ANALITIKUS MÉRTANBÓL KITŰZÖTT ÁLLAMVIZSGA TÉTELEK KIDOLGOZÁSA

- MATEMATIKA SZAK -

Tartalomjegyzék

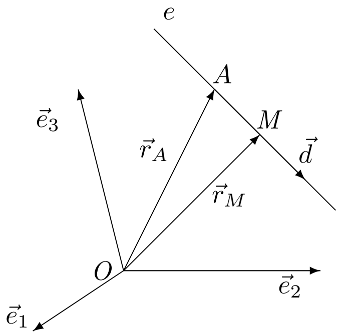
1. Analitikus mértan térben

1.1. Térbeli egyenesek egyenletei Descartes-féle koordináta rendszerhez viszonyítva

1.1.1. Egy pont és egy vektor által meghatározott egyenes egyenlete

Legyen $\mathcal{R} = \{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ egy koordináta rendszer az $\mathcal{S}$ háromdimenziós térben.

Legyen $A \in \mathcal{S}$ egy pont és $\vec{d} \in \mathcal{V}$ egy tetszőleges szabad vektor. Tudjuk, hogy egy adott pont és egy vektor (iránya) egyértelműen meghatároz egy egyenest a térben. Ez az egyenes meghatározott, ha ismerjük minden pontjának a helyzetvektorát.



1. ábra. Az A pont és $\vec{d}$ vektor által meghatározott egyenes.

Legyen tehát M egy tetszőleges pont a $\vec{d}$ vektor és az A pont által meghatározott e egyenesen.

Ekkor $\vec{r}_M = \vec{r}_A + \overrightarrow{AM}$. Mivel az $\overrightarrow{AM}$ vektor iránya megegyezik a $\vec{d}$ vektor irányával, következik, hogy létezik olyan $\lambda \in \mathbb{R}$, amelyre $\overrightarrow{AM} = \lambda \cdot \vec{d}$. Tehát a következő egyenlethez jutunk

$$\boxed{e: \quad \vec{r}_M = \vec{r}_A + \lambda \cdot \vec{d}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.} \tag{1}$$

Ezt az egyenletet az e **egyenes vektoriális egyenleté**nek nevezzük, a $\vec{d}$ vektort pedig az e **egyenes irányvektorának**.

A továbbiakban feltételezzük, hogy a $\vec{d}$ vektor felírása az $\mathcal{R}$ koordináta-rendszerben a következő: $\vec{d} = p\vec{e}_1 + q\vec{e}_2 + r\vec{e}_3$, valamint $\vec{r}_M = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$ és $\vec{r}_A = x_0\vec{e}_1 + y_0\vec{e}_2 + z_0\vec{e}_3$, vagyis $M(x, y, z)$ és $A(x_0, y_0, z_0)$.

Behelyettesítve ezeket a vektorokat az e egyenes (1) vektoriális egyenletébe kapjuk, hogy

$$x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_2 = (x_0 + \lambda p)\vec{e}_1 + (y_0 + \lambda q)\vec{e}_2 + (z_0 + \lambda r)\vec{e}_3.$$

Figyelembe véve az $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ vektorok lineáris függetlenségét kapjuk az e **egyenes parametrikus egyenleteit**:

$$\boxed{e: \quad \begin{cases} x = x_0 + \lambda p \\ y = y_0 + \lambda q \\ z = z_0 + \lambda r \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}.} \tag{2}$$

Ezekből az egyenletekből kifejezve a λ-t következik, hogy

$$\boxed{\frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q} = \frac{z - z_0}{r}.} \tag{3}$$

Ezt az egyenletrendszert az e **egyenes kanonikus egyenleté**nek nevezzük és a $p, q, r \in \mathbb{R}$ valós számokat pedig az **egyenes irányparamétereine**k.

Példa. Az $A(1, -1, 0)$ ponton áthaladó és $\vec{d}(4, -2, 1)$ irányú egyenes egyenletei:

1. vektoriális egyenlet: $\vec{r}_M = \vec{r}_A + \lambda \cdot \vec{d}, \lambda \in \mathbb{R}$;
2. parametrikus egyenlet: $\begin{cases} x = 1 + 4\lambda \\ y = -1 - 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$;
3. kanonikus egyenlet: $\dfrac{x - 1}{4} = \dfrac{y + 1}{-2} = \dfrac{z}{1}$.

1.1. Megjegyzés. Ha egy irányparaméter nulla, akkor az egyenes párhuzamos a neki megfelelő koordinátasíkkal.

Példa. Az $A(2,1,-3)$ ponton áthaladó és $\vec{d}(-1,0,1)$ irányú egyenes egyenletei:

1. parametrikus egyenlet: $e:\quad \begin{cases} x = 2-\lambda \\ y = 1 \\ z = -3+\lambda \end{cases},\ \lambda \in \mathbb{R};$

2. kanonikus egyenlet:

$$e:\quad \frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z+3}{1}.$$

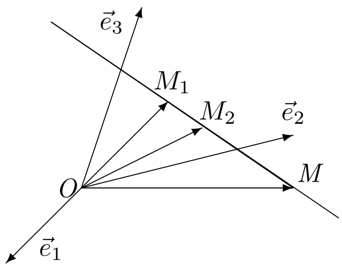
Az aránypárok tulajdonságait felhasználva ezt az egyenletet még átírhatjuk a következő alakba:

$$e:\quad \begin{cases} x-2 = -z-3 \\ y = 1, \end{cases}$$

ahonnan látszik, hogy az e egyenes benne található az $y=1$ síkban, vagyis párhuzamos az (xOz) síkkal.

1.1.2. Két különböző pont által meghatározott egyenes egyenlete

Legyen $\mathcal{R} = \{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ egy affin koordináta-rendszer és legyen $M_1, M_2 \in \mathcal{S}$ két pont úgy, hogy $M_1 \neq M_2$.



2. ábra.

Visszavezethetjük az M_1M_2 egyenes egeynletének meghatározását az előbbi esetre, mert az M_1M_2 egyenest meghatározza egy pontja (például az M_1) és az $\overrightarrow{M_1M_2} = \vec{r}_{M_2} - \vec{r}_{M_2}$ vektor. Feltétezzük, hogy az M_1, M_2 pont koordinátái: $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, ekkor M_1M_2 egyenes irányvektora $\overrightarrow{M_1M_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$. Tehát az M_1M_2 egyenes vektoriális egyenlete:

$$\vec{r}_M = \vec{r}_{M_1} + \lambda \overrightarrow{M_1M_2}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Behelyettesítve az $\overrightarrow{M_1M_2} = \vec{r}_{M_2} - \vec{r}_{M_2}$ összefüggést, kapjuk az M_1M_2 **egyenes vektoriális egyenletét**:

$$\boxed{\vec{r}_M = (1-\lambda)\cdot \vec{r}_{M_1} + \lambda \vec{r}_{M_2}, \lambda \in \mathbb{R}.} \tag{4}$$

Innen az M_1M_2 **egyenes parametrikus egyenlete**:

$$\boxed{\begin{cases} x = (1-\lambda)x_1 + \lambda x_2 \\ y = (1-\lambda)y_1 + \lambda y_2 \\ z = (1-\lambda)z_1 + \lambda z_2 \end{cases},\quad \lambda \in \mathbb{R}.} \tag{5}$$

Kifejezve mindegyik egyenletből λ-t és a kapott kifejezéseket egyenlővé téve jutunk az M_1M_2 **egyenes kanonikus egyenletéhez**:

$$\boxed{M_1M_2 : \frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}.} \tag{6}$$

1.1.3. Egyenes megadása, mint két sít metszete

1.1. Tétel. *Adott a következő egyenletrendszer:*

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \tag{7}$$

úgy, hogy rang $\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix} = 2.$

Ekkor az (7) *egyenletrendszer egy egyenest ábrázol.*

Bizonyítás. Mivel $rang\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix} = 2$, következik, hogy létezik egy 2×2-es részmátrix, amelynek a determinánsa nem nulla, például legyen

$$det\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Ekkor a (7) egyenletrendszer kompatibilis és határozatlan (végtelen sok megoldása van). Tehát létezik $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ úgy, hogy

$$\begin{cases} A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1 = 0 \\ A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0 + D_2 = 0 \end{cases} \tag{8}$$

Az (7) és a (8) relációk megfelelő egyenleteit egymásból kivonva, kapjuk a következő egyenletrendszert:

$$\begin{cases} A_1(x - x_0) + B_1(y - y_0) + C_1(z - z_0) = 0 \\ A_2(x - x_0) + B_2(y - y_0) + C_2(z - z_0) = 0, \end{cases} \tag{9}$$

vagyis

$$\begin{cases} A_1\dfrac{(x - x_0)}{(z - z_0)} + B_1\dfrac{(y - y_0)}{(z - z_0)} = -C_1 \\ A_2\dfrac{(x - x_0)}{(z - z_0)} + B_2\dfrac{(y - y_0)}{(z - z_0)} = -C_2. \end{cases} \tag{10}$$

Mivel $det\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix} \neq 0$ a (10) egyenletrendszer egy Cramer-rendszer az $\dfrac{x - x_0}{z - z_0}$ és $\dfrac{y - y_0}{z - z_0}$ ismeretlenekkel. Tehát a (10) megoldásai a következők lesznek:

$$\begin{cases} \dfrac{x - x_0}{z - z_0} = \dfrac{\begin{vmatrix} -C_1 & B_1 \\ -C_2 & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} \\ \dfrac{y - y_0}{z - z_0} = \dfrac{\begin{vmatrix} A_1 & -C_1 \\ A_2 & -C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}. \end{cases}$$

Átrendezve ezeket az egyenleteket a következőket kapjuk:

$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} -C_1 & B_1 \\ -C_2 & B_2 \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{\begin{vmatrix} A_1 & -C_1 \\ A_2 & -C_2 \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}$$

Észrevehetjük, hogy ez épp egy egyenes egyenlete, amely átmegy az (x_0, y_0, z_0) ponton és iránykomponensei:

$$\left(\begin{vmatrix} -C_1 & B_1 \\ -C_2 & B_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & -C_1 \\ A_2 & -C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right).$$

Tehát a (7) egyenletrendszer megoldásai egy egyenes egyenletét elégítik ki. □

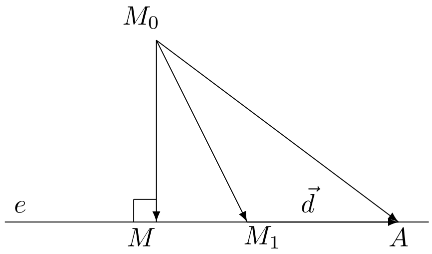
1.1. Értelmezés. *Az* $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$ *egyenletrendszert az* ***egyenes általános egyenleté****nek nevezzük, ha*

$$rang\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix} = 2.$$

1.2. Pont távolsága egyenestől (térben)

Legyen $\mathcal{R}\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ egy descartes féle koordináta-rendszer, $M_0(x_0, y_0, z_0)$ egy rögzített pont és e : $\dfrac{x-x_1}{p} = \dfrac{y-y_1}{q} = \dfrac{z-z_1}{r}$ egy egyenes. Legyen $pr_e(M_0) = M$. Ekkor az M_0 **pont** e **egyenestől való távolságán** az alábbi számot értjük

$$d(M_0, e) = \| \overrightarrow{M_0M} \| .$$



3. ábra. Az M_0 pont távolsága az e egyenestől: $|M_0M|$.

Legyen $M_1(x_1, y_1, z_1)$ és A két pont az e egyenesről úgy, hogy $\overrightarrow{M_1A} = \vec{d}(p, q, r)$, ahol $\vec{d}$ vektorral az e egyenes irányvektorát jelöltük. Ekkor az M_1M_0A háromszög területét kétféleképpen felírva a következő egyenlőséghez jutunk:

$$\sigma(M_0M_1A) = \frac{1}{2} \| \overrightarrow{M_0M} \| \cdot \| \overrightarrow{M_1A} \| = \frac{1}{2} \| \overrightarrow{M_1M_0} \times \vec{d} \| .$$

Ha ebből a képletből kifejezzük az $\| \overrightarrow{M_0M} \| = d(M_0, e)$ számot kapjuk, hogy:

$$\boxed{d(M_0, e) = \frac{\| \overrightarrow{M_1M_0} \times \vec{d} \|}{\| \vec{d} \|},} \tag{11}$$

ahol $||\vec{d}|| = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}$ és

$$\overrightarrow{M_1M_0} \times \vec{d} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_0 - x_1 & y_0 - y_1 & z_0 - z_1 \\ p & q & r \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i} \begin{vmatrix} y_0 - y_1 & z_0 - z_1 \\ q & r \end{vmatrix} + \vec{j} \begin{vmatrix} z_0 - z_1 & x_0 - x_1 \\ r & p \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} x_0 - x_1 & y_0 - y_1 \\ p & q \end{vmatrix}.$$

Tehát

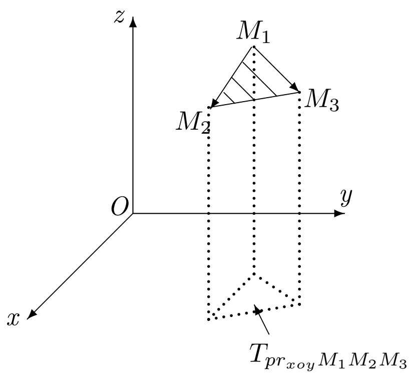
$$d(M_0, e) = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_0 - y_1 & z_0 - z_1 \\ q & r \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_0 - z_1 & x_0 - x_1 \\ r & p \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_0 - x_1 & y_0 - y_1 \\ p & q \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}.$$

1.3. Csúcspontjainak koordinátáival jellemzett háromszög területe térben és síkban

Legyen $\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ egy ortonormált jobbsodrású koordináta-rendszer és ehhez viszonyítva adottak az $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2), M_3(x_3, y_3, z_3) \in \mathcal{S}$ nem kollineáris pontok. Ekkor az $M_1M_2M_3$ háromszög területét a következő képlettel számíthatjuk ki:

$$\boxed{T_{M_1M_2M_3} = \frac{1}{2} \| \overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3} \|} \tag{12}$$

A továbbiakban kifejezzük a terület képletét a pontok koordinátáival. Mivel $\overrightarrow{M_1M_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ és $\overrightarrow{M_1M_3}(x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$ kapjuk, hogy



4. ábra. Térbeli háromszög területe.

