Algebrai struktúrák

Egyetemi felvételi előkészítő

Szöllősi István

BBTE
Magyar Matematika és Informatika Intézet

2023. február 25.

Outline

Bináris művelet

Definíció

Egy G halmazon megadott **bináris művelet** egy

$$G \times G \xrightarrow{*} G, \ (g_1, g_2) \mapsto g_1 * g_2$$

alakú leképezés (függvény). A bináris műveletek jelölésére a következő szimbólumokat szoktuk használni: $" \cdot "$, $" + "$, $" \times "$, $" \oplus "$, $" \otimes "$, stb. Ha a $" \cdot "$ használjuk a művelet jelölésére, akkor a műveletet **multiplikatív**nak nevezzük, míg a $" + "$ szimbólummal jelölt művelet **additív**.

Művelettábla

						(j)		
	$*$	$\boldsymbol{e}$	$\boldsymbol{\alpha}$	$\cdots$	$\cdots$	$\boldsymbol{h}$	$\cdots$	$\boldsymbol{\gamma}$
	e	e	α	$\cdots$	$\cdots$	h	$\cdots$	γ
	$\boldsymbol{\alpha}$	α	$\alpha * \alpha$					
	$\vdots$	$\vdots$						
(i)	$\boldsymbol{g}$	g				$g * h$		
	$\vdots$	$\vdots$						
	$\vdots$	$\vdots$						
	$\boldsymbol{\gamma}$	γ						

Tulajdonságok (asszociativitás, kommutativitás)

Definíció

A G halmazon értelmezett " $*$ " művelet...

- **asszociatív**, ha $(g_1 * g_2) * g_3 = g_1 * (g_2 * g_3)$, minden $g_1, g_2, g_3 \in G$ elemre. Ebben az esetben azt mondjuk, hogy a $(G, *)$ struktúra egy **félcsoport**;
- **kommutatív**, ha $g_1 * g_2 = g_2 * g_1$, minden $g_1, g_2 \in G$ elemre. Ebben az esetben azt mondjuk, hogy a $(G, *)$ struktúra **kommutatív** vagy **Abel**.

Tulajdonságok (asszociativitás, kommutativitás)

- Ha $(G, *)$ félcsoport, akkor a $(g_1 * g_2) * g_3 = g_1 * (g_2 * g_3)$ elemet így jelöljük: $g_1 * g_2 * g_3$. Általában minden $((\cdots(g_1 * g_2) * g_3 * \cdots * g_n)\cdots)$ alakú kifejezést egyszerűen így írunk: $g_1 * g_2 * \cdots * g_n$.
- Ha a G félcsoport művelete multiplikatív/additív, természetes módon értelmezhetjük az elemek hatványait/többszöröseit.

Elemek hatványai

Egy $(G, \cdot)$ multiplikatív félcsoportban egy $g \in G$ esetén a g elem pozitív hatványait a következő módon vezetjük be: $g^n = \underbrace{g \cdot \ldots \cdot g}_{n\text{-szer}}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Vegyük észre, hogy:

1. $g^m \cdot g^n = g^{m+n}$, $m, n \in \mathbb{N}^*$;
2. $(g^m)^n = g^{mn}$, $m, n \in \mathbb{N}^*$.

Elemek többszörösei

Egy $(G, +)$ additív félcsoportban egy $g \in G$ esetén a g elem pozitív többszöröseit a következő módon vezetjük be: $ng := \underbrace{g + \ldots + g}_{n\text{-szer}}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Vegyük észre, hogy:

1. $(m + n)g = mg + ng$, $m, n \in \mathbb{N}^*$;
2. $m(ng) = (mn)g$, $m, n \in \mathbb{N}^*$.

Tulajdonságok (semleges elem) – monoid

Definíció

Egy $(G, *)$ félcsoport esetén azt mondjuk, hogy $e \in G$ a $(G, *)$ **semleges eleme** ha $e * g = g * e = g$ minden $g \in G$ elemre. Ha létezik semleges elem, akkor a $(G, *)$ félcsoportot **monoidnak** nevezzük. Ha a művelet additív, akkor a semleges elemet **nullelemnek** nevezzük és 0-val jelöljük. A multiplikatív művelet semleges elemét **egységelemnek** nevezzük és 1-gyel jelöljük.

Megjegyzés: Ha $(G, *)$-ben létezik semleges elem, akkor az egyedi. Valóban, ha $e, e' \in G$ semleges elemek, akkor $e = e * e' = e'$.

