges pont. Felírjuk az FM_0 és $F'M_0$ vezéregyenesek egyenleteit:

$$FM_0 : y_0x - (x_0 - c)y - cy_0 = 0; \tag{33}$$

$$F'M_0 : y_0x - (x_0 + c)y + cy_0 = 0. \tag{34}$$

FM és $F'M$ egyenesek által bezárt szögek szögfelezői

$$\frac{y_0x - (x_0 + c)y + cy_0}{\sqrt{y_0^2 + (x_0 + c)^2}} = \pm \frac{y_0x - (x_0 - c)y - cy_0}{\sqrt{y_0^2 + (x_0 - c)^2}}. \tag{35}$$

Kiszámoljuk a gyökjel alatti kifejezéseket:

$$\begin{aligned} y_0^2 + (x_0 + c)^2 &= b^2(-1 + \frac{x_0^2}{a^2}) + x_0^2 + 2x_0c + c^2 = \\ &= (\frac{b^2}{a^2} + 1)x_0^2 + 2x_0c + c^2 - b^2 = \\ &= \frac{(b^2 + a^2)x_0^2}{a^2} + 2x_0c + a^2 = \\ &= \frac{1}{a^2}(c^2x_0^2 + 2x_0ca^2 + a^4) = \frac{1}{a^2}(cx_0 + a^2)^2. \end{aligned}$$

Hasonló gondolatmenet alapján $y_0^2 + (x_0 - c)^2 = \dfrac{1}{a^2}(a^2 - cx_0)^2$.

Ekkor a szögfelezők egyenletei:

$$\frac{y_0x - (x_0 + c)y + cy_0}{a^2 + cx_0} = \pm \frac{y_0x - (x_0 - c)y - cy_0}{a^2 - cx_0}.$$

Ha a "$-$" előjeles egyenletet választjuk először, akkor az aránypárok tulajdonsága alapján írhatjuk, hogy

$$a^2y_0x - a^2x_0y - a^2cy + a^2y_0c - cx_0y_0x + cx_0^2y + c^2x_0y - c^2x_0y_0 =$$

$$= -a^2y_0x + a^2x_0y - a^2cy + a^2cy_0 - cx_0y_0x + cx_0^2y - c^2x_0y + c^2x_0y_0 \Leftrightarrow$$

$$a^2y_0x - a^2x_0y + c^2x_0y - c^2x_0y_0 = 0 \Leftrightarrow$$

$$a^2y_0x + b^2x_0y - (a^2 + b^2)x_0y_0 = 0.$$

Tehát az egyik szögfelező egybeesik a normálissal (lásd (**??**) egyenletet), ami maga után vonja, hogy a másik szögfelező egybeesik az érintővel. □

1.5.4. Parabola

1.7. Értelmezés. *Azon pontok mértani helyét a síkból, amelyeknek egy rögzített ponttól és egy rögzített egyenestől mért távolságuk egyenlő* ***parabolá****nak nevezzük.*

Legyen $h \subset \mathcal{P}$ egy egyenes és $F \notin h$ egy pont.

1.8. Értelmezés. *A sík azon M pontjainak $\mathcal{P}_p$ halmazát, amelyekre*

$$d(M, h) = |MF|$$

parabolának nevezzük:

$$\mathcal{P}_p = \{M \in \mathcal{P} : d(M, h) = |MF|.\}$$

További elnevezések:

1. az F pont: a parabola **fókusza** vagy **gyújtópontja**;
2. a h egyenes: a parabola **vezéregyenese**;
3. az $[MF]$ szakasz: **vezérsugár**.

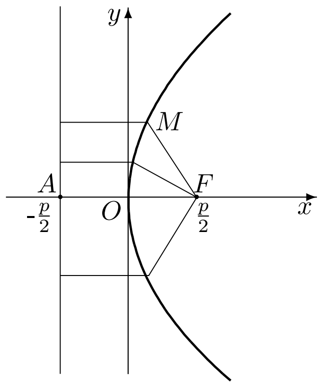
Választunk egy Descartes-féle koordináta-rendszert, úgy, hogy az O pont legyen az $[AF]$ szakasz felezőpontja, ahol az A pont a fókusz h egyenesre eső vetülete és az Ox tengely pedig legyen az h-ra merőleges AF egyenes.