$$\overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}.$$

Tehát

$$T_{M_1M_2M_3} = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3}\| =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_2 - z_1 & x_2 - x_1 \\ z_3 - z_1 & x_3 - x_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}^2}.$$

Átírva a gyök alatti determinánsokat az alábbi képlethez jutunk:

$$\boxed{T_{M_1M_2M_3} = \frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 & 1 \\ z_2 & x_2 & 1 \\ z_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}^2}.} \tag{13}$$

1.2. Megjegyzés. *Ha a háromszög az (xOy) síkban található, akkor a háromszög csúcsainak koordinátái $M_i(x_i, y_i, 0), i = \overline{1,3}$ és így*

$$T_{M_1M_2M_3} = \frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}^2} = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}\right|.$$

1.3. Megjegyzés. *Észrevehetjük, hogy az* $\left|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}\right|$ *determináns értéke megadja tulajdonképpen az $M_1M_2M_3$ térbeli háromszög xOy síkra eső vetületének a kétszeres területét. Hasonlóan*

$$\left|\begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}\right| = 2T_{pr_{yOz}(M_1M_2M_3)};$$

$$\left|\begin{vmatrix} z_1 & x_1 & 1 \\ z_2 & x_2 & 1 \\ z_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix}\right| = 2T_{pr_{xOz}(M_1M_2M_3)}.$$

Tehát

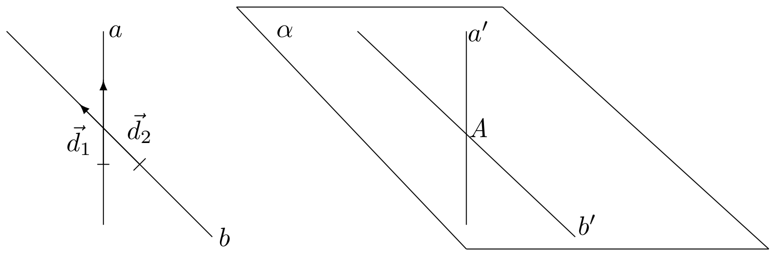
$$\boxed{T_{M_1M_2M_3} = \sqrt{T^2_{pr_{yOz}(M_1M_2M_3)} + T^2_{pr_{xOz}(M_1M_2M_3)} + T^2_{pr_{xOy}(M_1M_2M_3)}}}$$

1.4. Síkok egyenletei Descartes-féle koordináta rendszerhez viszonyítva

1.4.1. Egy pont és két nem párhuzamos irány által meghatározott sík egyenlete

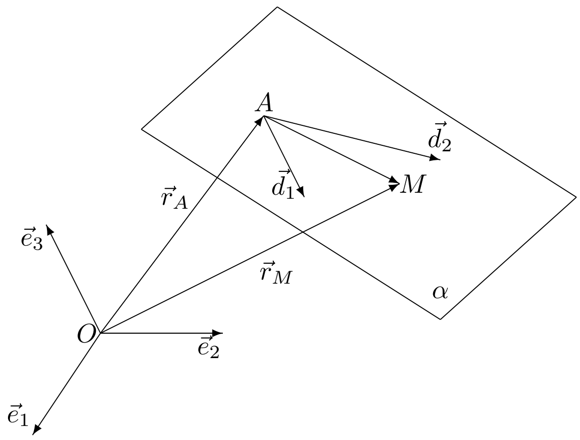
Tekintjük az $A(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{S}$ rögzített pontot és a $\vec{d_1}(p_1, q_1, r_1)$, $\vec{d_2}(p_2, q_2, r_2) \in \mathcal{V}$ egymással nem párhuzamos vektorokat.

Jelölje a és b a $\vec{d_1}$ illetve a $\vec{d_2}$vektorok tartóegyeneseit. Ekkor létezik egy és csakis egy a' egyenes úgy, hogy $a \parallel a'$, $A \in a'$ és létezik egy és csakis egy b' egyenes úgy, hogy $b \parallel b', A \in b'$. Ekkor $dir\, a' = dir\, \vec{d_1}$ és $dir\, b' = dir\, \vec{d_2}$. Mivel $a' \cap b' = \{A\}$ kapjuk, hogy az $(a', b') = \alpha$ sík jól meghatározott. Tehát egy sík egyértelműen meghatározott egy pont és két nem párhuzamos irány által.



5. ábra. Az A pont és $\vec{d_1}, \vec{d_2}$ által meghatározott sík

Egy sík egyenlete meghatározott, ha bármely M pontjának ismerjük a helyzetvektorát. Legyen M egy tetszőleges pont az A pont valamint a $\vec{d_1}$, $\vec{d_2}$ vektorok által meghatározott α síkban.



6. ábra. Az A pont és $\vec{d_1}$, $\vec{d_2}$ vektorok által meghatározott sík

Felírható, hogy $\vec{r}_M = \vec{r}_A + \overrightarrow{AM}$. Mivel az $\overrightarrow{AM}$ vektor koplanáris a $\vec{d_1}, \vec{d_2}$ vektorokkal, léteznek a $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ valós számok úgy, hogy $\overrightarrow{AM} = \lambda \cdot \vec{d_1} + \mu \cdot \vec{d_2}$.

Tehát a **sík vektoriális egyenlete**:

$$\boxed{\vec{r}_M = \vec{r}_A + \lambda\vec{d_1} + \mu\vec{d_2}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.} \tag{14}$$

Legyen az $M(x, y, z)$ pont helyzetvektora az $\mathcal{R}$ koordináta-rendszerben $\vec{r}_M = \overrightarrow{OM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$.

Tudjuk, hogy $\vec{r}_A = x_0\vec{e}_1 + y_0\vec{e}_2 + z_0\vec{e}_3$, $\vec{d_1} = p_1\vec{e}_1 + q_1\vec{e}_2 + r_1\vec{e}_3$, $\vec{d_2} = p_2\vec{e}_1 + q_2\vec{e}_2 + r_2\vec{e}_3$. Ekkor felhasználva a sík (14) egyenletét írhatjuk, hogy:

$$x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 = (x_0 + \lambda \cdot p_1 + \mu \cdot p_2)\vec{e}_1 + (y_0 + \lambda \cdot q_1 + \mu \cdot q_2)\vec{e}_2 + (z_0 + \lambda \cdot r_1 + \mu \cdot r_2)\vec{e}_3.$$

Mivel az $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ vektorok lineárisan függetlenek, kapjuk a következő egyenletrendszert:

$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + \lambda \cdot p_1 + \mu \cdot p_2 \\ y = y_0 + \lambda \cdot q_1 + \mu \cdot q_2 \\ z = z_0 + \lambda \cdot r_1 + \mu \cdot r_2, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \end{cases} ,} \tag{15}$$

amelyet a **sík paraméteres egyenletei**nek nevezünk. Átrendezve a kapott (15) egyenleteket írhatjuk, hogy:
$$\begin{cases} \lambda \cdot p_1 + \mu \cdot p_2 = x - x_0 \\ \lambda \cdot q_1 + \mu \cdot q_2 = y - y_0 \\ \lambda \cdot r_1 + \mu \cdot r_2 = z - z_0 \end{cases}.$$

Ennek az egyenletrendszernek a λ és μ ismeretlenekkel akkor van megoldása (Rouché tétele szerint), ha:
$\begin{vmatrix} p_1 & p_2 & x-x_0 \\ q_1 & q_2 & y-y_0 \\ r_1 & r_2 & z-z_0 \end{vmatrix} = 0$, vagy átírva

$$\boxed{\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix} = 0.} \tag{16}$$

Az így kapott (16) egyenletet a **sík algebrai** vagy **kanonikus egyenleté**nek nevezzük.

Ha az (16) determinánst az első sora szerint kifejtjük, akkor az

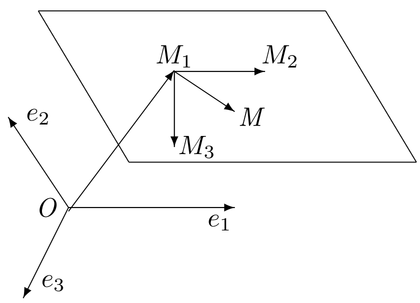
$$\boxed{A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0} \tag{17}$$

egyenletet kapjuk, ahol
$$A = \begin{vmatrix} q_1 & r_1 \\ q_2 & r_2 \end{vmatrix},\ B = \begin{vmatrix} r_1 & p_1 \\ r_2 & p_2 \end{vmatrix},\ C = \begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix}.$$

Az (17) egyenletet az $A(x_0, y_0, z_0)$ ponton áthaladó a sík algebrai egyenletének nevezzük.

1.4.2. Három nem kollineáris pont által meghatározott sík egyenlete

Legyen $\mathcal{R} = \{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ egy affin koordináta-rendszer és $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3) \in \mathcal{S}$ három nem kollineáris pont (7. ábra).



7. ábra.

Ekkor az M_1, M_2, M_3 pontok egyértelműen meghatároznak egy $(M_1M_2M_3) = \alpha$ síkot. Ha $M \in \alpha$ a sík egy tetszőleges pontja, akkor felírható, hogy

$$\begin{aligned} \vec{r}_M &= \vec{r}_{M_1} + \overrightarrow{M_1M} = \vec{r}_{M_1} + \lambda \cdot \overrightarrow{M_1M_2} + \mu \cdot \overrightarrow{M_1M_3} = \\ &= \vec{r}_{M_1} + \lambda(\vec{r}_{M_2} - \vec{r}_{M_1}) + \mu(\vec{r}_{M_3} - \vec{r}_{M_1}) = \\ &= (1-\lambda-\mu)\vec{r}_{M_1} + \lambda \cdot \vec{r}_{M_2} + \mu \cdot \vec{r}_{M_3}, \end{aligned}$$

ahol $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Tehát a **sík vektoriális egyenlete**:

$$\boxed{\vec{r}_M = (1-\lambda-\mu)\vec{r}_{M_1} + \lambda \cdot \vec{r}_{M_2} + \mu \cdot \vec{r}_{M_3}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.} \tag{18}$$

Hasonlóan, mint a (15) relációban, kapjuk, hogy

$$\boxed{\begin{cases} x = (1-\lambda-\mu)x_1 + \lambda x_2 + \mu x_3 \\ y = (1-\lambda-\mu)y_1 + \lambda y_2 + \mu y_3 \\ z = (1-\lambda-\mu)z_1 + \lambda z_2 + \mu z_3, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \end{cases}} \tag{19}$$

amelyet a **sík parametrikus egyenleté**nek nevezünk.

Ha átrendezzük a fenti rendszert kapunk λ, μ -ben egy két ismeretlenes egyenletrendszert:

$$\begin{cases} x - x_1 = \lambda(x_2 - x_1) + \mu(x_3 - x_1) \\ y - y_1 = \lambda(y_2 - y_1) + \mu(y_3 - y_1) \\ z - z_1 = \lambda(z_2 - z_1) + \mu(z_3 - z_1) \end{cases}$$

Rouché tételből következik, hogy az egyenletrendszernek akkor és csakis akkor van megoldása, ha:

$$\boxed{\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0}. \tag{20}$$

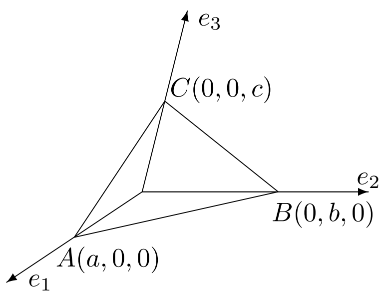
Ezt az egyenletet nevezzük a három nem kollineáris ponton áthaladó **sík algebrai egyenleté**nek. Ez az egyenlet még átírható a következő alakba:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{21}$$

1.4.3. A sík tengelymetszetes egyenlete

Legyenek az $A(a, 0, 0), B(0, b, 0)$ és a $C(0, 0, c)$ pontok a térben. Ekkor a (20) képlet szerint az (ABC) sík egyenlete:

$$\begin{vmatrix} x - a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0.$$



8. ábra.

Kiszámolva a determinánst és átrendezve az egyenletet megkapjuk a **sík tengelymetszetes egyenletét** :

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.} \tag{22}$$

1.4.4. A sík egyenlete, ha ismert egy pontja és normálvektora

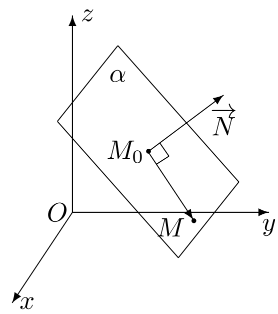
Legyen $\alpha : Ax + By + Cz + D = 0$ egy sík. Ekkor létezik olyan $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \alpha$, amelyre $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$. Kivonva a két egyenlőséget egymásból kapjuk, hogy:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \tag{23}$$

Legyen az $\overrightarrow{N}(A, B, C)$ egy vektor és $M(x, y, z)$ egy tetszőleges pont az α síkban. Ekkor a (23) összefüggés ekvivalens azzal, hogy

$$\overrightarrow{N} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0, \quad \forall M \in \alpha \tag{24}$$

vagyis $\overrightarrow{N} \perp \overrightarrow{M_0M}$, bármely $M \in \alpha$ pont esetén. Ez azt jelenti, hogy az $\vec{N}(A, B, C)$ vektor merőleges az α síkra.



9. ábra.

1.2. Értelmezés. *Az $\overrightarrow{N}(A,B,C)$ vektort az $\alpha : Ax+By+Cz+D=0$* ***sík normálvektorának*** *nevezzük.*

Legyen az $\vec{n} = \dfrac{\overrightarrow{N}}{\| \overrightarrow{N} \|} = \dfrac{A\vec{i}+B\vec{j}+C\vec{k}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ vektor. Az $\vec{n}$ vektort az α **sík normál-egységvektorá**nak nevezzük.