Tulajdonságok (szimmetrikus elem)

Definíció

Legyen $(G, *)$ monoid, ahol e-vel jelöljük a semleges elemet. Azt mondjuk, hogy egy $g \in G$ elemnek van **szimmetrikus** eleme, ha létezik egy olyan $g' \in G$ elem, amire igaz, hogy $g * g' = g' * g = e$. Multiplikatív művelet esetén a $g \in G$ elem szimmetrikusát **inverz elem**nek is szoktuk nevezni és így jelöljük: g^{-1}. Additív művelet esetén $g \in G$ szimmetrikusát $-g$-vel jelöljük.

Megjegyzés: Ha egy $g \in G$ elemnek van szimmetrikusa, akkor az egyedi. Valóban, ha g' és g'' szimmetrikus elemei g-nek, akkor $g' = g' * e = g' * (g * g'') = (g' * g) * g'' = e * g'' = g''$.

Csoport

Definíció

Csoportnak nevezünk egy olyan $(G, *)$ monoidot, ahol minden $g \in G$ elemnek van szimmetrikusa. Vagyis G csoport, ha a "$*$" művelet asszociatív, létezik semleges elem és minden G-beli elemnek van szimmetrikusa. Ha a "$*$" művelet kommutatív, akkor a $(G, *)$ csoportot **kommutatív csoport**nak vagy **Abel-csoport**nak nevezzük.

Ha a G halmazhoz rendelt művelet multiplikatív/additív, akkor természetes módon értelmezhetjük az elemek egész hatványait/többszöröseit.

Csoportelemek hatványai

Egy multiplikatív $(G, \cdot)$ csoport esetén, egy $g \in G$ elem egész hatványait a következő módon adhatjuk meg:
$g^0 := 1$, $g^n = \underbrace{g \cdot \ldots \cdot g}_{n\text{-szer}}$, $n \in \mathbb{N}^*$ és

$$g^{-n} := (g^{-1})^n = (g^n)^{-1}.$$

Vegyük észre, hogy:

1. $g^{m+n} = g^m \cdot g^n$, $m, n \in \mathbb{Z}$;
2. $(g^m)^n = g^{mn}$, $m, n \in \mathbb{Z}$.

Csoportelemek többszörösei

Egy additív $(G,\cdot)$ csoport esetén, egy $g \in G$ elem egész többszöröseit a következő módon adhatjuk meg:
$0g := 0$, $ng := \underbrace{g + \ldots + g}_{n\text{-szer}}$, $n \in \mathbb{N}^*$ és

$$-ng := n(-g) = -(ng).$$

Vegyük észre, hogy:

1. $(m+n)g = mg + ng$, $m, n \in \mathbb{Z}$;
2. $m(ng) = (mn)g$, $m, n \in \mathbb{Z}$.

Megjegyzés: Ha a $(G,\cdot)$ csoport kommutatív, $g_1, g_2 \in G$ és $n \in \mathbb{Z}$, akkor $(g_1 g_2)^n = g_1^n g_2^n$.

Részcsoportok

Definíció

Legyen $(G, *)$ egy csoport és H egy részhalmaza G-nek. Azt mondjuk, hogy H **részcsoport**ja G-nek (jelölés: $H \leq G$), ha a következők teljesülnek:

- bármely két $h_1, h_2 \in H$ elemre igaz, hogy $h_1 * h_2 \in H$;
- $e \in H$, ahol e a G semleges eleme;
- bármely $h \in H$ elemre igaz, hogy $h' \in H$, ahol h' a h szimmetrikus eleme.

Vagyis H pontosan akkor részcsoport, ha $(H, *)$ csoport, ahol a szintén " $*$ "-gal jelölt $H \times H \xrightarrow{*} H$, műveletet a G-beli művelet $H \times H$-halmazra való leszűkítése révén tudjuk értelmezni.

Részcsoportok

Tétel

Legyen $(G, *)$ egy csoport. A $H \subseteq G$ részhalmaz pontosan akkor részcsoportja G-nek, ha $H \neq \emptyset$ és $h_1, h_2 \in H \implies h_1 h_2' \in H$, ahol h_2' a h_2 elem szimmetrikusa.

Példa

Ha n egy pozitív egész, akkor a

$$n\mathbb{Z} := \{nk \mid k \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{Z}$$

halmaz részcsoportja $(\mathbb{Z}, +)$-nak.