Jelölje $p = |AF|$ a fókusz és vezéregyenes közti $|AF|$ távolságot. Ezt a számot **a parabola paraméteré**nek nevezzük.

Ekkor $F\left(\frac{p}{2},\ 0\right)$ és $A\left(-\frac{p}{2},\ 0\right)$. A h vezéregyenes egyenlete: $x = -\frac{p}{2}$.

1.10. Tétel. *Az $M(x, y)$ pont akkor és csakis akkor tartozik hozzá a $\mathcal{P}_p$ parabolához, ha*

$$\boxed{y^2 = 2px.} \tag{36}$$



9. ábra. Az $y^2 = 2px$ egyenlettel megadott parabola.

Bizonyítás. Az M pont akkor és csakis akkor van rajta a $\mathcal{P}_p$ parabolán, ha

$$d(M,h) = |MF| \Leftrightarrow d^2(M,h) = MF^2 \Leftrightarrow \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2px = y^2.$$

Tehát a **parabola kanonikus egyenlete**:

$$y^2 = 2px.$$

1.14. Megjegyzés. A parabola egyenlete alapján egy $M(x,y)$ ponttal együtt az $M_1(x,-y)$ pont is a parabolán van. Tehát az Ox tengely szimmetriatengelye a parabolának.

1.11. Tétel. *Az $y^2 = 2px$ egyenlettel megadott parabola $M_0(x_0,y_0)$ pontjába szerkesztett **érintőjének egyenlete***

$$\boxed{yy_0 = p(x + x_0),} \tag{37}$$

*amelyet még a parabola **duplázott egyenlet**ének is nevezünk az M_0 pontban.*

Bizonyítás. A 1.6 Megjegyzés szerint a parabola M_0 pontjába szerkesztett érintőjének egyenlete $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$, ahol $f(x) = y = \pm\sqrt{2px}$, ahol az f függvény előjelét azonosnak választjuk az M_0 pont y_0 ordinátájának előjelével.

Tételezzük fel, hogy az M_0 pont a parabola "felső" ívén van, vagyis $y_0 \geq 0$. Ekkor még felhasználva, hogy $y_0^2 = 2px_0$ (mert $M_0 \in \mathcal{P}$) kapjuk az érintő egyenletét:

$$y - y_0 = \frac{p}{\sqrt{2px_0}}(x - x_0) \Leftrightarrow y - y_0 = \frac{p}{y_0}(x - x_0) \Leftrightarrow yy_0 = px + \underbrace{y_0^2 - px_0}_{px_0}.$$

1.9. Értelmezés. *Azt az egyenest, amelyik átmegy az M_0 ponton és merőleges a parabola M_0 pontba szerkesztett érintőjére, a parabola M_0 pontjába szerkesztett **normálisá**nak nevezzük.*

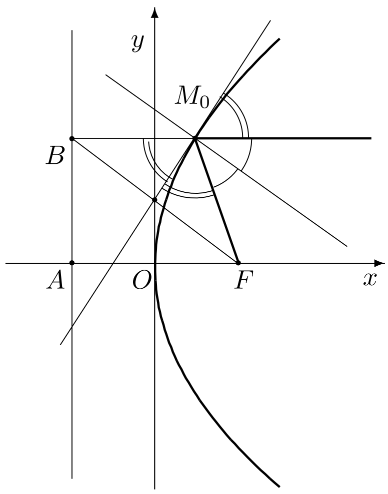
1.12. Tétel. (***A parabola optikai tulajdonsága***) *A parabola tengelyével párhuzamos fénysugarak a paraboláról visszaverődve a fókuszban futnak össze vagy fordítva a parabola fókuszából kiinduló fénysugarakat a parabola a tengelyével párhuzamosan veri vissza.*

Az optikai tulajdonság matematikai megfogalmazása: a parabola egy M_0 pontjához tartozó érintő és normális felezi az M_0F egyenes és az M_0 ponton át a parabola tengelyével húzott párhuzamos egyenes által bezárt szöget.