1.2. Tétel. *Az α síkot egyértelműen meghatározza egy $M_0(x_0,y_0,z_0)$ pontja és egy rá merőleges $\overrightarrow{N}(A,B,C)$ irányvektor. Ekkor a sík egyenlete:*

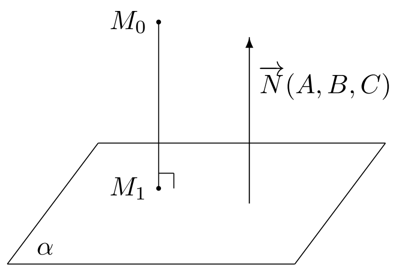
$$\boxed{A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.} \tag{25}$$

Bizonyítás. Legyen α egy sík, $M_0(x_0,y_0,z_0)\in\alpha$ egy pont és $\overrightarrow{N}(A,B,C)$ úgy, hogy $\overrightarrow{N}\perp\alpha$. Ekkor az $\overrightarrow{N}$ vektor merőleges az $\overrightarrow{MM_0}$ vektorra, bármely $M(x,y,z)\in\alpha$ pont esetén, vagyis $\overrightarrow{N}\cdot\overrightarrow{M_0M}=0$, minden $M\in\alpha$ pontra. Felírva ezen vektorokat a komponenseik segítségével és felhasználva a skaláris szorzat kiszámítási képletét, kapjuk az α sík egyenletét: $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$. □

1.5. Pont távolsága síktól

Legyen $\mathcal{R}=\{O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ egy Descartes féle ortonormált koordináta-rendszer, $M_0(x_0,\ y_0,z_0)$ egy pont a térben és $\alpha : Ax+By+Cz+D=0$ egy sík. Legyen $M_1 = pr_\alpha(M_0)$ és $\overrightarrow{N}(A,B,C)$ a sík normálvektora. Ekkor $\overrightarrow{M_0M_1}\perp\alpha$ és $\overrightarrow{M_0M_1}\parallel\overrightarrow{N}$.

Az M_0 **pontnak az α síktól való távolságán** a $d(M_0,\alpha)=||\overrightarrow{M_0M_1}||$ számot értjük.



10. ábra.

I. Módszer. Felírjuk az M_0 ponton áthaladó α síkra merőleges d egyenes egyenletét: $\dfrac{x-x_0}{A}=\dfrac{y-y_0}{B}=\dfrac{z-z_0}{C}$ vagy parametrikus alakban: $\begin{cases} x=x_0+tp \\ y=y_0+tq \\ z=z_0+tr \end{cases}$. Meghatározzuk az M_1 pont koordinátáit, amelyet a d egyenes és az α sík metszeteként kapunk. Az M_1 pont koordinátáit tehát a következő egyenletrendszer adja:

$$\begin{cases} Ax+By+Cz+D=0 \\ x=x_0+tA \\ y=y_0+tB \\ z=z_0+tC \end{cases}$$

Ebből az egyenletrendszerből kapjuk, hogy $t = -\dfrac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{A^2 + B^2 + C^2}$. Legyenek (x_1, y_1, z_1) az M_1 pont koordinátái. Ekkor

$$\begin{cases} x_1 = x_0 - A \cdot \dfrac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{A^2 + B^2 + C^2} \\ y_1 = y_0 - A \cdot \dfrac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{A^2 + B^2 + C^2} \\ z_1 = z_0 - A \cdot \dfrac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{A^2 + B^2 + C^2} \end{cases}$$

Használjuk a következő jelölést: $k = \dfrac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{A^2 + B^2 + C^2}$. Ekkor

$$d(M_0, \alpha) = ||\overrightarrow{M_1M_0}|| = \sqrt{A^2k^2 + B^2k^2 + C^2k^2} = |k|\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Tehát az M_0 pont távolságát az α síktól a következő képlet adja meg:

$$\boxed{d(M_0, \alpha) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.}$$

II. Módszer. Legyen $\vec{n} = \dfrac{\vec{N}}{||\vec{N}||}$ az α sík normál egységvektora. Ekkor $\overrightarrow{M_1M_0}$ párhuzamos a $\vec{n}$ vektorral, tehát közrezárt β szögük mértéke $0°$ vagy $180°$. Így

$$\left|\overrightarrow{M_1M_0} \cdot \vec{n}\right| = \left|||\overrightarrow{M_1M_0}|| \cdot ||\vec{n}|| \cdot \cos\beta\right| = ||\overrightarrow{M_1M_0}|| \tag{26}$$

Behelyettesítve az $\overrightarrow{M_1M_0}(x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$ és

$$\vec{n} = \left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\right)$$

összefüggéseket a fenti skaláris szorzatba, kapjuk, hogy

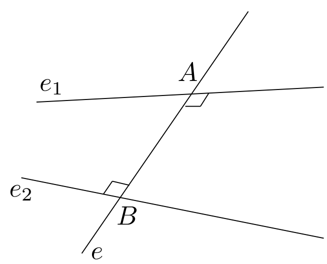
$$||\overrightarrow{M_1M_0}|| = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 - Ax_1 - By_1 - Cz_1|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \tag{27}$$

Tudjuk, hogy az M_1 pont az α síkban van, vagyis koordinátái eleget tesznek a sík egyenletének: $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$, ahonnan $Ax_1 + By_1 + Cz_1 = -D$. Visszahelyettesítve ezt a (27) relációba, kapjuk az M_0 pont α síktól való távolságának képletét. □

1.6. Két kitérő egyenes közös merőlegese és távolsága

1.3. Értelmezés. *Legyen e_1 és e_2 két kitérő egyenes a térben. Az e_1 és e_2* ***kitérő egyenesek közös merőlegesén*** *azt az egyenest értjük, amely merőleges mindkét egyenesre és támaszkodik rájuk.*

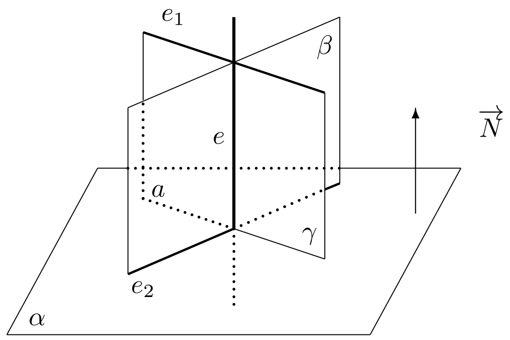
1.4. Értelmezés. *Legyenek az A és B pontok a közös merőleges metszéspontjai az e_1 és az e_2 egyenesekkel. Az $[AB]$ szakasz hosszát a* ***két kitérő egyenes távolságá****nak nevezzük.*



11. ábra. Az e_1, e_2 egyenesek közös merőlegese az AB egyenes

A közös merőleges megszerkesztése

1. Legyen a egy egyenes, amely párhuzamos az e_1 egyenessel és áthalad az e_2 egy tetszőleges M_2 pontján. Legyen az α az a és e_2 egyenesek által meghatározott sík.
2. Legyen β az a sík, amely tartalmazza az e_2 egyenest és merőleges az α síkra.
3. Legyen továbbá γ egy sík, amely tartalmazza az e_1 egyenest és merőleges az α síkra.
4. Ekkor a β és a γ síkok e metszésvonala merőleges lesz az α síkra és ezáltal az e_1, e_2 egyenesekre is. Ráadásul az e támaszkodik is ezekre az egyenesekre, tehát az e egyenes lesz az e_1, e_2 közös merőlegese.



12. ábra. Az e_1, e_2 egyenesek közös e merőlegese.

A közös merőleges egyenlete
Legyen $\mathcal{R} = \{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ egy Descartes féle koordináta-rendszer a térben és legyen

$$e_1 : \frac{x - x_1}{p_1} = \frac{y - y_1}{q_1} = \frac{z - z_1}{r_1}$$

$$e_2 : \frac{x - x_2}{p_2} = \frac{y - y_2}{q_2} = \frac{z - z_2}{r_2}$$

két kitérő egyenes. Az egyenesek egyenletei alapján az $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ pontok rajta vannak az e_1 illetve az e_2 egyeneseken. Ekkor az α sík egyenlete:

$$\alpha : \begin{vmatrix} x - x_2 & y - y_2 & z - z_2 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{28}$$

Ha kifejtjük a fenti determinást akkor az α sík egyenlete a következő alakba írható:

$$\alpha : (x - x_2) \cdot \begin{vmatrix} q_1 & r_1 \\ q_2 & r_2 \end{vmatrix} + (y - y_2) \cdot \begin{vmatrix} r_1 & p_1 \\ r_2 & p_2 \end{vmatrix} + (z - z_2) \cdot \begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Legyen $\overrightarrow{N}$ az α sík normálvektora. Ekkor az $\overrightarrow{N}$ normálvektor irányparaméterei a következők:

$$\overrightarrow{N} \left(\begin{vmatrix} q_1 & r_1 \\ q_2 & r_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} r_1 & p_1 \\ r_2 & p_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix} \right).$$

A β síkot meghatározza az e_2 egyenes, vagyis az M_2 pont és $\vec{d_2}$ vektor, valamint az α sík $\overrightarrow{N}$ normálvektora. Ezért egyenletét a következő képlet adja meg:

$$\beta : \begin{vmatrix} x - x_2 & y - y_2 & z - z_2 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ \begin{vmatrix} q_1 & r_1 \\ q_2 & r_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} r_1 & p_1 \\ r_2 & p_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = 0. \tag{29}$$

A γ síkot meghatározza az M_1 pont és $\vec{d_1}, \overrightarrow{N}$ vektorok. Tehát egyenlete:

$$\gamma : \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ \begin{vmatrix} q_1 & r_1 \\ q_2 & r_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} r_1 & p_1 \\ r_2 & p_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = 0. \tag{30}$$

A közös merőleges egyenletét a β és a γ síkok metszete adja meg, vagyis az (29) és (30) egyenletekből alkotott egyenletrendszer.

1.4. Megjegyzés. A közös merőleges megszerkesztése során tulajdonképpen nincs is szükségünk az α sík egyenletére, csak annak normálvektorára. Ez a normálvektor merőleges az α síkra, tehát merőleges az e_1, e_2 egyenesekre. Tehát a normálvektort felírhatjuk, mint a $\vec{d_1}$ $\vec{d_2}$ vektorok vektori szorzata:

$$\overrightarrow{N} = \vec{d_1} \times \vec{d_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} q_1 & r_1 \\ q_2 & r_2 \end{vmatrix} + \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} r_1 & p_1 \\ r_2 & p_2 \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix} \tag{31}$$

Ezután pedig tekintjük a β síkot, amely tartalmazza az e_2 egyenest és párhuzamos az $\overrightarrow{N}$ vektorral, majd a γ síkot, amely szintén párhuzmos az $\overrightarrow{N}$ vektorral és tartalmazza az e_1 egyenest. Ezen síkok metszete párhuzamos az $\overrightarrow{N}$ vektorral és támaszkodik az e_1, e_2 egyenesekre, tehát az e_1, e_2 közös merőlegese lesz.

A két kitérő egyenes távolsága

Az e_1 és az e_2 egyenesek közötti távolság kiszámításánál vegyük észre, hogy az e_1 egyenes párhuzamos az e_2 egyenest tartalmazó α síkkal, tehát:

$$d(e_1, e_2) = d(e_1, \alpha) = d(M_1, \alpha) = \frac{\left| \begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix} \right|}{\sqrt{\begin{vmatrix} q_1 & r_1 \\ q_2 & r_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} r_1 & p_1 \\ r_2 & p_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix}^2}}.$$

1.7. Két térbeli egyenes szöge

1.5. Értelmezés. ***Két egyenes*** (***hajlás***)***szöge*** *alatt a tér egy tetszőleges pontján át a velük párhuzamosan húzott egyenesek által bezárt hegyesszöget vagy derékszöget értjük.*

Beláthatjuk, hogy ezáltal értelmezett két kitérő egyenes szöge is. Hangsúlyozzuk, hogy kitérő egyenesek lehetnek merőlegesek is egymásra, viszont ha egy pontból egy egyenesre bocsátott merőlegesről beszélünk, akkor az egyenest metsző egyenesre gondolunk. Ehhez a merőlegeshez az adott pont és egyenes síkján belül juthatunk el. Ennek a merőlegesnek a talppontja az adott pontnak az adott egyenesre eső merőleges vetülete.

Legyen $d_1 : \dfrac{x - x_1}{p_1} = \dfrac{y - y_1}{q_1} = \dfrac{z - z_1}{r_1}$ és $d_2 : \dfrac{x - x_2}{p_2} = \dfrac{y - y_2}{q_2} = \dfrac{z - z_2}{r_2}$ két egyenes. Ekkor irányvektoraiknak tekinthetjük a $\vec{d_1}(p_1, q_1, r_1)$ és $\vec{d_2}(p_2, q_2, r_2)$ vektorokat. A d_1 és d_2 egyenesek szöge megegyezik irányvektoraik szögével, ha azok hegyesszöget vagy derékszöget zárnak be (skaláris szorzatuk nem negatív) illetve azok kiegészítő szögével, amennyiben azok tompaszöget zárnak be (skaláris szorzatuk negatív).

Tehát

$$m(\widehat{d_1, d_2}) = \begin{cases} \arccos \dfrac{\vec{d_1} \cdot \vec{d_2}}{||\vec{d_1}|| \cdot ||\vec{d_2}||}, & \text{ha } \vec{d_1} \cdot \vec{d_2} \geq 0 \\ \pi - \arccos \dfrac{\vec{d_1} \cdot \vec{d_2}}{||\vec{d_1}|| \cdot ||\vec{d_2}||}, & \text{ha } \vec{d_1} \cdot \vec{d_2} < 0. \end{cases} \tag{32}$$

Figyelembe véve, hogy $\pi - \arccos x = \arccos(-x)$, minden $x \in [-1, 1]$ esetén, majd a moduluszfüggvény értelmezését, kapjuk két egyenes szögének mértékére az alábbi összefüggést:

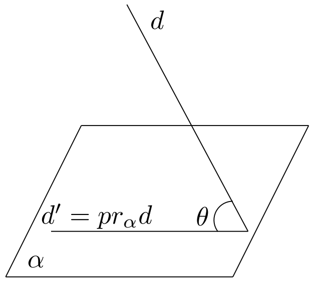
$$\boxed{m(\widehat{d_1, d_2}) = \arccos \frac{|\vec{d_1} \cdot \vec{d_2}|}{||\vec{d_1}|| \cdot ||\vec{d_2}||},} \tag{33}$$

vagy a koordináták segítségével:

$$\boxed{m(\widehat{d_1, d_2}) = \arccos \frac{|p_1 p_2 + q_1 q_2 + r_1 r_2|}{\sqrt{p_1^2 + q_1^2 + r_1^2} \cdot \sqrt{p_2^2 + q_2^2 + r_2^2}}.} \tag{34}$$

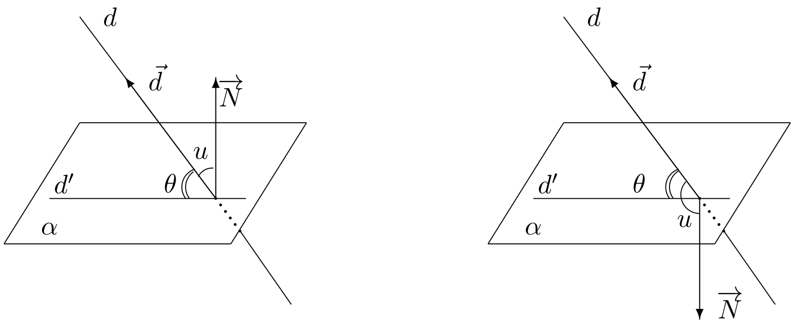
1.8. Egyenes és sík szöge

1.6. Értelmezés. ***Egy egyenes és egy sík szöge*** *alatt az egyenes síkra eső vetülete és az egyenes által bezárt szöget értjük.*



13. ábra. Az α sík és d egyenes által bezárt θ szög

Legyen $\alpha : Ax + By + Cz + D = 0$ egy sík és legyen $d : \dfrac{x - x_0}{p} = \dfrac{y - y_0}{q} = \dfrac{z - z_0}{r}$ egy egyenes. A sík és egyenes által bezárt szöget jelöljük θ-val, az egyenes $\vec{d}(p, q, r)$ irányvektora és a sík $\overrightarrow{N}(A, B, C)$ normálvektora által bezárt szöget pedig u-val. A 14 ábra szemlélteti, hogy e két szög összege vagy különbsége egyenlő 90°-kal, a $\vec{d}$ és $\overrightarrow{N}$ vektorok helyzete alapján.