Csoportmorfizmusok

Definíció

Legyenek $(G, *)$ és $(G', \otimes)$ csoportok. Egy $f : G \to G'$ függvényt (csoport)**morfizmus**nak nevezünk, ha bármely $g_1, g_2 \in G$ elemre teljesül, hogy

$$f(g_1 * g_2) = f(g_1) \otimes f(g_2).$$

Ha f injektív, akkor **monomorfizmus**nak nevezzük, ha pedig szürjektív, akkor **epimorfizmus**nak. Ha f bijektív, akkor **izomorfizmus** és azt mondjuk, hogy G és G' izomorfak (jelölés: $G \cong G'$).

Gyűrűk

Definíció

Legyen R egy halmaz, amin egy "$+$" és egy "$\cdot$" értelmezett. Azt mondjuk, hogy az $(R, +, \cdot)$ struktúra egy **gyűrű**, ha teljesülnek a következők:

- $(R, +)$ egy Abel-csoport;
- a multiplikatív művelet asszociatív, vagyis:

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c), \; \forall a, b, c \in R;$$

- a **disztributivitás** fennáll, vagyis:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \text{ és } (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c, \; \forall a, b, c \in R.$$

Gyűrűk

Definíció

Az $(R, +, \cdot)$ gyűrű **kommutatív**, ha $a \cdot b = b \cdot a$ bármely $a, b \in R$ esetén. Az $(R, +, \cdot)$ gyűrű **egységelemes**, ha létezik $1 \in R$ úgy, hogy $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ bármely $a \in R$ elemre. Az $a \cdot b$ szorzatot, ahol $a, b \in R$, a következő módon is jelöljük: ab.

Megjegyzés: Ha a $(R, +, \cdot)$ gyűrű egységelemes, akkor az összeadás művelet kommutativitása az egységelem létének következménye. Valóban, ha $a, b \in R$, akkor:

$$\begin{aligned} a + b + a + b &= 1(a + b) + 1(a + b) \\ &= (1 + 1)(a + b) = (1 + 1)a + (1 + 1)b \\ &= a + a + b + b \end{aligned}$$

amiből következik, hogy $a + b = b + a$.

Testek

Definíció

Egy egységelemes $(R, +, \cdot)$ gyűrűt (ahol 1 az egységelem és 0 a nullelem és $1 \neq 0$) **test**nek nevezünk, ha minden $0 \neq a \in R$ elemnek van inverze, vagyis létezik $a^{-1} \in R$ úgy, hogy $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$. Ha a " $\cdot$ " művelet kommutatív, akkor $(R, +, \cdot)$ **kommutatív test**.

Részgyűrű, résztest

Definíció

Legyen $(R, +, \cdot)$ gyűrű és H egy részhalmaza R-nek. Azt mondjuk, hogy H **részgyűrű**je R-nek (jelölés: $H \leq R$), ha a következők teljesülnek:

- $(H, +) \leq (R, +)$, vagyis H részcsoportja R-nek az összeadás művelettel;
- bármely két $h_1, h_2 \in H$ elemre igaz, hogy $h_1 \cdot h_2 \in H$.

Definíció

Legyen $(K, +, \cdot)$ test és H egy részhalmaza K-nak. Azt mondjuk, hogy H **résztest**e R-nek (jelölés: $H \leq K$), ha a következők teljesülnek:

- $(H, +) \leq (K, +)$, vagyis H részcsoportja K-nak az összeadás művelettel;
- $(H^*, \cdot) \leq (K^*, \cdot)$, vagyis H^* részcsoportja K^*-nak a szorzás művelettel, ahol $H^* = H \setminus \{0\}$, $K^* = K \setminus \{0\}$.

Részgyűrű, résztest

Tétel

Legyen $(R, +, \cdot)$ *gyűrű és* H *egy részhalmaza* R*-nek.* H *pontosan akkor részgyűrűje* R*-nek, ha a következők teljesülnek:*

- $H \neq \emptyset$;
- *bármely két* $h_1, h_2 \in H$ *elemre igaz, hogy* $h_1 - h_2 \in H$;
- *bármely két* $h_1, h_2 \in H$ *elemre igaz, hogy* $h_1 \cdot h_2 \in H$.

Tétel

Legyen $(K, +, \cdot)$ *test és* H *egy részhalmaza* K*-nak.* H *pontosan akkor részteste* K*-nak, ha a következők teljesülnek:*

- $|H| \geq 2$;
- *bármely két* $h_1, h_2 \in H$ *elemre igaz, hogy* $h_1 - h_2 \in H$;
- *bármely két* $h_1, h_2 \in H^*$ *elemre igaz, hogy* $h_1 \cdot h_2^{-1} \in H^*$.