Bizonyítás. Legyen $y^2 = 2px$ a parabola egyenlete. Ekkor a h egyenes egyenlete: $x = -\dfrac{p}{2}$ és a fókusz koordinátái $F\left(\dfrac{p}{2}, 0\right)$. Feltételezzük, hogy az M_0 pont koordinátái $M_0(x_0,y_0)$. Legyen B az M_0 pont vetülete a vezéregyenesre: $B\left(-\dfrac{p}{2}, y_0\right)$

Könnyen belátható, hogy a tétel kijelentése egyenértékű az alábbi állításokkal:

1. a parabola érintője az M_0 pontban a $[BF]$ szakasz felezőmerőlegese;
2. a fókusz szimmetrikusa az érintőre nézve rajta van a vezéregyenesen;



10. ábra. A parabola optikai tulajdonsága

3. a fókusz vetülete az M_0 ponthoz tartozó érintőre a parabola csúcsérintőjén van.

Ezért elég igazolni egyet ezen állítások közül. Igazoljuk például, hogy az M_0 pontban szerkesztett érintő felezőmerőlegese a $[BF]$ szakasznak. Az M_0 pontba szerkesztett érintő egyenlete: $yy_0 = p(x + x_0)$. Tehát az érintő iránytényezője:

$$m_{\text{érintő}} = \frac{p}{y_0}. \tag{38}$$

A BF egyenes iránytényezője:

$$m_{BF} = \frac{y_B - y_F}{x_B - x_F} = -\frac{y_0}{p}. \tag{39}$$

Legyen N a $[BF]$ szakasz felezőpontja. Ekkor $N\left(0, \frac{y_0}{2}\right)$. Ez a pont rajta van az M_0 pontba szerkesztett érintőn, mert koordinátái kielégítik az érintő egyenletét: $\frac{y_0 y_0}{2} = px_0$. Ekkor a (38) és (39) összefüggések alapján kapjuk, hogy az érintő a $[BF]$ szakasz felezőmerőlegese. $\square$

2. Kitűzött feladatok

1. Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amelynek

   (i) iránytényezője $m = -5$ és átmegy az $A(1, -2)$ ponton;

   (ii) iránytényezője $m = 8$ és az Oy tengelyen egy 2 hosszúságú szakaszt határoz meg;

   (iii) áthalad az $A(-2, 3)$ ponton és az Ox tengellyel $60°$-os szöget zár be.

   (iv) átmegy a B(1,7) ponton és merőleges az $n(4, 3)$ vektorra.

2. Adott az ABC háromszög: $A(1, 1), B(-2, 3), C(4, 7)$. Írjuk fel az oldalak valamint az A csúcshoz tartozó oldalfelező és magasság egyenleteit! E: $x = 1, 3x + 2y - 5 = 0$.

3. Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely áthalad az $A(12, 6)$ ponton és az egyenes valammint a koordinátatengelyek által meghatározott háromszög területe 150.

   E: $3x + 4y - 60 = 0, x + 3y - 30 = 0$.

4. Az origóból egy d egyenesre húzott merőleges talppontja az $A(1, 2)$ pont. Írjuk fel a d egyenes egyenletét! E: $x + 2y - 5 = 0$.

5. Határozzuk meg a $d_1 : -x + 2y - 1 = 0$ egyenes szimmetrikusát a $d_2 : x - y = 0$ egyenesre majd az $A(-2, 5)$ pontra vonatkozóan! E: $2x + y - 1 = 0, x - 2y + 23 = 0$.

6. Adott egy háromszögkét csúcsa: $A(-6, 2)$ és $B(2, -2)$, valamint a $H(1, 2)$ ortocentrum. Határozzuk meg a harmadik C csúcs koordinátáit! E:$C(2, 4)$.

7. Határozzuk meg azt az $A(3, 1)$ ponton áthaladó egyenest, amely $45°$-os szöget zár be a $2x+3y-1 = 0$ egyenlettel megadott egyenessel. E: $x - 5y + 2 = 0, 5x + y - 16 = 0$.