14. ábra. Egyenes és sík szöge

Tehát

$$m(\widehat{d, \alpha}) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} - m(\widehat{\vec{d}, \overrightarrow{N}}), & \text{ha } \vec{d} \cdot \overrightarrow{N} \geq 0 \\ m(\widehat{\vec{d}, \overrightarrow{N}}) - \dfrac{\pi}{2}, & \text{ha } \vec{d} \cdot \overrightarrow{N} < 0, \end{cases}$$

vagyis figyelembe véve, hogy $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén, következik, hogy

$$\sin(\widehat{d, \alpha}) = \cos(\widehat{\vec{d}, \overrightarrow{N}}) = \frac{Ap + Bq + Cr}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Mivel egyenes és sík szögén 0és 90° közti értéket értünk, a d egyenes és α sík által bezárt szög kiszámítási képlete:

$$\boxed{m(\widehat{d, \alpha}) = \arcsin \frac{|Ap + Bq + Cr|}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.} \tag{35}$$

Sajátos eset. A következő eseteket emeljük ki:
1.) $d \perp \alpha$ egyenértékű azzal, hogy $\vec{d} \parallel \overrightarrow{N}$, vagyis $\dfrac{A}{p} = \dfrac{B}{q} = \dfrac{C}{r}$;
2.) $d \parallel \alpha \Leftrightarrow \vec{d} \perp \overrightarrow{N} \Leftrightarrow \vec{d} \cdot \overrightarrow{N} = 0$, vagyis $Ap + Bq + Cr = 0$;
3.) Ha $d \subset \alpha$, akkor $Ap + Bq + Cr = 0$ és $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$.

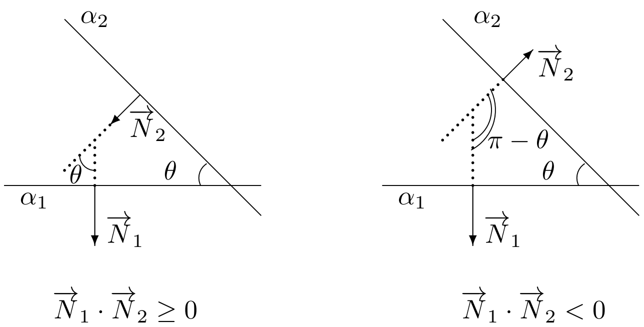
1.9. Két sík szöge

1.7. Értelmezés. *Ha két sík nem párhuzamos, akkor* ***(hajlás)szögüknek*** *a metszésvonal egy pontjában a síkokon belül állított merőlegesek hajlásszögét nevezzük. Párhuzmos síkok hajlásszöge nullszög.*

Legyen

$$\alpha_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad \alpha_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

két sík. A két sík szögét a normálvektoraik által bezárt szög mértékének segítségével írjuk fel. A síkok normálvektorai: $\overrightarrow{N}_1(A_1, B_1, C_1)$, $\overrightarrow{N}_2(A_2, B_2, C_2)$.



15. ábra.

A 15. ábra alapján is láthatjuk, hogy a két sík θ szöge megyezik a normálvektoraik szögével, ha a normálvektorok szöge hegyesszög (a skaláris szorzatuk pozitív), illetve a normálvektorok kiegészítő szögével ellenkező esetben. Tehát

$$m(\widehat{\alpha_1, \alpha_2}) = \begin{cases} \arccos \dfrac{\overrightarrow{N}_1 \cdot \overrightarrow{N}_2}{||\overrightarrow{N}_1|| \cdot ||\overrightarrow{N}_2||}, & \text{ha } \overrightarrow{N}_1 \cdot \overrightarrow{N}_2 \geq 0 \\ \pi - \arccos \dfrac{\overrightarrow{N}_1 \cdot \overrightarrow{N}_2}{||\overrightarrow{N}_1|| \cdot ||\overrightarrow{N}_2||}, & \text{ha } \overrightarrow{N}_1 \cdot \overrightarrow{N}_2 < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \arccos \dfrac{\overrightarrow{N}_1 \cdot \overrightarrow{N}_2}{||\overrightarrow{N}_1|| \cdot ||\overrightarrow{N}_2||}, & \text{ha } \overrightarrow{N}_1 \cdot \overrightarrow{N}_2 \geq 0 \\ \arccos \dfrac{-\overrightarrow{N}_1 \cdot \overrightarrow{N}_2}{||\overrightarrow{N}_1|| \cdot ||\overrightarrow{N}_2||}, & \text{ha } \overrightarrow{N}_1 \cdot \overrightarrow{N}_2 < 0 \end{cases}$$

Figyelembe véve a moduluszfüggvény értelmezését, kapjuk két sík szögére az alábbi összefüggéseket a normálvektorok segítségével

$$\boxed{m(\widehat{\alpha_1, \alpha_2}) = \arccos \frac{|\overrightarrow{N}_1 \cdot \overrightarrow{N}_2|}{||\overrightarrow{N}_1|| \cdot ||\overrightarrow{N}_2||},} \tag{36}$$

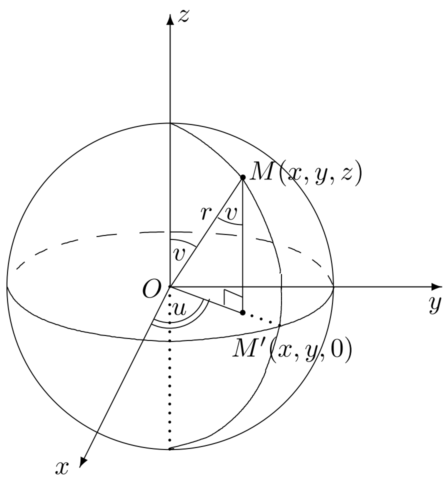
valamint a síkok egyenleteinek együtthatói segítségével felírva:

$$\boxed{m(\widehat{\alpha_1, \alpha_2}) = \arccos \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.} \tag{37}$$

1.5. Megjegyzés. Két sík merőlegességét és párhuzamosságát is vizsgálhatjuk a normálvektoraik segítségével. A síkok párhuamossága (merőlegessége) ekvivalens normálvektoraik párhuzamosságával (merőlegességével). Tehát

$$\boxed{\alpha_1 \perp \alpha_2 \Longleftrightarrow \overrightarrow{N}_1 \perp \overrightarrow{N}_2 \Longleftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.} \tag{38}$$

$$\boxed{\alpha_1 \parallel \alpha_2 \Longleftrightarrow \overrightarrow{N}_1 \parallel \overrightarrow{N}_2 \Longleftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.} \tag{39}$$



16. ábra. Origó középpontú kör

1.10. A gömb

A **gömb** azon térbeli pontok mértani helye, amelyeknek egy rögzített ponttól mért távolságuk egyenlő.

Az $Oxyz$ Descartes-féle koordináta-rendszer origója legyen a gömb középpontja. Legyen $M(x, y, z)$ egy tetszőleges pont a gömbön és ennek vetülete az xOy síkra $M'(x', y', 0)$. Ismerjük a gömb r sugarát.

A paraméterek legyenek:

$$m(\widehat{xOM'}) = u, \quad m(\widehat{zOM'}) = v.$$

Ekkor $|OM'| = r \sin v$ és a gömb paraméteres egyenletei:

$$\boxed{\begin{cases} x = r \sin v \cos u \\ y = r \sin v \sin u, \qquad u \in [0, 2\pi), v \in [0, \pi]. \\ z = r \cos v \end{cases}} \tag{40}$$

Az origó középpontú, r sugarú gömb algebrai egyenlete:

$$\boxed{x^2 + y^2 + z^2 = r^2.} \tag{41}$$

1.6. Megjegyzés. A gömb általános egyenlete:

$$Ax^2 + Ay^2 + Az^2 - 2Bx - 2Cy - 2Dz + E = 0, A \neq 0.$$

2. Analitikus mértan síkban

2.1. Síkbeli egyenesek egyenletei Descartes-féle koordináta rendszerhez viszonyítva

Legyen $R = \{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ egy affin koordináta-rendszer a síkban.

2.1.1. Egy pont és egy vektor által meghatározott egyenes egyenlete

Legyen $A(x_0, y_0)$ egy rögzített pont a síkban és $\vec{d}(p, q)$ pedig egy rögzített vektor.

Ekkor levezethetjük az A ponton áthaladó $\vec{d}$ irányvektorú e egyenes vektoriális egyenletét teljesen hasonlóan, mint a térbeli egyenes esetén és itt is kapjuk az egyenes egyenletének, hogy

$$\boxed{e: \quad \vec{r}_M = \vec{r}_A + \lambda \cdot \vec{d}, \quad \lambda \in \mathbb{R},} \tag{42}$$

ahol $M(x, y)$ egy tetszőleges pont az e egyenesen.

Behelyettesítve az $\vec{r}_M, \vec{r}_A, \vec{d}$ vektorok koordinátáit, kapjuk az e (síkbeli) **egyenes paraméteres egyenleteit**:

$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + \lambda p \\ y = y_0 + \lambda q \quad \lambda \in \mathbb{R}. \end{cases}} \tag{43}$$

Kifejezzük a fenti egyenletrendszer mindkét egyenletéből a λ-t és egyenlővé tésszük egymással. Így jutunk az e (síkbeli) **egyenes kanonikus egyenletéhez**:

$$\boxed{\frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q}} \tag{44}$$

2.1. Megjegyzés. Konvenció szerint, ha az egyik tört nevezője nulla, akkor a számláló is nulla.

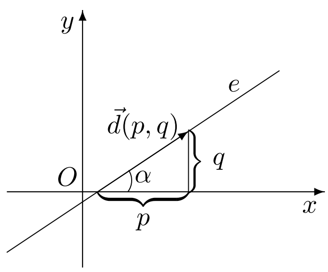
Példa. Ha az e egyenes egyenlete: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-3}{0}$, akkor ez ekvivalens azzal, hogy $e: y - 3 = 0$, vagyis az e párhuzamos az Ox tengellyel.

Ha az e egyenes nem párhuzamos az Oy tengellyel (vagyis $p \neq 0$), akkor az e bármely irányvektora esetén a $\dfrac{q}{p} = m$ arány állandó. Ezt az arányt az e **egyenes iránytényezőjének** nevezzük.

Ha az $\mathcal{R}$ Descartes-féle koordináta-rendszer (vagyis derékszögű), akkor

$$\boxed{m = \operatorname{tg} \alpha,} \tag{45}$$

ahol α az e egyenesnek az Ox tengellyel bezárt szöge.



17. ábra.

Ha a (44) összefüggést beszorozzuk q-val, kapjuk, hogy

$$y - y_0 = \frac{q}{p}(x - x_0). \tag{46}$$

Tehát, az adott $A(x_0, y_0)$ ponton áthaldó és adott m iránytényezőjű egyenes egyenlete

$$\boxed{y - y_0 = m(x - x_0).} \tag{47}$$

2.1.2. Két különböző pont által meghatározott egyenes egyenlete

Legyen $M_1(x_1, y_1)$ és $M_2(x_2, y_2)$ két rögzített pont a síkban. Ekkor az M_1 és M_2 pontokon áthaladó egyenes irányvektora $\overrightarrow{M_1M_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$, tehát az M_1M_2 egyenes kanonikus egyenlete:

$$\boxed{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1},} \tag{48}$$

amelyet még átírhatunk a következő könnyebben megjegyezhető alakba:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{49}$$

2.1.3. Egyenes tengelymetszetes alakja

Ha az egyenes a koordináta-tengelyeket az $A(a, 0)$ és $B(0, b)$ pontokban metszi, akkor egyenlete:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

2.2. Megjegyzés. Az M_1M_2 nem függőleges egyenes iránytényezője:

$$m_{M_1M_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

2.2. Két síkbeli egyenes szöge

I. módszer. Legyen

$$d_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0,$$

$$d_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

két *általános* egyenlettel megadott egyenes az xOy síkban. Ezt az két egyenletet átírva kanonikus alakra: $d_1 : \frac{x}{-b_1} = \frac{y + \frac{c_1}{b_1}}{a_1}$, $d_2 : \frac{x}{-b_2} = \frac{y + \frac{c_2}{b_2}}{a_2}$ kapjuk a két egyenes irányvektorát: $\vec{d_1}(-b_1, a_1)$ illetve $\vec{d_2}(-b_2, a_2)$. Felhasználva a (33) összefüggést, kapjuk, hogy

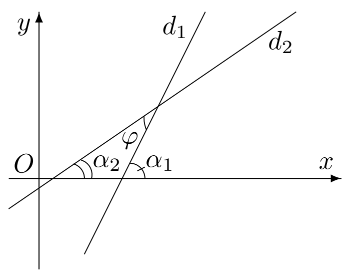
$$\boxed{\cos(\widehat{d_1, d_2}) = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}} \tag{50}$$

II. módszer. Legyen

$$d_1 : y = m_1x + n_1,$$

$$d_2 : y = m_2x + n_2$$

két *explicit* egyenlettel megadott egyenes az xOy síkban. Ekkor $m_1 = \text{tg}\alpha_1$ és $m_2 = \text{tg}\alpha_2$, ahol α_1 és α_2 a két egyenesnek az Ox tengellyel bezárt hajlásszögét jelölik (lásd 18 ábra).