Gyűrűmorfizmusok

Definíció

Legyenek $(R, +, \cdot)$ és $(R', \oplus, \otimes)$ gyűrűk. Egy $f : R \to R'$ függvényt (gyűrű)**morfizmus**nak nevezünk, ha bármely $r_1, r_2 \in R$ elemre teljesül, hogy

$$f(r_1 + r_2) = f(r_1) \oplus f(r_2) \quad \text{és} \quad f(r_1 \cdot r_2) = f(r_1) \otimes f(r_2).$$

Ha f injektív, akkor **monomorfizmus**nak nevezzük, ha pedig szürjektív, akkor **epimorfizmus**nak. Ha f bijektív, akkor **izomorfizmus** és azt mondjuk, hogy R és R' izomorfak (jelölés: $R \cong R'$).

Feladatok

27. Legyen a egy valós paraméter és az $\mathbb{R}$ halmazon tekintjük a

$$x * y = xy + ax + ay + 1$$

műveletet. Az alábbi állítások közül melyek igazak?

- $\boxed{\text{A}}$ Ha a $*$ műveletnek van semleges eleme, akkor az a paraméter egyértelműen meghatározott.
- $\boxed{\text{B}}$ Több olyan a paraméter létezik, amelyre a $*$ műveletnek van semleges eleme.
- $\boxed{\text{C}}$ Ha e a $*$ művelet semleges eleme, akkor $e = \frac{1}{a}$.
- $\boxed{\text{D}}$ Ha e a $*$ művelet semleges eleme, akkor $e = -\frac{1}{a}$.

$x \in \mathbb{R}$

Legyen $e \in \mathbb{R}$ a semleges elem. Akkor $x * e = x$.

$$x * e = xe + ax + ae + 1 = x \quad \boxed{1}$$

$$\Rightarrow xe + ae = x - ax - 1 \Rightarrow e = \frac{x - ax - 1}{x + a} \quad ???$$

A semleges elem értéke nem függhet x-től.

Megpróbálunk olyan a paramétert keresni, amivel az x-től való függés kiküszöbölhető.

$$\boxed{1} \Rightarrow xe + ax - x = -ae - 1$$

$$x(e + a - 1) = -ae - 1 \quad \boxed{2}$$

A $\boxed{2}$ egyenlet akkor nem függ x-től, ha

$\boxed{3}$ $\qquad\qquad$ $\boxed{4}$

$-ae-1=0$ és $e+a-1=0$

$\boxed{3} \Rightarrow e=-\frac{1}{a}$ (tehát a $\boxed{D}$ válasz helyes).

$\boxed{4} \Rightarrow e+a-1=-\frac{1}{a}+a-1=0$

$\Rightarrow a^2-a-1=0$

$\Delta=1+4=5>0 \Rightarrow$ az egyenletnek két megoldása van (tehát a $\boxed{B}$ válasz is helyes).

A $\boxed{B}$ és $\boxed{D}$ válaszok kizárják $\boxed{A}$-t és $\boxed{C}$-t, tehát a feladat megoldása

$\boxed{B}$ és $\boxed{D}$.

24. A $(\mathbb{Z}_{12}, +, \cdot)$ gyűrűben az $x^2 + \widehat{4}x + \widehat{3} = \widehat{0}$ egyenletnek

A nincs megoldása;

B nem egyetlen megoldása van;

C pontosan két különböző megoldása van;

D pontosan négy különböző megoldása van.

$$x^2 + \hat{4}x + \hat{3} = \hat{0}$$

$$x(x + \hat{4}) = \hat{9}$$

Az egyenletnek ez utóbbi alakjából látható, hogy csak páratlan x értékek lehetnek az M megoldáshalmazban.

Valóban, $M = \{\hat{3}, \hat{5}, \hat{9}, \hat{11}\}$, tehát a helyes válaszok $\boxed{B}$ és $\boxed{D}$.

25. Tekintjük az

$$x * y = \frac{xy-2}{x+y-4}$$

kifejezést. Az alábbi állítások közül melyek igazak?

- A: A $*$ egy művelet az $\mathbb{R}$-en.
- B: A $*$ egy művelet a $(2, +\infty)$ intervallumon.
- C: $3 * (3 * 3) = \frac{18}{5}$.
- D: $x * 4 = x$, minden $x > 3$ esetén.

Ha $x = y = 2$, akkor $x * y$ nem értelmezett, tehát „$*$" nem művelet $\mathbb{R}$-en ($\boxed{A}$ hamis).