8. Határozzuk meg az $O(0, 0), A(1, 2)$ és $B(-5, 7)$ pontok távolságát a $6x + 8y - 15 = 0$ egyenestől. E: $\frac{3}{2}, \frac{7}{10}, \frac{11}{10}$.

9. Határozzuk meg az alábbi párhuzamos egyenesek közti távolságot

   1) $x - 2y + 3 = 0$ és $2x - 4y + 7 = 0$;

   2) $3x - 4y + 1 = 0$ és $x = 1 + 4t, y = 3t$;

   3) $x = 2 - t, y = -3 + 2t$ és $x = 2s, y = 5 - 4s$.

   E: 1)$\frac{1}{2\sqrt{5}}$.

10. Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amely áthalad az A, B pontokon és középpontja rajta van a d egyenesen, ha

    a) $A(4, 1)$, $B(0, -3)$, $d : x - 2y - 4 = 0$;

    b) $A(1, 2)$, B(4,-3), $d : 3x - y - 19 = 0$.

    E: a) $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 8$; b) $(x - 7\frac{1}{12})^2 + (y - 2\frac{1}{4})^2 = \frac{2669}{72}$.

11. Írjuk fel a $\mathcal{C}$ kör P pontjába szerkesztett érintő egyenletét, ha

    a) $\mathcal{C} : x^2 + y^2 = 5$, $P(1, -2)$;

    b) $\mathcal{C} : x^2 + y^2 + 2x - 6y - 15 = 0$, $P(3, 6)$. E: a) $x - 2y - 5 = 0$; b) $4x + 3y - 30 = 0$.

12. Adott a $\mathcal{C}$ kör és a d egyenes. Írjuk fel az adott egyenessel párhuzamos körérintők egyenletét, ha

    a) $\mathcal{C} : x^2 + y^2 - 13 = 0$, $d : 4x + 6y - 5 = 0$;

    b) $\mathcal{C} : x^2 + y^2 + 2x - 4y - 20 = 0$, $d : 3x + 4y = 0$.

    E: a) $e_1 : 2x + 3y + 13 = 0, e_2 : 2x + 3y - 13 = 0$; b) $e_1 : 3x + 4y + 20 = 0, e_2 : 3x + 4y - 30 = 0$.

13. Adott a $\mathcal{C}$ kör és a d egyenes. Írjuk fel az adott egyenesre merőleges körérintők egyenletét, ha

    a) $\mathcal{C} : x^2 + y^2 + 5x = 0$, $d : 4x - 3y + 7 = 0$;

    b) $\mathcal{C} : x^2 + y^2 - 12x - 8y + 47 = 0$, $d : x + 2y - 4 = 0$.

    E: a) $e_1 : 3x + 4y + 20 = 0, e_2 : 3x + 4y - 5 = 0$; b) $e_1 : 2x - y - 3 = 0, e_2 : 2x - y - 13 = 0$.

14. Írjuk fel az ellipszis kanonikus egyenletét, ha

a) nagytengelye 8 egység, kistengelye 6 egység;

b) $a = 4$, $c = 3$;

c) $b = 24$, $c = 7$;

d) az ellipszis áthalad a $P_1(10, 5)$, $P_2(6, 13)$ pontokon;

e) az ellipszis fókuszai $F(3, 0)$, $F'(-3, 0)$ és egy pontja $P(4, \dfrac{12}{5})$.

E: a) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$; b) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$; c) $\frac{x^2}{625} + \frac{y^2}{576} = 1$; d) $\frac{9x^2}{1000} + \frac{y^2}{250} = 1$; e) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

15. Írjuk fel az $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{12} = 1$ ellipszis $P(2, -3)$ pontba szerkesztett érintőjének egyenletét!

E: $x - 2y - 8 = 0$.

16. Hány érintő húzható a $P(1, 1)$, $Q(5, 1)$, $R(4, 0)$ pontokból az $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{12} = 1$ ellipszishez?

E: 0,2,1.

17. Írjuk fel az $\dfrac{x^2}{10} + \dfrac{y^2}{5} = 1$ ellipszis azon érintőinek az egyenletét, amelyek párhuzamosak a $3x + 2y + 7 = 0$ egyenessel!