18. ábra. Két egyenes szöge

Belátható, hogy ha φ-vel jelöljük a d_1 és d_2 egyenesek szögét, akkor $\varphi = \alpha_1 - \alpha_2$. Tehát

$$\text{tg}\varphi = \text{tg}(\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{\text{tg}\alpha_1 - \text{tg}\alpha_2}{1 + \text{tg}\alpha_1 \cdot \text{tg}\alpha_2} = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2}. \tag{51}$$

Ha felcseréljük az m_1 és m_2 sorrendjét, akkor a kiegészítő szög mértékét fogjuk megkapni. Mivel két egyenes szögén mindig a hegyesszöget értjük és tudjuk, hogy ennek tangense pozitív, a két síkbeli egyenes szögére levezetett összefüggést a következő alakban használjuk:

$$\boxed{\operatorname{tg}(\widehat{d_1, d_2}) = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2} \right|.} \tag{52}$$

2.3. Párhuzamos és merőleges egyenesek

2.3.1. Párhuzamos egyenesek

Két párhuzamos egyenes iránya megegyezik és ezáltal iránytényezőjük is egyenlő, vagyis:

$$\boxed{d_1 || d_2 \Leftrightarrow m_1 = m_2.} \tag{53}$$

2.3. Megjegyzés. *A fenti összefüggés onnan is következik, hogy Két egyenes akkor és csakis akkor párhuzamos, ha bezárt szögük 0, ami ekvivalens azzal a (52) összefüggés alapján, hogy iránytényezőik megegyeznek.*

2.3.2. Merőleges egyenesek

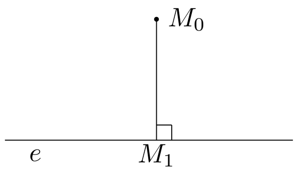
2.4. Megjegyzés. Legyen d_1, d_2 két egymásra merőleges egyenes. Ekkor irányvektoraik $\vec{d_1}(p_1, q_1)$ és $\vec{d_2}(p_2, q_2)$ szintén merőlegesek egymásra, ezért skaláris szorzatuk nulla. Tehát $p_1p_2 + q_1q_2 = 0$. Feltételezve, hogy egyik egyenes sem párhuzamos az Oy tengellyel, végigoszthajtuk ezt az egyenletet p_1p_2-vel és felhasználva az iránytényező értelmezését, kapjuk, hogy

$$\boxed{d_1 \perp d_2 \Longleftrightarrow m_1 \cdot m_2 = -1.} \tag{54}$$

2.5. Megjegyzés. 1. A (54) összefüggés másként is levezethető. Ay (52) összefüggés jobboldalának nincs értelme abban az esetben, ha $m_1 \cdot m_2 = -1$. Ez azt jelenti, hogy értelmetlen a $\operatorname{tg}(\widehat{d_1, d_2})$, vagyis a d_1 és d_2 egyenesek szöge $90°$.

2.4. Pont távolsága egyenestől (síkban)

Legyen $e : ax + by + c = 0$ egy egyenes az xOy síkban és $M_0(x_0, y_0)$ egy pont a síkban. Az M_0 **pont távolságán az** e **egyenestől** az $[M_0M_1]$ szakasz hosszát értjük, ahol M_1 az M_0 pont e egyenesre eső vetülete.



19. ábra. Az M_0 pont távolsága az e egyenestől: $|M_0M_1|$.

Felírjuk az M_0 ponton áthaladó és az e egyenesre merőleges M_0M_1 egyenes egyenletét:

$$M_0M_1 : y - y_0 = \frac{-1}{m_e}(x - x_0),$$

ahol $m_e = -\dfrac{a}{b}$ az e egyenes iránytényezője. Az M_1 pont (x_1, y_1) koordinátáit megkapjuk az e és M_0M_1 egyenesek egyenleteiből alkotott

$$\begin{cases} b(x - x_0) = a(y - y_0) \\ ax + by + cz = 0 \end{cases}$$

egyenletrendszer megoldásaként:

$$\begin{cases} x_1 = x_0 - a\dfrac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2} \\ y_1 = y_0 - b\dfrac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2}. \end{cases}$$

Kiszámítva a $[M_0M_1]$ szakasz hosszát, kapjuk, az M_0 pont távolságát az e egyenestől:

$$\boxed{d(M_0, e) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.} \tag{55}$$

Alkalmazás. Szögfelezők egyenletei (síkban).

Legyen $d_1 : a_1x + b_1y + c_1z = 0$, $d_2 : a_2x + b_2y + c_2z = 0$ két metsző egyenes a síkban. Célunk meghatározni a két egyenes által alkotott szög (belső és külső) szögfelezőinek egyenleteit.

Tudjuk, hogy a szögfelező azon pontok mértani helye, amelyeknek távolsága a szög két szárától megegyezik. Legyen $M(x, y)$ egy tetszőleges pont a síkban. Ez a pont akkor és csakis akkor lesz a d_1 és d_2 egyenesek szögfelezőjén, ha $d(M, d_1) = d(M, d_2)$, vagyis

$$\frac{|a_1x + b_1y + c_1|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \frac{|a_2x + b_2y + c_2|}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}.$$

Így a két szögfelező egyenlete:

$$\boxed{\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm\frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}.} \tag{56}$$

2.5. Kúpszeletek

2.5.1. Kör

Legyen M_0 egy rögzített pont a $\mathcal{P}$ síkban és legyen $r > 0$ egy rögzített szám.

2.1. Értelmezés. *Az M_0 középpontú és r sugarú $\mathcal{C}$ **kör** azon M pontok mértani helye a síkból, amelyeknek az M_0 ponttól vett távolsága állandó és egyenlő r-rel, vagyis*

$$\mathcal{C}(M_0, r) = \{M \in \mathcal{P} : |MM_0| = r.\} \tag{57}$$

Legyen xOy egy Descartes-féle koordináta-rendszer.

2.1. Tétel. *Az $M(x, y)$ pont akkor és csakis akkor van az $M_0(x_0, y_0)$ középpontú, r sugarú körön, ha*

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2. \tag{58}$$

Bizonyítás. Az M pont akkor és csakis akkor van az M_0 középpontú r sugarú körön, ha $|MM_0| = r$, vagyis

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = r \quad \Leftrightarrow \quad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

$\square$

Tehát az $M_0(x_0, y_0)$ középpontú, r sugarú **kör implicit egyenlete**:

$$\boxed{\mathcal{C} : \ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.}$$

2.2. Tétel. *Az $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = r^2$ egyenletű kör $M_1(x_1, y_1)$ pontjában szerkesztett **érintő egyenlete**:*

$$\boxed{(x - x_0)(x_1 - x_0) + (y - y_0)(y_1 - y_0) = r^2,} \tag{59}$$

*amelyet még a kör **duplázott egyenleté**nek is nevezünk az $M_1(x_1, y_1)$ pontban.*

Bizonyítás. Tudjuk, hogy a kör M_1 pontjába szerkesztett érintő merőleges az M_1 ponton áthaladó átmérőre. Felírjuk először az átmérő egyenletét:

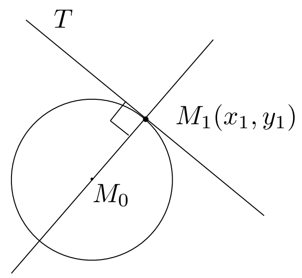
$$M_1M_0 : \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_0 - y_1}$$

majd az erre merőleges (érintő) egyenletét, felhasználva, hogy

$$m_{\text{érintő}} = -\frac{1}{m_{M_1M_0}} = -\frac{x_0 - x_1}{y_0 - y_1}.$$

Tehát az érintő egyenlete:

$$y - y_1 = -\frac{x_0 - x_1}{y_0 - y_1} \cdot (x - x_1). \Leftrightarrow$$



20. ábra. Kör érintője és normálisa.

$$(-x_0 + x_1)(x - x_1) - (y_0 - y_1)(y - y_1) = 0 \tag{60}$$

Mivel az M_1 pont rajta van a $\mathcal{C}$ körön, kielégíti annak egyenletét:

$$(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 = r^2. \tag{61}$$

Összeadva a (60) és (61) egyenleteket kapjuk, hogy

$$(y - y_0)(y_1 - y_0) + (x - x_0)(x_1 - x_0) = r^2. \tag{62}$$

$\square$

2.2. Értelmezés. *A kör M_1 pontjába szerkesztett* ***normális****án azt az egyenest értjük, amely áthalad az M_1 ponton és merőleges az M_1 pontba szerkesztett körérintőre.*

Kör esetén egy M_1 pontba szerkesztett normális megegyezik az M_1 ponton áthaladó átmérővel. Tehát egyenlete:

$$M_1M_0 : \boxed{\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_0 - y_1}}$$

2.6. Megjegyzés. Kör érintőjének egyenletét meghatározhatjuk felhasználva az analízisből jólismert eredményt is: Legyen $f : I \to \mathbb{R}$ egy deriválható függvény, $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum. A függvény grafikus képéhez az $M(x_1, f(x_1) = y_1)$ pontban szerkesztett érintő egyenlete:

$$\boxed{y - y_1 = f'(x_1)(x - x_1).}$$

Kör esetén: $y = f(x) = y_0 \pm \sqrt{r^2 - (x - x_0)^2}$, ahol az előjelet pozitívnak választjuk, ha M pont a kör felső körívén található és negatívnak ellenkező esetben.

2.5.2. Ellipszis

2.3. Értelmezés. *Azon pontok mértani helyét a síkból, amelyeknek két rögzített ponttól mért távolságuk összege állandó,* ***ellipszis****nek nevezzük.*

Legyen $c > 0$ és F, F' két rögzített pont a síkban úgy, hogy $|FF'| = 2c$ és legyen $a > c$. A sík azon M pontjainak mértani helyét, amelyre $|MF| + |MF'| = 2a$, ellipszisnek nevezzük:

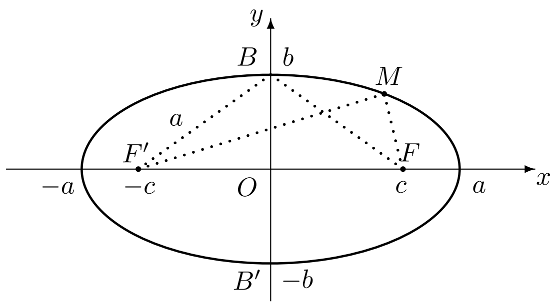
$$\mathcal{E} = \{M \in \mathcal{P} : |MF| + |MF'| = 2a\}.$$

További elnevezések:

1. F, F' : az **ellipszis fókuszai**
2. FF' egyenes: **fokális tengely**
3. $|FF'| = 2c$: **fókusztávolság**
4. $[MF']$ és $[MF]$ szakaszok: M ponthoz tartozó **vezérsugarak**.

2.7. Megjegyzés. Ha $c = 0$, akkor az ellipszis egy a sugarú kör lesz.

Legyen $\mathcal{E}$ egy adott ellipszis. Választunk egy xOy Descartes-féle koordináta-rendszert úgy, hogy az O pont legyen az $[FF']$ szakasz felezőpontja, az Ox tengely legyen a fokális tengely. Ekkor $F'(-c, 0)$ és $F(0, c)$.



21. ábra. Ellipszis.

2.3. Tétel. *Az $M(x, y)$ pont akkor és csakis akkor van az $\mathcal{E}$ ellipszisen, ha*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ ahol } b^2 = a^2 - c^2.$$

Bizonyítás. Az M pont rajta van az $\mathcal{E}$ ellipszisen, ha $|MF| + |MF'| = 2a$. Ekkor

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a. \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow \quad & (x+c)^2 + y^2 = (x-c)^2 + y^2 + 4a^2 - 2 \cdot 2a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\
\Leftrightarrow \quad & 4xc - 4a^2 = -4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\
\Leftrightarrow \quad & x^2c^2 - 2xca^2 + a^4 = a^2x^2 - 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2 \\
& x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).
\end{aligned}$$

Bevezetjük az $a^2 - c^2 = b^2$ jelölést és végigosztva az előbbi egyenletet a^2b^2-tel kapjuk az **ellipszis kanonikus egyenletét:**

$$\boxed{\mathcal{E} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.} \tag{63}$$

□

2.8. Megjegyzés. A $B(0, b = \sqrt{a^2 - c^2})$ és a $B'(0, -b = -\sqrt{a^2 - c^2})$ pontok rajta vannak az ellipszisen, mégpedig az ellipszis metszéspontját jelölik az Oy tengely-lyel. Valóban, a BOF és BOF' kongruens háromszögekben alkalmazva a Pithagorász tételét kapjuk, hogy $a^2 + b^2 = c^2$.

2.9. Megjegyzés. Ha jelöljük A, A' és B, B'-tel a (63) egyenlettel megadott ellipszis metszeteit az Ox illetve Oy tengelyekkel és $a > b$, akkor még használjuk a következő kifejezéseket:

1. az $[AA']$ szakasz az ellipszis **nagytengelye**;
2. a $[BB']$ szakasz az ellipszis **kistengelye**;
3. az $A(a, 0), A'(-a, 0), B(0, b), B'(-b, 0)$ pontok: az ellipszis **csúcsai**.

2.10. Megjegyzés. Az ellipszis kanonikus egyenletében az x és y változók a második hatványon szerepelnek, ezért egy $M(x, y)$ ponttal együtt az ellipszisen vannak az $M_1(-x, -y)$, $M_2(-x, y)$, $M_3(x, -y)$ pontok is. Tehát az Ox és Oy tengelyek szimmetriatengelyei az ellipszisnek, az O pont pedig szimmetriaközéppontja.