Legyenek $x, y \in \mathbb{R}$, $x > 2$, $y > 2$. Vizsgáljuk, hogy fennáll-e a $\frac{xy-2}{x+y-4} > 2$ egyenlőtlenség.

A nevezőben $x+y-4 > 0$, tehát írhatjuk

$(x+y-4)(xy-2) > 2(x+y-4)$ alakban.

$x^2y + xy^2 - 4xy - 2x - 2y + 8 > 2x + 2y - 8$

$x^2y + xy^2 - 4xy - 4x - 4y + 16 > 0$

$xy(x+y) - 4xy - 4(x+y) + 16 > 0$

$(x+y)(xy-4) > 4(xy-4)$, ami igaz,

vagyis „$*$" művelet a $(2,\infty)$ intervallumon

($\boxed{B}$ helyes).

$$3*(3*3) = 3*\left(\frac{3\cdot 3-2}{3+3-4}\right) =$$

$$= 3*\frac{7}{2} = \frac{3\cdot\frac{7}{2}-2}{3+\frac{7}{2}-4} = \frac{\frac{21}{2}-2}{\frac{7}{2}-1}$$

($\boxed{C}$ hamis)

$$= \frac{17}{2}\cdot\frac{2}{5} = \frac{17}{5} \neq \frac{18}{5}$$

Legyen $x \in \mathbb{R}$, $x > 3$.

$$x*4 = \frac{4x-2}{x+4-4} = \frac{4x-2}{x} = 4-\frac{2}{x} \neq x,$$

tehát $\boxed{D}$ is hamis.

Az egyedüli helyes válasz a $\boxed{B}$.

3. (6 pont) Adottak az $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ és $B = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & z \end{pmatrix}$ mátrixok, ahol x, y, z valós számok. Ha $AB = BA = O_2$ (a nullmátrix az $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ halmazból), akkor

$\boxed{\text{A}}$ nem létezik ilyen B; $\boxed{\text{B}}$ egyetlen ilyen B létezik; $\boxed{\text{C}}$ x, y, z páros számok; $\boxed{\text{D}}$ det $B = 0$.

Megoldás:

3. Az $AB = BA = O_2$ mátrix-egyenletekből az

$$\begin{pmatrix} 4-2y & 4x-2z \\ -2+y & -2x+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-2x & -2+x \\ 4y-2z & -2y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ekvivalens egyenleteket kapjuk. Megoldva ezeket az egyenleteket, következik, hogy $x = 2$, $y = 2$ és $z = 4$ az egyetlen megoldás, tehát egyedül $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ lehetséges.

4. (6 pont) A $(\mathbb{Z}_{12}, +, \cdot)$ gyűrűben a $\hat{3}(x + \hat{2}) = \hat{9}$ egyenletnek

$\boxed{\text{A}}$ pontosan 4 megoldása van ; $\boxed{\text{B}}$ minden megoldása invertálható $(\mathbb{Z}_{12}, +, \cdot)$-ben ;
$\boxed{\text{C}}$ pontosan 3 megoldása van ; $\boxed{\text{D}}$ nincs megoldása .

Megoldás:

4. A megadott egyenlet rendre ekvivalens a következőkkel: $\hat{3}(x + \hat{2}) = \hat{9} \Leftrightarrow \hat{3}x + \hat{6} = \hat{9} \Leftrightarrow \hat{3}x - \hat{3} = \hat{0} \Leftrightarrow \hat{3}(x - \hat{1}) = \hat{0}$. Az utóbbi egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $x - \hat{1} \in \{\hat{0}, \hat{4}, \hat{8}\}$, tehát a megoldáshalmaz $M = \{\hat{1}, \hat{5}, \hat{9}\}$. A kapott megoldások közül $\hat{9}$ nem invertálható a $(\mathbb{Z}_{12}, +, \cdot)$ gyűrűben.

2. (5 pont) Tekintjük az $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ struktúrát, ahol $\mathbb{R}$ a valós számok halmaza és a $+$, illetve $\cdot$ a szokásos összeadás, illetve szorzás. Az alábbi állítások közül melyek igazak:

$\boxed{\text{A}}$ $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ csoport; $\boxed{\text{B}}$ $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ gyűrű; $\boxed{\text{C}}$ $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ test; $\boxed{\text{D}}$ $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ olyan gyűrű, amelyik nem test; $\boxed{\text{E}}$ $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ nem gyűrű.

