Algebrai struktúrák

2017. november 25.

1. Legyen $(M, \cdot)$ egy monoid és $U(M)$ az invertálható elemek halmaza. Bizonyítsuk be, hogy $U(M)$ zárt részhalmaza M-nek és $(U(M), \cdot)$ csoportot alkot a leszűkített művelettel.

2. Határozzuk meg az invertálható elemenek halmazát a következő monoidok esetében:

   (a) $(\mathbb{N}, +)$, $(\mathbb{N}, \cdot)$, $(\mathbb{Z}, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, \cdot)$, $(\mathbb{R}, \cdot)$, $(\mathbb{C}, \cdot)$;

   (b) $(M^M, \circ)$, ahol M egy nemüres halmaz;

   (c) $(\mathbb{Z}[i], \cdot)$, ahol $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi | a, b \in \mathbb{Z}\}$;

   (d) $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \cdot)$, ahol $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ az $n \times n$-es valós mátrixok halmaza;

   (e) $(\mathbb{Z}_4, \cdot)$

3. Legyen $A = \{a_1, a_2, a_3\}$. Határozzuk meg:

   (a) az $A \times A \to A$ műveletek számát;

   (b) az $A \times A \to A$ kommutatív műveletek számát;

   (c) az $A \times A \to A$ egységelemes műveletek számát.

4. Legyen $* : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy művelet, ahol $x * y = x + y + xy$. Bizonyítsuk be, hogy:

   (a) $(\mathbb{R}, *)$ kommutatív monoid;

   (b) az $[-1, \infty)$ intervallum zárt részhalmaza $\mathbb{R}$-nek a „$*$” műveletre nézve.

5. Legyen $\lambda \in \mathbb{R}$ és $* : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy művelete, ahol $x * y = xy - 2x - 2y + \lambda$. Határozzuk meg λ értékeit, hogy a $(2, +\infty)$ zárt részhalmaza legyen $(\mathbb{R}, *)$-nak.

6. Tekintsük $\mathbb{R}$-en a következő műveletet: $x * y = xy + 2ax + by$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Határozzuk meg azokat az $a, b \in \mathbb{R}$ értékeket, amire $(\mathbb{R}, *)$ kommutatív félcsoport.

7. Legyen $x, y \in \mathbb{R}$ és $x * y = xy - 5x - 5y + 30$. Csoport-e $(\mathbb{R}, *)$? Hát $(\mathbb{R} \setminus \{5\}, *)$?

8. Határozzuk meg $(\mathbb{Z}, \cdot)$ véges zárt részhalmazait!

9. Bizonyítsuk be, hogy $H = \{z \in \mathbb{C} | \, |z| = 1\}$ részcsoportja $(\mathbb{C}^*, \cdot)$-nak, de nem részcsoportja $(\mathbb{C}, +)$-nak.

10. Legyen $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = \{z \in \mathbb{C} | z^n = 1\}$ az n-edrendű egységgyökök halmaza. Bizonyítsuk be, hogy $(U_n, \cdot)$ részcsoportja $(\mathbb{C}^*, \cdot)$-nak.

11. Legyen $\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > 0\}$. Bizonyítsuk be, hogy a $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$ és $(\mathbb{R}, +)$ csoportok izomorfak.

12. Legyen $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Bizonyítsuk be, hogy:

(a) $GL_n(\mathbb{C}) = \{A \in M_n(\mathbb{C}) | \det(A) \neq 0\}$ zárt részhalmaz az $(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \cdot)$ monoidban;
(b) $(GL_n(\mathbb{C}), \cdot)$ csoport;
(c) $SL_n(\mathbb{C}) \leq GL_n(\mathbb{C})$, ahol $SL_n(\mathbb{C}) = \{A \in M_n(\mathbb{C}) | \det(A) = 1\}$.

13. Legyen $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}^*$, $f(z) = |z|$ és $g : \mathbb{C}^* \to GL_2(\mathbb{R})$, $g(a+bi) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$. Bizonyítsuk be, hogy:

    (a) f csoportmorfizmus $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ és $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ között;
    (b) g csoportmorfizmus $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ és $(GL_2(\mathbb{R}), \cdot)$ között.

14. Legyen $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Bizonyítsuk be, hogy $(\mathbb{Z}_n, +)$ és $(U_n, \cdot)$ csoportok izomorfak.

15. Legyen G egy csoport és $H_1, H_2 \leq G$ részcsoportok. Bizonyítsuk be, hogy:

    (a) $H_1 \cap H_2 \leq G$;
    (b) $H_1 \cup H_2 \leq G \iff H_1 \subseteq H_2$ vagy $H_2 \subseteq H_1$.

16. Legyenek G és G' csoportok (a semleges elemek 1 illetve $1'$) és $f : G \to G'$ csoportmorfizmus. Bizonyítsuk be, hogy:

    (a) $f(1) = 1'$ és $\forall x \in G : f(x^{-1}) = [f(x)]^{-1}$;
    (b) $\ker f = \{x \in G | f(x) = 1'\} \leq G$ és $\mathrm{Im} f \leq G'$;
    (c) $\ker f = \{1\} \iff f$ injektív;
    (d) ha $H \leq G$ és $H' \leq G' \implies f(H) \leq G'$ és $\overset{-1}{f}(H') \leq G$.

17. Tekintsük a komplex számok halmazán a következő műveletet:

$$(a_1 + b_1 i) * (a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i, \qquad (a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}).$$

    Mutassuk meg, hogy $(\mathbb{C}, +, *)$ egységelemes kommutatív gyűrű, ami nem integritástartomány.

18. Legyen $M \neq \emptyset$ egy halmaz és $(R, +, \cdot)$ gyűrű. Az $R^M = \{f | f : M \to R\}$ függvények halmazán bevezetjük a következő műveleteket: $\forall f, g \in R^M$, $f + g : M \to R$, $f \cdot g : M \to R$, ahol $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ és $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$, $\forall x \in M$. Bizonyítsuk be, hogy $(R^M, +, \cdot)$ a függvények összeadásával és szorzásával gyűrű. Igaz-e, hogy ha R egységelemes (vagy kommutatív vagy integritástartomány), akkor R^M is az?

19. Bizonyítsuk be, hogy ha az R gyűrűben teljesül az $x^2 = x$ egyenlőség minden $x \in R$ elemre, akkor a gyűrű kommutatív.

20. Igazoljuk, hogy a következő struktúrák $\mathbb{C}$-vel izomorf testek:

    (a) $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +, \cdot)$, ahol $(x, y) + (a, b) = (x + a, y + b)$ és $(x, y)(a, b) = (xa - yb, ya + xb)$.
    (b) $K = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} | a, b \in \mathbb{R} \right\}$ a mátrixok összeadásával és szorzásával.

21. Ha $k \in \mathbb{Z}$, legyen $A_k = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ kb & a \end{pmatrix} | a, b \in \mathbb{Z} \right\}$. Igazoljuk, hogy:

    (a) $(A_k, +, \cdot)$ kommutatív egységelemes gyűrű $(A_k \leq \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}))$.
    (b) A_k test $\iff k$ nem teljes négyzet.

22. Legyen R egy gyűrű, $X \subseteq R$ és $C_R(X) = \{r \in R | rx = xr \, \forall x \in X\}$ az X centralizátora. Igazoljuk, hogy $C_R(X) \leq R$, továbbá, hogy ha R test, akkor $C_R(X)$ résztest.