2.4. Tétel. *Az $\mathcal{E} : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ egyenletű ellipszis $M_0(x_0, y_0)$ pontjába szerkesztett* **érintő egyenlete***:*

$$\boxed{\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1,}$$

amelyet még az ellipszis ***duplázott egyenleté****nek is nevezünk az M_0 pontban.*

Bizonyítás. Az ellipszis érintőjének meghatározására a 2.6 Megjegyzést használjuk fel. Az f függvény felírása érdekében az ellipszis egyenletéből kifejezzük az y-t:

$$y = \pm b \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Tételezzük fel, hogy az M_0 pont az ellipszis "felső" ívén van, vagyis $y_0 \geq 0$ (ellenkező esetben teljesen hasonlóan járunk el). Ekkor az f függvényt is ennek megfelelően választjuk:

$$y = f(x) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Az érintő egyenlete:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow$$

$$y - y_0 = -\frac{b}{a} \cdot \frac{x_0}{\sqrt{a^2 - x_0^2}}(x - x_0). \tag{64}$$

Mivel az $M_0(x_0, y_0) \in \mathcal{E}$, következik, hogy $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$, vagyis $y_0^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x_0^2)$. Feltételeztük, hogy $y_0 \geq 0$, tehát $\sqrt{a^2 - x_0^2} = \frac{a}{b} \cdot y_0$. Visszahelyettesítve ezt a (64) összefüggésbe írhatjuk, hogy

$$y - y_0 = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_0}{y_0}(x - x_0).$$

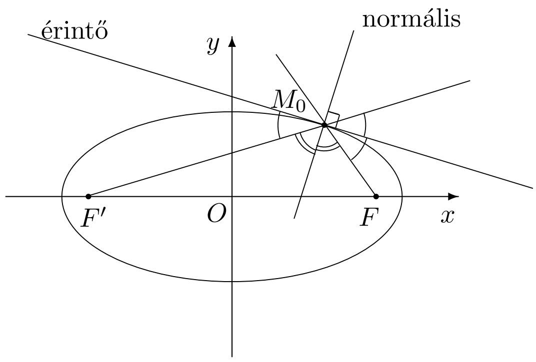
Beszorozva ezt az egyenletet $\frac{y_0}{b^2}$-tel, kapjuk, hogy

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{x_0^2}{a^2} = 1.$$

Tehát az érintő egyenlete: $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1.$ □

2.4. Értelmezés. *Az ellipszis M_0 pontba szerkesztett* ***normálisa*** *az az egyenes, amelyik áthalad az M_0 ponton és merőleges az ellipszis M_0 pontjában szerkesztett érintőre.*

2.5. Tétel. (***Az ellipszis optikai tulajdonsága***) *Az ellipszis M_0 pontjába szerkesztett érintő és normális felezik az FM_0 és $F'M_0$ vezéregyenesek által meghatározott szögeket.*



22. ábra. Ellipszis optikai tulajdonsága.

Bizonyítás. Úgy szerkesztjük meg a koordináta-rendszert, hogy az ellipszis egyenlete legyen $\mathcal{E} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, ahol $b^2 = a^2 - c^2$ és a fókuszok $F'(-c, 0); F(c, 0)$. Legyen $M_0(x_0, y_0) \in \mathcal{E}$ egy tetszőleges pont. Felírjuk az FM_0 és $F'M_0$ vezéregyenesek egyenleteit:

$$FM_0 : \frac{x - x_0}{c - x_0} = \frac{y - y_0}{-y_0} \quad \Leftrightarrow FM_0 : -y_0x + (x_0 - c)y + cy_0 = 0; \tag{65}$$

$$F'M_0 : \frac{x - x_0}{-c - x_0} = \frac{y - y_0}{-y_0} \quad \Leftrightarrow \quad F'M_0 : y_0x - (x_0 + c)y + cy_0 = 0. \tag{66}$$

FM és $F'M$ egyenesek által bezárt szögek szögfelezői (a 56 egyenlet alapján):

$$\frac{-y_0x + (x_0 - c)y + cy_0}{\sqrt{y_0^2 + (x_0 - c)^2}} = \pm\frac{y_0x - (x_0 + c)y + cy_0}{\sqrt{y_0^2 + (x_0 + c)^2}} \tag{67}$$

Kiszámítjuk a gyökjel alatti kifejezéseket:

$$y_0^2 + (x_0 - c)^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x_0^2) + (x_0 - c)^2 =$$

$$= \frac{a^2 - c^2}{a^2}(a^2 - x_0^2) + x_0^2 - 2x_0c + c^2 = \frac{(a^2 - cx_0)^2}{a^2}.$$

Mivel $x_0 \in [-a, a]$ és $0 < c < a$, következik, hogy $a^2 - cx_0 \geq 0$. Tehát

$$\sqrt{y_0^2 + (x_0 - c)^2} = \frac{a^2 - cx_0}{a}. \tag{68}$$

Hasonló számítások után kapjuk, hogy

$$\sqrt{y_0^2 + (x_0 + c)^2} = \frac{a^2 + cx_0}{a}. \tag{69}$$

Ekkor a (67), (68), (69) összefüggések alapján az $\widehat{FM_0F'}$ szög szögfelezőinek egyenletei:

$$\frac{-y_0x + (x_0 - c)y + cy_0}{a^2 - cx_0} = \pm\frac{y_0x - (x_0 + c)y + cy_0}{a^2 + cx_0}.$$

Két esetünk van, aszerint, hogy az egyenlőség jobboldalán melyik előjelet választjuk. Válasszuk például a "+" előjelet! Ekkor elvégezve a műveleteket és alkalmazva a $c^2 = a^2 - b^2$ összefüggést, kapjuk az alábbi egyenletet:

$$-a^2y_0x + a^2x_0y - a^2cy + a^2cy_0 - cx_0y_0x + cx_0^2y - c^2x_0y + c^2x_0y_0 =$$

$$= a^2y_0x - a^2x_0y - a^2cy + a^2cy_0 - cx_0y_0x + cx_0^2y + c^2x_0y - c^2x_0y_0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -a^2y_0x + b^2yx_0 + (a^2 - b^2)x_0y_0 = 0.$$

Átrendezve ezt az egyenletet észrevehetjük, hogy ez épp az M_0 pontba szerkesztett normális egyenlete. Így a másik szögfelező (a "$-$" előjeles) az M_0 pontba szerkesztett érintő lesz (mert a belső és külső szögfelezők merőlegesek egymásra az M_0 pontban, akárcsak az érintő és normális). $\square$

2.11. Megjegyzés. A tételben kijelentett mértani tulajdonságok az alábbi optikai tulajdonságnak felel meg: az ellipszis egyik fókuszában elhelyezett fényforrásból kiinduló tetszőleges fénysugár az ellipszisről való visszaverődés után a másik fókuszon fog átmenni.

2.5.3. Hiperbola

2.5. Értelmezés. *A **hiperbola** azon pontok mértani helye, amelyeknek két rögzített ponttól vett távolságuk különbsége állandó.*

Legyen $c > 0$, F, F' két rögzített pont a síkban úgy, hogy $|FF'| = 2c$ és legyen $a \in (0, c)$. A sík azon M pontjainak $\mathcal{H}$ halmazát, amelyre $||MF'| - |MF|| = 2a$ hiperbolának nevezzük:

$$\mathcal{H} = \{M \in \mathcal{P} \mid \, ||MF'| - |MF|\,| = 2a\}.$$

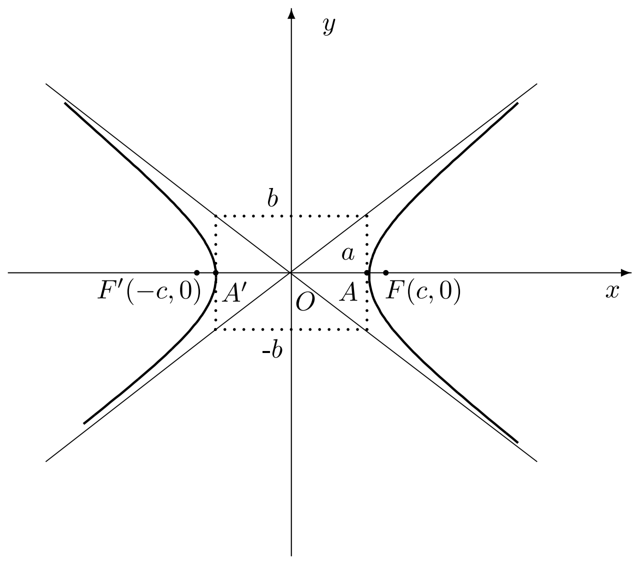
További elnevezések:
1. F, F': a hiperbola **fókuszai**
2. FF': **fokális tengely**
3. $|FF'| = 2c$: **fókusztávolság**
4. $[MF], [MF']$ szakaszok: az M ponthoz tartozó **vezérsugarak**.

Legyen xOy egy Descartes-féle koordináta-rendszer, amelynek origója legyen az $[FF']$ szakasz felezőpontja, Ox tengelye pedig a fokális tengely. Ekkor a fókuszok koordinátái: $F(c, 0), F'(-c, 0)$.

2.6. Tétel. *A $M(x, y)$ pont akkor és csakis akkor tartozik hozzá a $\mathcal{H}$ hiperbolához, ha*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

ahol $b^2 = c^2 - a^2$.



23. ábra. Hiperbola

Bizonyítás. A hiperbola értelmezése szerint az M pont akkor van a $\mathcal{H}$ hiperbolán, ha $\left|\,|MF'|-|MF|\,\right| = 2a$, vagyis

$$|MF'| - |MF| = \pm 2a \Leftrightarrow \quad \sqrt{(x-c)^2+y^2} + \sqrt{(x+c)^2+y^2} = \pm 2a.$$

Négyzetreemelve mindkét oldalt kapjuk, hogy

$$(x-c)^2 + y^2 = 4a^2 + (x+c)^2 + y^2 \pm 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2} \Leftrightarrow$$
$$-4xc - 4a^2 = \pm 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}.$$

Újra négyzetre emelést alkalmazva és átrendezve az egyenletet következik, hogy

$$x^2(c^2-a^2) - a^2y^2 + a^2(a^2-c^2) = 0.$$

Bevezetve a $b^2 = c^2 - a^2$ jelölést és elosztva az egyenletet a^2b^2-tel, megkapjuk a hiperbola **kanonikus egyenletét**: □

$$\mathcal{H} : \boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1} \tag{70}$$

2.12. Megjegyzés. A hiperbola egyenletéből adódik, hogy a hiperbolának két szimmetriatengelye van; az egyik a fókuszokat összekötő egyenes, ezt a hiperbola **hiperbola valós tengelyé**nek nevezzük; a másik fókuszokat összekötő szakasz felezőmerőlegese, melyet a hiperbola **képzetes tengelyé**nek nevezünk. A két tengely O metszépontja a hiperbola szimmetria-középpontja, amit a hiperbola középpontjának is mondunk.

2.13. Megjegyzés. Belátható, hogy az $A(a,0)$ és $A'(-a,0)$ pontok rajta vannak a hiperbolán, mégpedig ott, ahol az Ox tengely metszi a hiperbolát. Ezeket a pontokat a **hiperbola csúcspontjai**nak nevezzük. Az a, b számok a hiperbola valós és képzetes féltengelyei.

2.7. Tétel. *Az* $\mathcal{H} : \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ *egyenletű parabolának a van két* ***ferde aszimptotája*** *a* $\pm\infty$*-ben, melynek egyenletei:*

$$\boxed{y = \pm\frac{b}{a}x.} \tag{71}$$

Bizonyítás. Kifejezzük a hiperbola egyenletéből a y-t és legyen

$$f(x) = y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}.$$

Köztudott, hogy a ferde aszimptota egyenlete $\pm\infty$-ben: $y = mx + n$, ahol $m = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ és $n = \lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x) - mx)$. A mi esetünkben kiszámolva ezeket a határértékeket kapjuk, hogy $m = \pm\dfrac{b}{a}$ és $n = 0$. □

2.8. Tétel. *A* $\mathcal{H} : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ *egyenlettel megadott hiperbola* $M_0(x_0, y_0)$ *pontjában szerkesztett* ***érintő egyenlete:***

$$\boxed{\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1.} \tag{72}$$

Ezt az egyenletet még a hiperbola ***duplázott egyenletének*** *is nevezzük az* M_0 *pontban.*

Bizonyítás. A 2.6 Megjegyzés alapján a hiperbola érintője az $M_0(x_0, y_0)$ pontban : $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$, ahol $f(x) = y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$. Az f függvény előjelét azonosnak választjuk az y_0 előjelével.

Feltételezve, hogy $y_0 \geq 0$ az érintő egyenlete:

$$y - y_0 = \frac{b}{a} \cdot \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 - a^2}} \cdot (x - x_0). \tag{73}$$

(Ha $y_0 < 0$, teljesen hasonló számítások után ugyanahhoz az egyenlethez jutunk.) Mivel az $M_0(x_0, y_0) \in \mathcal{H}$, következik, hogy $\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1$, vagyis $y_0^2 = \frac{b^2}{a^2}(x_0^2 - a^2)$. Feltételeztük, hogy $y_0 \geq 0$, tehát $\sqrt{x_0^2 - a^2} = \frac{a}{b} \cdot y_0$. Visszahelyettesítve ezt a (73) összefüggésbe írhatjuk, hogy

$$y - y_0 = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_0}{y_0}(x - x_0).$$

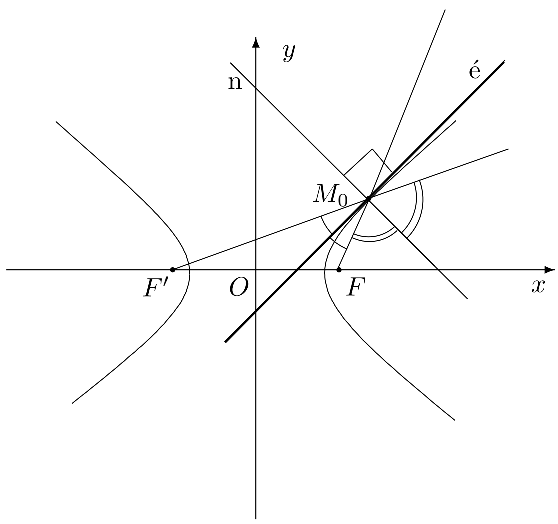
Beszorozva ezt az egyenletet $\frac{y_0}{b^2}$-tel, kapjuk, hogy

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = \frac{y_0^2}{b^2} - \frac{x_0^2}{a^2} = 1.$$

Tehát az érintő egyenlete: $\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1.$ □

2.6. Értelmezés. *Azt az egyenest, amelyik átmegy az* M_0 *ponton és merőleges az* M_0 *pontba szerkesztett érintőre, a hiperbola* M_0 *pontjába szerkesztett* ***normálisnak*** *nevezzük.*