27. Legyen $G \subseteq \mathbb{R}$ egy olyan halmaz, amelyre

$$x * y = \frac{xy}{2xy - x - y + 1}, \quad \forall x, y \in G$$

egy műveletet értelmez a G halmazon. Az alábbi állítások közül melyek igazak?

$\boxed{\text{A}}$ A G megegyezhet a $(0, 2)$ intervallummal.
$\boxed{\text{B}}$ A G megegyezhet a $(0, 1)$ intervallummal.
$\boxed{\text{C}}$ Ha $G = (0, 1)$, akkor a „$*$" műveletnek van semleges eleme.
$\boxed{\text{D}}$ Ha $G = (0, 1)$, akkor $\frac{1}{3}$ szimmetrikus eleme $\frac{2}{3}$.

Válasz:

$\boxed{\textbf{A}}$ **hamis**; $\boxed{\textbf{B}}$ **igaz**; $\boxed{\textbf{C}}$ **igaz**; $\boxed{\textbf{D}}$ **igaz**.

Megoldás: Az $x = \frac{1}{4}$ és $y = \frac{3}{2}$ esetén a kifejezés nevezője 0, ezért az $\boxed{\text{A}}$ válasz hamis. Ha $0 < x, y < 1$, akkor $xy > 0$ és $(1 - x)(1 - y) > 0$, amelyeket összeadva kapjuk, hogy $2xy - x - y + 1 > 0$. Ezért $0 < x * y < 1$, tehát a $\boxed{\text{B}}$ válasz igaz.
A semleges elem létezésére vonatkozó $x * e = x$, minden $x \in (0, 1)$ esetén feltételből kapjuk, hogy a semleges elem $e = \frac{1}{2}$. Tehát a $\boxed{\text{C}}$ válasz is igaz.
A szimmetrikus elemre vonatkozó $x * x' = \frac{1}{2}$ feltételből kapjuk, hogy $x' = 1 - x$, amely szintén a $(0, 1)$ intervallumban van, ha $x \in (0, 1)$. Tehát a $\boxed{\text{D}}$ válasz is igaz.

8. A $(-1,1)$ intervallumon értelmezzük a következő „$*$” műveletet: $x * y = \frac{x+y}{1+xy}$, minden $x, y \in (-1,1)$ esetén. Az alábbi állítások közül melyek igazak?

$\boxed{\text{A}}$ A semleges elem a „$*$” műveletre nézve $\frac{1}{2}$.

$\boxed{\text{B}}$ $\frac{1}{3} * (\frac{1}{3} * \frac{1}{3}) = \frac{5}{9}$.

$\boxed{\text{C}}$ A „$*$” művelet asszociatív.

$\boxed{\text{D}}$ A $\frac{1}{3}$ inverze a „$*$” műveletre nézve $\frac{1}{9}$.

Ellenőrizzük a $\boxed{\text{A}}$ állítást, ami szerint $x * \frac{1}{2} = x$.

$$x * \frac{1}{2} = \frac{x + \frac{1}{2}}{1 + \frac{x}{2}} = \frac{2x+1}{2} \cdot \frac{2}{2+x} = \frac{2x+1}{x+2} \neq x,$$

tehát az $\boxed{\text{A}}$ állítás hamis.

$$\frac{1}{3} * \left(\frac{1}{3} * \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} * \left(\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}}\right) = \frac{1}{3} * \frac{\frac{2}{3}}{1+\frac{1}{9}} =$$

$$= \frac{1}{3} * \left(\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{10}\right) = \frac{1}{3} * \frac{3}{5} = \frac{\frac{1}{3}+\frac{3}{5}}{1+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}} = \frac{\frac{5+9}{15}}{1+\frac{3}{15}} =$$

$$= \frac{14}{15}\cdot\frac{15}{18} = \frac{14}{18} = \frac{7}{9} \neq \frac{5}{9},$$ tehát $\boxed{\text{B}}$ hamis.

Vizsgáljuk az asszociativitást.