E: $3x + 2y \pm \frac{100}{\sqrt{110}} = 0$.

18. Az A pontból érintőket szerkesztünk az $\mathcal{E}$ ellipszishez. Határozzuk meg az egyenleteiket, ha

a) $A(4, -1)$, $\mathcal{E} : \dfrac{x^2}{6} + \dfrac{y^2}{3} = 1$;

b) $A(2, -1)$, $\mathcal{E} : x^2 + 9y^2 = 9$.

E: a) $x + y - 3 = 0, x - 5y - 9 = 0$; b) $y + 1 = 0, 4x - 5y - 13 = 0$.

19. Határozzuk meg annak a hiperbolának az egyenletét, amelynek fókuszai az Ox tengelyen vannak, szimetrikusak az origóra nézzve és teljesítik az alábbi feltételek közül az egyiket:

1) a tengelyeket a $2a = 10$ és $2b = 8$ egyenlőségek határozzák meg;

2) az aszimptoták egyenletei $y = \pm\frac{4}{3}x$ és a fókusztávolság $2c = 20$.

20. Adott a $16x^2 - 9y^2 = 144$ hiperbola. Határozzuk meg :

1) fókuszokat,

2) az aszimptoták egyenleteit.

21. Írjuk fel az $\dfrac{x^2}{20} - \dfrac{y^2}{5} = 1$ hiperbola azon érintőinek az egyenleteit, amelyek merőlegesek a $4x + 3y - 7 = 0$ egyenesre.

E: $3x - 4y = \pm 10$.

22. Az A pontból érintőket szerkesztünk az $\mathcal{H}$ hiperbolához. Határozzuk meg az egyenleteiket, ha

a) $A(2, 1)$, $\mathcal{H} : \dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{8} = 1$;

b) $A(1, 4)$, $\mathcal{H} : x^2 - \dfrac{y^2}{4} = 1$.

E: a) $x - y - 1 = 0, 9x + 5y - 23 = 0$; b) $x - 1 = 0, 5x - 2y + 3 = 0$.

23. Határozzuk meg annak a parabolának az egyenletét, amelynek csúcsa az origó, szimmetriatengelye az Ox tengely és áthalad az $A(9, 6)$ ponton.

E:$y^2 = 4x$.

24. Határozzuk meg az $y^2 = 12x$ parabola azon érintőjének az egyenletét, amely párhuzamos a $3x - 2y + 30 = 0$ egyenessel és számítsuk ki az adott egyenes és ezen érintő közti távolságot.

E: $3x - 2y + 4 = 0$,$d = 2\sqrt{13}$.

25. Határozzuk meg az $y^2 = 64x$ parabola azon M pontját, amely a legközelebb található a $4x + 3y - 14 = 0$ egyeneshez és határozzuk meg az M pont távolságát ettől az egyenestől.

E: $M(\frac{9}{4}, -24)$.

26. Az $A(5,9)$ pontból értintőket szerkesztünk az $y^2 = 5x$ parabolához. Határozzuk meg azon húr egyenletét, amely áthalad az érintési pontokon! E: $5x - 18y + 25 - 72\sqrt{14} = 0$.

Hivatkozások

[1] Andrica D., Duca D.I., Purdea I. şi Pop I., Matematica de baz a. Editura Studium, Cluj-Napoca, 2002.

[2] Andrica, D., Varga, Cs., Văcăreţu, D., Teme şi probleme alese de geometrie. Ed. Plus, Bucureşti, 2002.

[3] Galbură Gh., Rado F., Geometrie. Ed. Did. şi Ped., Bucureşti, 1979.

[4] Mezei I., Varga Cs., Analitikus mértan. Kolozsvári Egyetemi Kiadó, Kolozsvár, 2010.

[5] Rado F. şi col., Culegere de probleme de Geometrie, Cluj-Napoca, 1979.

[6] Udrişte, C., Tomuleanu, V., Geometrie analitică, Manual pentru clasa a-XI-a. Ed. Did şi Ped., Bucureşti, 1985.