2.9. Tétel. (***A hiperbola optikai tulajdonsága***) *A hiperbola* M_0 *pontjába szerkesztett érintő és normális az* FM_0 *és* $F'M_0$ *vezéregyenesek által meghatározott szögek szögfelezői.*



24. ábra. A hiperbola optikai tulajdonsága

Bizonyítás. Úgy szerkesztjük meg a koordináta-rendszert, hogy a $\mathcal{H}$ hiperbola egyenlete legyen $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, ahol $b^2 = c^2 - a^2$ és a fókuszok $F'(-c, 0); F(c, 0)$. Legyen $M_0(x_0, y_0) \in \mathcal{H}$ egy tetszőleges pont. Felírjuk az FM_0 és $F'M_0$ vezéregyenesek egyenleteit:

$$FM_0 : y_0x - (x_0 - c)y - cy_0 = 0; \tag{74}$$

$$F'M_0 : y_0x - (x_0+c)y + cy_0 = 0. \tag{75}$$

FM és $F'M$ egyenesek által bezárt szögek szögfelezői

$$\frac{y_0x - (x_0+c)y + cy_0}{\sqrt{y_0^2 + (x_0+c)^2}} = \pm \frac{y_0x - (x_0-c)y - cy_0}{\sqrt{y_0^2 + (x_0-c)^2}}. \tag{76}$$

Kiszámoljuk a gyökjel alatti kifejezéseket:

$$\begin{aligned} y_0^2 + (x_0+c)^2 &= b^2(-1 + \frac{x_0^2}{a^2}) + x_0^2 + 2x_0c + c^2 = \\ &= (\frac{b^2}{a^2} + 1)x_0^2 + 2x_0c + c^2 - b^2 = \\ &= \frac{(b^2+a^2)x_0^2}{a^2} + 2x_0c + a^2 = \\ &= \frac{1}{a^2}(c^2x_0^2 + 2x_0ca^2 + a^4) = \frac{1}{a^2}(cx_0 + a^2)^2. \end{aligned}$$

Hasonló gondolatmenet alapján $y_0^2 + (x_0-c)^2 = \dfrac{1}{a^2}(a^2 - cx_0)^2$.

Ekkor a szögfelezők egyenletei:

$$\frac{y_0x - (x_0+c)y + cy_0}{a^2 + cx_0} = \pm \frac{y_0x - (x_0-c)y - cy_0}{a^2 - cx_0}.$$

Ha a "$-$" előjeles egyenletet választjuk először, akkor az aránypárok tulajdonsága alapján írhatjuk, hogy

$$\begin{gathered} a^2y_0x - a^2x_0y - a^2cy + a^2y_0c - cx_0y_0x + cx_0^2y + c^2x_0y - c^2x_0y_0 = \\ = -a^2y_0x + a^2x_0y - a^2cy + a^2cy_0 - cx_0y_0x + cx_0^2y - c^2x_0y + c^2x_0y_0 \Leftrightarrow \\ a^2y_0x - a^2x_0y + c^2x_0y - c^2x_0y_0 = 0 \Leftrightarrow \\ a^2y_0x + b^2x_0y - (a^2+b^2)x_0y_0 = 0. \end{gathered}$$

Tehát az egyik szögfelező egybeesik a normálissal (lásd (**??**) egyenletet), ami maga után vonja, hogy a másik szögfelező egybeesik az érintővel. □

2.5.4. Parabola

2.7. Értelmezés. *Azon pontok mértani helyét a síkból, amelyeknek egy rögzített ponttól és egy rögzített egyenestől mért távolságuk egyenlő* ***parabolá****nak nevezzük.*

Legyen $h \subset \mathcal{P}$ egy egyenes és $F \notin h$ egy pont.

2.8. Értelmezés. *A sík azon M pontjainak $\mathcal{P}_p$ halmazát, amelyekre*

$$d(M,h) = |MF|$$

parabolának nevezzük:

$$\mathcal{P}_p = \{M \in \mathcal{P} : d(M,h) = |MF|.\}$$

További elnevezések:

1. az F pont: a parabola **fókusza** vagy **gyújtópontja**;
2. a h egyenes: a parabola **vezéregyenese**;
3. az $[MF]$ szakasz: **vezérsugár**.

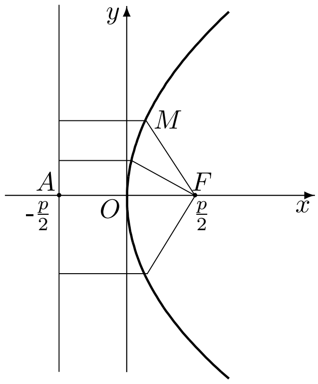
Választunk egy Descartes-féle koordináta-rendszert, úgy, hogy az O pont legyen az $[AF]$ szakasz felezőpontja, ahol az A pont a fókusz h egyenesre eső vetülete és az Ox tengely pedig legyen az h-ra merőleges AF egyenes.

Jelölje $p = |AF|$ a fókusz és vezéregyenes közti $|AF|$ távolságot. Ezt a számot **a parabola paraméteré**nek nevezzük.

Ekkor $F\left(\dfrac{p}{2},\ 0\right)$ és $A\left(-\dfrac{p}{2},\ 0\right)$. A h vezéregyenes egyenlete: $x = -\dfrac{p}{2}$.

2.10. Tétel. *Az $M(x,y)$ pont akkor és csakis akkor tartozik hozzá a $\mathcal{P}_p$ parabolához, ha*

$$\boxed{y^2 = 2px.} \tag{77}$$



25. ábra. Az $y^2 = 2px$ egyenlettel megadott parabola.

Bizonyítás. Az M pont akkor és csakis akkor van rajta a $\mathcal{P}_p$ parabolán, ha

$$d(M,h) = |MF| \Leftrightarrow d^2(M,h) = MF^2 \Leftrightarrow \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2px = y^2.$$

Tehát a **parabola kanonikus egyenlete**:

$$y^2 = 2px.$$

2.14. Megjegyzés. A parabola egyenlete alapján egy $M(x, y)$ ponttal együtt az $M_1(x, -y)$ pont is a parabolán van. Tehát az Ox tengely szimmetriatengelye a parabolának.

2.11. Tétel. *Az $y^2 = 2px$ egyenlettel megadott parabola $M_0(x_0, y_0)$ pontjába szerkesztett **érintőjének egyenlete***

$$\boxed{yy_0 = p(x + x_0),} \tag{78}$$

*amelyet még a parabola **duplázott egyenlet**ének is nevezünk az M_0 pontban.*

Bizonyítás. A 2.6 Megjegyzés szerint a parabola M_0 pontjába szerkesztett érintőjének egyenlete $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$, ahol $f(x) = y = \pm\sqrt{2px}$, ahol az f függvény előjelét azonosnak választjuk az M_0 pont y_0 ordinátájának előjelével.

Tételezzük fel, hogy az M_0 pont a parabola "felső" ívén van, vagyis $y_0 \geq 0$. Ekkor még felhasználva, hogy $y_0^2 = 2px_0$ (mert $M_0 \in \mathcal{P}$) kapjuk az érintő egyenletét:

$$y - y_0 = \frac{p}{\sqrt{2px_0}}(x - x_0) \Leftrightarrow y - y_0 = \frac{p}{y_0}(x - x_0) \Leftrightarrow yy_0 = px + \underbrace{y_0^2 - px_0}_{px_0}.$$

2.9. Értelmezés. *Azt az egyenest, amelyik átmegy az M_0 ponton és merőleges a parabola M_0 pontba szerkesztett érintőjére, a parabola M_0 pontjába szerkesztett **normálisá**nak nevezzük.*

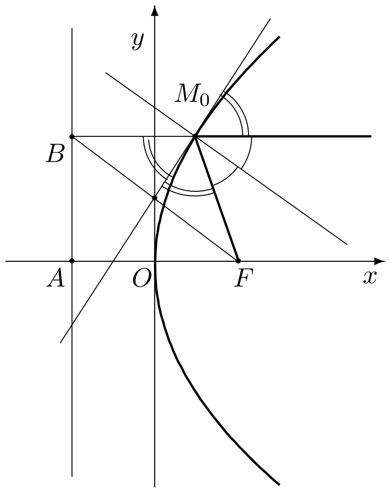
2.12. Tétel. (***A parabola optikai tulajdonsága***) *A parabola tengelyével párhuzamos fénysugarak a paraboláról visszaverődve a fókuszban futnak össze vagy fordítva a parabola fókuszából kiinduló fénysugarakat a parabola a tengelyével párhuzamosan veri vissza.*

Az optikai tulajdonság matematikai megfogalmazása: a parabola egy M_0 pontjához tartozó érintő és normális felezi az M_0F egyenes és az M_0 ponton át a parabola tengelyével húzott párhuzamos egyenes által bezárt szöget.

Bizonyítás. Legyen $y^2 = 2px$ a parabola egyenlete. Ekkor a h egyenes egyenlete: $x = -\dfrac{p}{2}$ és a fókusz koordinátái $F\left(\dfrac{p}{2}, 0\right)$. Feltételezzük, hogy az M_0 pont koordinátái $M_0(x_0, y_0)$. Legyen B az M_0 pont vetülete a vezéregyenesre: $B\left(-\dfrac{p}{2}, y_0\right)$

Könnyen belátható, hogy a tétel kijelentése egyenértékű az alábbi állításokkal:

1. a parabola érintője az M_0 pontban a $[BF]$ szakasz felezőmerőlegese;
2. a fókusz szimmetrikusa az érintőre nézve rajta van a vezéregyenesen;



26. ábra. A parabola optikai tulajdonsága

3. a fókusz vetülete az M_0 ponthoz tartozó érintőre a parabola csúcsérintőjén van.

Ezért elég igazolni egyet ezen állítások közül. Igazoljuk például, hogy az M_0 pontban szerkesztett érintő felezőmerőlegese a $[BF]$ szakasznak. Az M_0 pontba szerkesztett érintő egyenlete: $yy_0 = p(x + x_0)$. Tehát az érintő iránytényezője:

$$m_{\text{érintő}} = \frac{p}{y_0}. \tag{79}$$

A BF egyenes iránytényezője:

$$m_{BF} = \frac{y_B - y_F}{x_B - x_F} = -\frac{y_0}{p}. \tag{80}$$

Legyen N a $[BF]$ szakasz felezőpontja. Ekkor $N\left(0, \frac{y_0}{2}\right)$. Ez a pont rajta van az M_0 pontba szerkesztett érintőn, mert koordinátái kielégítik az érintő egyenletét: $\frac{y_0 y_0}{2} = px_0$. Ekkor a (79) és (80) összefüggések alapján kapjuk, hogy az érintő a $[BF]$ szakasz felezőmerőlegese. □

3. Kitűzött feladatok

3.1. Analitikus mértan síkban

1. Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amelynek

   (i) iránytényezője $m = -5$ és átmegy az $A(1, -2)$ ponton;

   (ii) iránytényezője $m = 8$ és az Oy tengelyen egy 2 hosszúságú szakaszt határoz meg;

   (iii) áthalad az $A(-2, 3)$ ponton és az Ox tengellyel $60°$-os szöget zár be.

   (iv) átmegy a B(1,7) ponton és merőleges az $n(4, 3)$ vektorra.

2. Adott az ABC háromszög: $A(1, 1), B(-2, 3), C(4, 7)$. Írjuk fel az oldalak valamint az A csúcshoz tartozó oldalfelező és magasság egyenleteit! E: $x = 1, 3x + 2y - 5 = 0$.

3. Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely áthalad az $A(12, 6)$ ponton és az egyenes valammint a koordinátatengelyek által meghatározott háromszög területe 150.

   E: $3x + 4y - 60 = 0, x + 3y - 30 = 0$.

4. Az origóból egy d egyenesre húzott merőleges talppontja az $A(1, 2)$ pont. Írjuk fel a d egyenes egyenletét! E: $x + 2y - 5 = 0$.

5. Határozzuk meg a $d_1 : -x + 2y - 1 = 0$ egyenes szimmetrikusát a $d_2 : x - y = 0$ egyenesre majd az $A(-2, 5)$ pontra vonatkozóan! E: $2x + y - 1 = 0, x - 2y + 23 = 0$.

6. Adott egy háromszögkét csúcsa: $A(-6, 2)$ és $B(2, -2)$, valamint a $H(1, 2)$ ortocentrum. Határozzuk meg a harmadik C csúcs koordinátáit! E:$C(2, 4)$.

7. Határozzuk meg azt az $A(3, 1)$ ponton áthaladó egyenest, amely $45°$-os szöget zár be a $2x + 3y - 1 = 0$ egyenlettel megadott egyenessel. E: $x - 5y + 2 = 0, 5x + y - 16 = 0$.

8. Határozzuk meg az $O(0, 0), A(1, 2)$ és $B(-5, 7)$ pontok távolságát a $6x + 8y - 15 = 0$ egyenestől. E: $\frac{3}{2}, \frac{7}{10}, \frac{11}{10}$.

9. Határozzuk meg az alábbi párhuzamos egyenesek közti távolságot

   1) $x - 2y + 3 = 0$ és $2x - 4y + 7 = 0$;

   2) $3x - 4y + 1 = 0$ és $x = 1 + 4t, y = 3t$;

   3) $x = 2 - t, y = -3 + 2t$ és $x = 2s, y = 5 - 4s$.

   E: 1)$\dfrac{1}{2\sqrt{5}}$.

10. Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amely áthalad az A, B pontokon és középpontja rajta van a d egyenesen, ha

    a) $A(4, 1)$, $B(0, -3)$, $d : x - 2y - 4 = 0$;

    b) $A(1, 2)$, B(4,-3), $d : 3x - y - 19 = 0$.

    E: a) $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 8$; b) $(x - 7\frac{1}{12})^2 + (y - 2\frac{1}{4})^2 = \frac{2669}{72}$.

11. Írjuk fel a $\mathcal{C}$ kör P pontjába szerkesztett érintő egyenletét, ha

    a) $\mathcal{C} : x^2 + y^2 = 5$, $P(1, -2)$;

    b) $\mathcal{C} : x^2 + y^2 + 2x - 6y - 15 = 0$, $P(3, 6)$. E: a) $x - 2y - 5 = 0$; b) $4x + 3y - 30 = 0$.