Legyen $x, y, z \in (-1, 1)$.

$$x * (y * z) = x * \left(\frac{y+z}{1+yz}\right) = \frac{x + \frac{y+z}{1+yz}}{1 + x \cdot \frac{y+z}{1+yz}} =$$

$$= \frac{\frac{x + xyz + y + z}{1+yz}}{1 + \frac{xy + xz}{1+yz}} = \frac{x+y+z+xyz}{1+xy+xz+yz} \quad \boxed{1}$$

$$(x*y)*z = \left(\frac{x+y}{1+xy}\right) * z = \frac{\frac{x+y}{1+xy} + z}{1 + \frac{x+y}{1+xy} \cdot z} =$$

$$= \frac{\frac{x+y+z+xyz}{1+xy}}{1 + \frac{xz+yz}{1+xy}} = \frac{x+y+z+xyz}{1+xy+xz+yz} \quad \boxed{2}$$

$\boxed{1} = \boxed{2} \Rightarrow$

$$x * (y * z) = (x * y) * z, \quad \forall x, y, z \in (-1, 1),$$

tehát a művelet asszociatív (a $\boxed{C}$ válasz helyes).

Meghatározzuk előbb az (asszociatív) „$*$" művelet semleges elemét.

Legyen $x, e \in (-1, 1)$, ahol e a semleges elem. Akkor $x * e = e * x = x$.

$$x * e = \frac{x+e}{1+xe} = x \quad \Rightarrow \quad x + e = x + x^2 e$$

$$\Rightarrow \quad e = x^2 e \quad \Rightarrow \quad e = 0 \text{ a semleges elem.}$$

Ellenőrizzük a $\boxed{D}$ állítást, ami szerint

$$\frac{1}{3} * \frac{1}{9} = 0.$$

$$\frac{1}{3} * \frac{1}{9} = \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{9}}{1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9}} = \frac{\frac{4}{9}}{\frac{28}{27}} \neq 0,$$ tehát $\boxed{D}$ hamis.

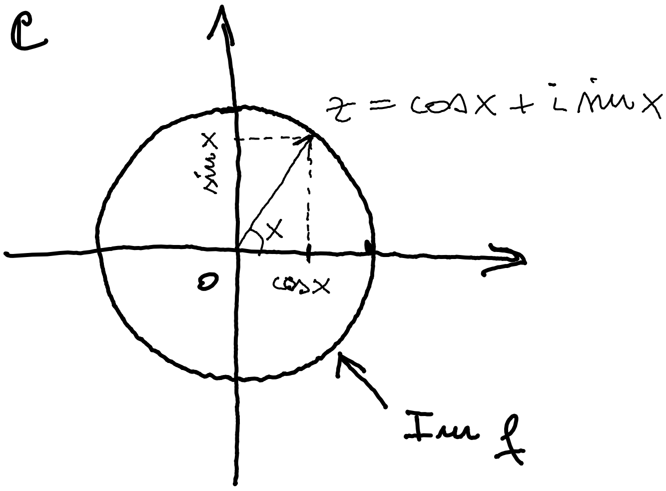
Az egyedüli igaz állítás a $\boxed{C}$.

21. Tekintjük az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^*$, $f(x) = \cos x + i \sin x$ függvényt. Az alábbi állítások közül melyek igazak?

$\boxed{\text{A}}$ f egy csoportmorfizmus az $(\mathbb{R}, +)$ és $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ csoportok között. $\boxed{\text{B}}$ f injektív.

$\boxed{\text{C}}$ f szürjektív. $\boxed{\text{D}}$ f egy izomorfizmus az $(\mathbb{R}, +)$ és $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ csoportok között.

Az f függvény képe (geometriai értelemben) az egységsugarú kör.



Ezért f nem injektív, nem szürjektív és nem lehet izomorfizmus sem ($\boxed{\text{B}}$, $\boxed{\text{C}}$, $\boxed{\text{D}}$ hamis).

Ellenőrizzük az $\boxed{\text{A}}$ állítást. Legyen $x, y \in \mathbb{R}$.

$$f(x+y) = \cos(x+y) + i \sin(x+y) =$$
$$= \cos x \cos y - \sin x \sin y + i \sin x \cos y + i \cos x \sin y =$$
$$= (\cos x + i \sin x)(\cos y + i \sin y) = f(x) \cdot f(y),$$

tehát f csoportmorfizmus és $\boxed{\text{A}}$ igaz.

2) A $\mathbb{Q}$ halmazon tekintjük az

$$x * y = xy - 2x - 2y + 6,\ \forall x, y \in \mathbb{Q}$$

összefüggéssel értelmezett $*$ műveletet.

a) (15 pont) Igazoljuk, hogy a $\mathbb{Q} \setminus \{2\}$ halmaz a $\mathbb{Q}$ zárt részhalmaza a $*$ műveletre nézve, és $(\mathbb{Q} \setminus \{2\}, *)$ egy Abel-féle csoport!

b) (5 pont) Határozzuk meg az $a \in \mathbb{Q}$ értékét úgy, hogy az $f : \mathbb{Q}^* \to \mathbb{Q}\setminus\{2\},\ f(x) = x + a$ függvény izomorfizmus legyen a $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ és a $(\mathbb{Q} \setminus \{2\}, *)$ csoportok közt!

2) a) A zártság igazolásához elégséges igazolni, hogy $x, y \in \mathbb{Q}$, $x * y = 2 \Leftrightarrow x = 2$ sau $y = 2$. $xy - 2x - 2y + 6 = 2 \Leftrightarrow 0 = xy - 2x - 2y + 4 = (x - 2)(y - 2) \Rightarrow x = 2$ vagy $y = 2$ .... 3 p

A művelet asszociativitásának igazolása: $\forall x, y, z \in \mathbb{Q} \setminus \{2\}$ esetén $x * (y * z) = (x * y) * z = xyz - 2xy - 2xz - 2yz + 4x + 4y + 4z - 6)$ .... 3 p

$x * y = xy - 2x - 2y + 6 = yx - 2y - 2x = y * x$, $\forall x, y \in \mathbb{Q} \setminus \{2\}$, tehát a művelet kommutatív. . 3 p

Az $x * e = x, \forall x \in \mathbb{Q}\setminus\{2\}$ összefüggésben $x = 0$ esetén következik hogy $e = 3$, tehát ha létezik semleges elem, akkor az $e = 3$. .... 2 p

Másrészt $x * 3 = 3x - 2x - 6 + 6 = x, \forall x \in \mathbb{Q} \setminus \{2\}$, tehát $e = 3$ valóban a semleges elem. .... 1 p

Ha $x \in \mathbb{Q} \setminus \{2\}$, akkor $x * x' = 3 \Leftrightarrow xx' - 2x - 2x' + 6 = 3 \Leftrightarrow (x - 2)x' = 2x - 3 \Leftrightarrow x' = \dfrac{2x - 3}{x - 2} = 2 + \dfrac{1}{x - 2} \neq 2$, tehát $x' \in \mathbb{Q} \setminus \{2\}$, vagyis minden elemnek létezik az inverze. .... 3 p

b) f bijektív $\Leftrightarrow$ $(x + a = 2$ pontosan akkor ha $x = 0)$ $\Leftrightarrow$ $a = 2$ .... 3 p

Másrészt $\forall x, y \in \mathbb{Q}\setminus\{2\}$ esetén $f(x) * f(y) = (x+2) * (y+2) = (x+2)(y+2) - 2(x+2) - 2(y+2) + 6 = xy + 2 = f(xy)$, tehát f izomorfizmus. .... 2 p

1. (10 pont) Tekintsük a $(\mathbb{Z}[\sqrt{2}], +, \cdot)$ gyűrűt, ahol $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$. Minden $x = a + b\sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ elem esetén használjuk a következő jelölést: $\bar{x} = a - b\sqrt{2}$. Legyen továbbá az $f : \mathbb{Z}[\sqrt{2}] \to \mathbb{Z}$ függvény az $f(x) = x \cdot \bar{x}$ képlettel megadva.

(a) Igazoljuk, hogy $f(x_1 \cdot x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$, bármely $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ esetén!

(b) Igazoljuk, hogy ha az $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ elem invertálható, akkor $f(x) \in \{-1, 1\}$.

(c) Test-e a $(\mathbb{Z}[\sqrt{2}], +, \cdot)$ gyűrű? Indoklás.

Megoldás és javítókulcs:

1. (a) (3 pont) Bármely $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ esetén

$$f(x_1 x_2) = (x_1 x_2)(\overline{x_1 x_2}) = (x_1 \overline{x_1})(x_2 \overline{x_2}) = f(x_1) f(x_2),$$

mivel $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$-ben az elemek szorzása kommutatív.

(b) (1 pont) Mivel az $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ elem invertálható, következik, hogy létezik $x' \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, amelyre $xx' = 1$.

(2 pont) Tehát $f(x)f(x') = f(xx') = f(1) = 1$ az (a) alpont alapján.

(1 pont) Mivel $f(x) \in \mathbb{Z}$, kapjuk, hogy $f(x) \in \{-1, 1\}$.

(c) (3 pont) Legyen például $x = 2 + \sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$. Ekkor az $x \neq 0$ elem nem invertálható a (b) alpont alapján, mert $f(x) = 2 \notin \{-1, 1\}$. Tehát $(\mathbb{Z}[\sqrt{2}], +, \cdot)$ nem test.