12. Adott a $\mathcal{C}$ kör és a d egyenes. Írjuk fel az adott egyenessel párhuzamos körérintők egyenletét, ha

    a) $\mathcal{C} : x^2 + y^2 - 13 = 0$, $d : 4x + 6y - 5 = 0$;

    b) $\mathcal{C} : x^2 + y^2 + 2x - 4y - 20 = 0$, $d : 3x + 4y = 0$.

    E: a) $e_1 : 2x + 3y + 13 = 0, e_2 : 2x + 3y - 13 = 0$; b) $e_1 : 3x + 4y + 20 = 0, e_2 : 3x + 4y - 30 = 0$.

13. Adott a $\mathcal{C}$ kör és a d egyenes. Írjuk fel az adott egyenesre merőleges körérintők egyenletét, ha

    a) $\mathcal{C} : x^2 + y^2 + 5x = 0$, $d : 4x - 3y + 7 = 0$;

    b) $\mathcal{C} : x^2 + y^2 - 12x - 8y + 47 = 0$, $d : x + 2y - 4 = 0$.

    E: a) $e_1 : 3x + 4y + 20 = 0, e_2 : 3x + 4y - 5 = 0$; b) $e_1 : 2x - y - 3 = 0, e_2 : 2x - y - 13 = 0$.

14. Írjuk fel az ellipszis kanonikus egyenletét, ha

a) nagytengelye 8 egység, kistengelye 6 egység;

b) $a = 4$, $c = 3$;

c) $b = 24$, $c = 7$;

d) az ellipszis áthalad a $P_1(10, 5)$, $P_2(6, 13)$ pontokon;

e) az ellipszis fókuszai $F(3, 0)$, $F'(-3, 0)$ és egy pontja $P(4, \dfrac{12}{5})$.

E: a) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$; b) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$; c) $\frac{x^2}{625} + \frac{y^2}{576} = 1$; d) $\frac{9x^2}{1000} + \frac{y^2}{250} = 1$; e) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

15. Írjuk fel az $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{12} = 1$ ellipszis $P(2, -3)$ pontba szerkesztett érintőjének egyenletét!

E: $x - 2y - 8 = 0$.

16. Hány érintő húzható a $P(1, 1)$, $Q(5, 1)$, $R(4, 0)$ pontokból az $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{12} = 1$ ellipszishez?

E: 0,2,1.

17. Írjuk fel az $\dfrac{x^2}{10} + \dfrac{y^2}{5} = 1$ ellipszis azon érintőinek az egyenletét, amelyek párhuzamosak a $3x+2y+7 = 0$ egyenessel!

E: $3x + 2y \pm \frac{100}{\sqrt{110}} = 0$.

18. Az A pontból érintőket szerkesztünk az $\mathcal{E}$ ellipszishez. Határozzuk meg az egyenleteiket, ha

a) $A(4, -1)$, $\mathcal{E} : \dfrac{x^2}{6} + \dfrac{y^2}{3} = 1$;

b) $A(2, -1)$, $\mathcal{E} : x^2 + 9y^2 = 9$.

E: a) $x + y - 3 = 0, x - 5y - 9 = 0$; b) $y + 1 = 0, 4x - 5y - 13 = 0$.

19. Határozzuk meg annak a hiperbolának az egyenletét, amelynek fókuszai az Ox tengelyen vannak, szimetrikusak az origóra nézzve és teljesítik az alábbi feltételek közül az egyiket:

1) a tengelyeket a $2a = 10$ és $2b = 8$ egyenlőségek határozzák meg;

2) az aszimptoták egyenletei $y = \pm\frac{4}{3}x$ és a fókusztávolság $2c = 20$.

20. Adott a $16x^2 - 9y^2 = 144$ hiperbola. Határozzuk meg :

1) fókuszokat,

2) az aszimptoták egyenleteit.

21. Írjuk fel az $\dfrac{x^2}{20} - \dfrac{y^2}{5} = 1$ hiperbola azon érintőinek az egyenleteit, amelyek merőlegesek a $4x+3y-7 = 0$ egyenesre.

E: $3x - 4y = \pm 10$.

22. Az A pontból érintőket szerkesztünk az $\mathcal{H}$ hiperbolához. Határozzuk meg az egyenleteiket, ha

a) $A(2, 1)$, $\mathcal{H} : \dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{8} = 1$;

b) $A(1, 4)$, $\mathcal{H} : x^2 - \dfrac{y^2}{4} = 1$.

E: a) $x - y - 1 = 0, 9x + 5y - 23 = 0$; b) $x - 1 = 0, 5x - 2y + 3 = 0$.

23. Határozzuk meg annak a parabolának az egyenletét, amelynek csúcsa az origó, szimmetriatengelye az Ox tengely és áthalad az $A(9, 6)$ ponton.

E:$y^2 = 4x$.

24. Határozzuk meg az $y^2 = 12x$ parabola azon érintőjének az egyenletét, amely párhuzamos a $3x - 2y + 30 = 0$ egyenessel és számítsuk ki az adott egyenes és ezen érintő közti távolságot.

E: $3x - 2y + 4 = 0$,$d = 2\sqrt{13}$.

25. Határozzuk meg az $y^2 = 64x$ parabola azon M pontját, amely a legközelebb található a $4x+3y-14 = 0$ egyeneshez és határozzuk meg az M pont távolságát ettől az egyenestől.

E: $M(\frac{9}{4}, -24)$.

26. Az $A(5, 9)$ pontból értintőket szerkesztünk az $y^2 = 5x$ parabolához. Határozzuk meg azon húr egyenletét, amely áthalad az érintési pontokon!

E: $5x - 18y + 25 - 72\sqrt{14} = 0$.

3.2. Analitikus mértan térben

1. Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely átmegy az $M_0(1,2,-1)$ ponton és

   a) az $M(3,4,0)$ ponton;

   b) párhuzamos a $\vec{d}(2,-1,5)$ vektorral;

   c) merőleges a $2x-y+3z-10=0$ síkra;

   d) párhuzamos az e:$\begin{cases} 2x-y+3z+1=0 \\ 5x+4y-z-7=0 \end{cases}$ egyenessel;

   e) párhuzamos az Ox tengellyel.

2. Adottak a $d_1: x+y-2=0, z+2=0$, $d_2: x+z-1=0, y-3=0$ egyenesek. Az u_1 egyenes áthalad a $P_1(1,1,1)$ ponton és merőleges a d_1 egyenesre, míg az u_2 egyenes a $P_2(1,0,0)$ ponton halad át és párhuzamos d_2-vel. Határozzuk meg:

   a) Az u_1 és u_2 egyenesek közös merőlegesének egyenleteit.

   b) Az u_1 és u_2 egyenesek közötti távolságot.

3. Legyenek $A(-1,1,1), B(2,3,-1), C(5,2,0)$ az AB alapú egyenlő szárú trapéz csúcspontjai. Határozzuk meg a D, negyedik csúcspont koordinátáit.

   E: $D_1(2,0,2)$, $D_2(2,-\frac{20}{17},2)$.

4. Határozzuk meg a $P_0(x_0,y_0,z_0)$ ponton áthaladó és a d: $\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}$ egyenesre merőleges egyenes egyenleteit. Alkalmazás: határozzuk meg a $P_0(-1,2,3)$ ponton áthaladó d: $\frac{x+2}{3}=\frac{y-4}{1}=\frac{z}{1}$ egyenesre merőleges egyenest.

   E: $\frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{26}=\frac{z-3}{-29}$.

5. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely

   a) átmegy az $M_1(1,-1,3)$ és $M_2(1,2,4)$ pontokon és merőleges a $2x-3y+z+1=0$ síkra;

   b) átmegy a $P(-1,2,6)$ ponton és tartalmazza a d:$\begin{cases} x-2y+3z=0 \\ 2x+z-3=0 \end{cases}$ egyenest;

   c) átmegy az A(1,1,-2) ponton és merőleges a d:$\begin{cases} 2x+3z=0 \\ x-y+z-1=0 \end{cases}$ egyenesre.

   E: a) $6x+2y-6z+14=0$; $b)$ $25x+2y+10z-39=0$; $c)$ $3x+y-2z-8=0$.

6. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely átmegy a $P_1: 2x+y-z-2=0$, $P_2: x-3y+z+1=0$, $P_3: x+y+z3=0$ síkok metszéspontján és párhuzamos a $P_4: x+y+2z=0$ síkkal.

   E: $x+y+2z-4=0$.

7. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely az $A(2,-1,3)$ és $B(4,5,-3)$ pontok által meghatározott szakasz felezőmerőleges síkja.

   E: $x+3y-3z-9=0$.

8. Legyen π a $d_1: \frac{x-5}{0}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{1}$ és $d_2: \frac{x-6}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+1}{-1}$egyenesek által meghatározott sík, π' pedig az origón és a $P'(2,0,-1)$ pontokon áthaladó $3x-y-z+4=0$ síkra merőleges sík.

   a) Határozzuk meg a π és π' síkok hajlásszögét.

   b) Igazoljuk, hogy a P' pont és a d_1, d_2 egyenesek metszéspontjából a π' síkra bocsátott merőleges által meghatározott π'' sík átmegy az origón.

   E: a) $60°$; b) $\pi'': x-5y+2z=0$.

9. Írjuk fel azon u egyenes egyenleteit, amely áthalad a $\pi: 3x+2y+z=0$ síknak a $d: x-2y+z+2=0, x+y-z-3=0$ egyenessel való metszéspontját, a π síkban található és merőleges a d egyenesre. E: $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+1}{1}$.

10. Adott a $d_1: x-3=\frac{y-8}{3}=\frac{z-3}{4}$ és $d_2: \begin{cases} 7x-y-z-10=0 \\ 3x+y-z-12=0 \end{cases}$ egyenes. Igazoljuk, hogy a két egyenes egy síkban van és írjuk fel ennek a síknak az egyenletét.

    E: $7x-y-z-10=0$

11. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely tartalmazza a $d_1: \frac{x-3}{2}=\frac{y+4}{1}=\frac{z-2}{-1}$ egyenest és párhuzamos a $d_2: \frac{x+5}{4}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-1}{2}$ egyenesre.

    E:$x-2y-11=0$.

12. Az m paraméter milyen értékére a $d: x = -1 + 3t, y = 2 + mt, z = -3 - 2t$ egyenesnek nincs közös pontja a $\pi : x + 3y + 3z - 2 = 0$ síkkal? E: $m = 1$.

13. Az a és d paraméterek milyen értékeire helyezkedik el a $d : \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{-2}$ egyenes a $\pi : ax + y - 2z + d = 0$ síkban. E: $a = -2, d = 11$.

14. Az a és c paraméterek milyen értékeire merőleges a $d : \begin{cases} 3x - 2y + z + 3 = 0 \\ 4x - 3y + 4z + 1 = 0 \end{cases}$ egyenes a $\pi : ax + 8y + cz + 2 = 0$ síkra! E: $a = 5, c = 1$.

15. Írjuk fel a $P(1, -1, 1)$ ponton átmenő és az $x - y + z - 1 = 0$, $2x + y + z + 1 = 0$ síkokra merőleges sík egyenletét. E: $-2x + y + 3z = 0$.

16. Határozzuk meg annak a síknak az egyenletét, amely párhuzamos a $2x - 2y - z - 6 = 0$ síkkal és 7 egységnyi távolságra van ettől a síktól!
E: $2x - 2y - z + 15 = 0$, $2x - 2y - z - 27 = 0$.

17. Határozzuk meg a $Q(4, -5, 4)$ pont szimmetrikusát arra a síkra nézve, amely tartalmazza a
$$d_1 : \begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \\ x - y + z - 1 = 0 \end{cases}$$
$$d_2 : \begin{cases} x + z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$
egyeneseket! E: $Q'(-2, 7, -2)$.

18. Határozzuk meg a d egyenes π sík szerinti d' szimmetrikusát, ahol
$$d : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{1} \text{ és } \pi : x + 2y + z + 3 = 0.$$
E:$\pi \cap d = \{A\}, A(\frac{5}{9}, -\frac{5}{3}, -\frac{2}{9}), d' : \frac{x-5/9}{1} = \frac{y+5/3}{3} = \frac{z+2/9}{2}$.

19. Határozzuk meg az $M_0(3, -2, 1)$ pont távolságát $d : \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-3}{3}$ egyenestől!

20. Számítsuk ki az $\alpha : x + 3y + 2z + 1 = 0$ és $\beta : 3x + 2y - z = 6$ síkok hajlásszögének mértékét. E: $60°$

21. Mutassuk ki, hogy az
$$(S_1) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0$$
$$(S_2) : 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 12x - 8y - 24z + 66 = 0$$
$$(S_3) : 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 30x - 30y - 60z + 402 = 0$$
gömbök sugarai egyenlőek és középpontjai kollineárisak. E: $r = 4$

22. Írjuk fel az O(0,0,0), A(4,0,0), B(0,6,0), C(2,1,1) pontokon átmenő gömb egyenletét, és mutassuk ki, hogy érinti a $2x + 3y - 4z - 58 = 0$ síkot. E: $M_0(2, 3, -4), r = \sqrt{29}$

23. Írjuk fel annak a gömbnek az egyenletét, amelynek középpontja a $P_1 : 2x - y + z - 4 = 0$ síkban van és érinti a $P_2 : 4x + 3z - 29 = 0$ síkot a $T(5, -2, 3)$ pontban.
E: $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - \frac{25}{2} = 0$

24. Adottak az $(S_1) : x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0, (S_2) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 4z = 0$ gömbök. Határozzuk meg a két gömb metszetének a középpontját és sugarát.
E: $O(1/2, 1, -1), r = 3\sqrt{3}/2$

Hivatkozások

[1] Andrica D., Duca D.I., Purdea I. şi Pop I., Matematica de baz a. Editura Studium, Cluj-Napoca, 2002.

[2] Andrica, D., Varga, Cs., Văcăreţu, D., Teme şi probleme alese de geometrie. Ed. Plus, Bucureşti, 2002.

[3] Galbură Gh., Rado F., Geometrie. Ed. Did. şi Ped., Bucureşti, 1979.

[4] Mezei I., Varga Cs., Analitikus mértan. Kolozsvári Egyetemi Kiadó, Kolozsvár, 2010.

[5] Rado F. şi col., Culegere de probleme de Geometrie, Cluj-Napoca, 1979.

[6] Udrişte, C., Tomuleanu, V., Geometrie analitică, Manual pentru clasa a-XI-a. Ed. Did şi Ped., Bucureşti, 1985.