

Algebrai struktúrák

2015. november 21.

1. Legyen (M, \cdot) egy monoid és $U(M)$ az invertálható elemek halmaza. Bizonyítsuk be, hogy $U(M)$ zárt részhalmaza M -nek és $(U(M), \cdot)$ csoportot alkot a leszűkített művelettel.
2. Határozzuk meg az invertálható elemek halmazát a következő monoidok esetében:
 - (a) $(\mathbb{N}, +)$, (\mathbb{N}, \cdot) , (\mathbb{Z}, \cdot) , (\mathbb{Q}, \cdot) , (\mathbb{R}, \cdot) , (\mathbb{C}, \cdot) ;
 - (b) (M^M, \circ) , ahol M egy nemüres halmaz;
 - (c) $(\mathbb{Z}[i], \cdot)$, ahol $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$;
 - (d) $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \cdot)$, ahol $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ az $n \times n$ -es valós mátrixok halmaza;
 - (e) (\mathbb{Z}_4, \cdot)
3. Legyen $A = \{a_1, a_2, a_3\}$. Határozzuk meg:
 - (a) az $A \times A \rightarrow A$ műveletek számát;
 - (b) az $A \times A \rightarrow A$ kommutatív műveletek számát;
 - (c) az $A \times A \rightarrow A$ egységelemes műveletek számát.
4. Legyen $*$: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ egy művelet, ahol $x * y = x + y + xy$. Bizonyítsuk be, hogy:
 - (a) $(\mathbb{R}, *)$ kommutatív monoid;
 - (b) az $[-1, \infty)$ intervallum zárt részhalmaza \mathbb{R} -nek a „ $*$ ” műveletre nézve.
5. Legyen $\lambda \in \mathbb{R}$ és $*$: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ egy művelete, ahol $x * y = xy - 2x - 2y + \lambda$. Határozzuk meg λ értékeit, hogy a $(2, +\infty)$ zárt részhalmaza legyen $(\mathbb{R}, *)$ -nak.
6. Tekintsük \mathbb{R} -en a következő műveletet: $x * y = xy + 2ax + by$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Határozzuk meg azokat az $a, b \in \mathbb{R}$ értékeket, amire $(\mathbb{R}, *)$ kommutatív félcsoport.
7. Legyen $x, y \in \mathbb{R}$ és $x * y = xy - 5x - 5y + 30$. Csoport-e $(\mathbb{R}, *)$? Hát $(\mathbb{R} \setminus \{5\}, *)$?
8. Határozzuk meg (\mathbb{Z}, \cdot) véges zárt részhalmazait!
9. Bizonyítsuk be, hogy $H = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ részcsoportja (\mathbb{C}^*, \cdot) -nak, de nem részcsoportja $(\mathbb{C}, +)$ -nak.
10. Legyen $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$ az n -edrendű egységgyökök halmaza. Bizonyítsuk be, hogy (U_n, \cdot) részcsoportja (\mathbb{C}^*, \cdot) -nak.
11. Legyen $\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$. Bizonyítsuk be, hogy a (\mathbb{R}_+^*, \cdot) és $(\mathbb{R}, +)$ csoportok izomorfak.
12. Legyen $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Bizonyítsuk be, hogy:

- (a) $GL_n(\mathbb{C}) = \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid \det(A) \neq 0\}$ zárt részhalmaz az $(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \cdot)$ monoidban;
- (b) $(GL_n(\mathbb{C}), \cdot)$ csoport;
- (c) $SL_n(\mathbb{C}) \leq GL_n(\mathbb{C})$, ahol $SL_n(\mathbb{C}) = \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid \det(A) = 1\}$.
13. Legyen $f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$, $f(z) = |z|$ és $g : \mathbb{C}^* \rightarrow GL_2(\mathbb{R})$, $g(a + bi) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$. Bizonyítsuk be, hogy:
- (a) f csoportmorfizmus (\mathbb{C}^*, \cdot) és (\mathbb{R}^*, \cdot) között;
- (b) g csoportmorfizmus (\mathbb{C}^*, \cdot) és $(GL_2(\mathbb{R}), \cdot)$ között.
14. Legyen $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Bizonyítsuk be, hogy $(\mathbb{Z}_n, +)$ és (U_n, \cdot) csoportok izomorfak.
15. Legyen G egy csoport és $H_1, H_2 \leq G$ részcsoportok. Bizonyítsuk be, hogy:
- (a) $H_1 \cap H_2 \leq G$;
- (b) $H_1 \cup H_2 \leq G \iff H_1 \subseteq H_2$ vagy $H_2 \subseteq H_1$.
16. Legyenek G és G' csoportok (a semleges elemek 1 illetve 1') és $f : G \rightarrow G'$ csoportmorfizmus. Bizonyítsuk be, hogy:
- (a) $f(1) = 1'$ és $\forall x \in G : f(x^{-1}) = [f(x)]^{-1}$;
- (b) $\ker f = \{x \in G \mid f(x) = 1'\} \leq G$ és $\text{Im} f \leq G'$;
- (c) $\ker f = \{1\} \iff f$ injektív;
- (d) ha $H \leq G$ és $H' \leq G' \implies f(H) \leq G'$ és $f^{-1}(H') \leq G$.
17. Tekintsük a komplex számok halmazán a következő műveletet:
- $$(a_1 + b_1i) * (a_2 + b_2i) = a_1a_2 + (a_1b_2 + a_2b_1)i, \quad (a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}).$$
- Mutassuk meg, hogy $(\mathbb{C}, +, *)$ egységelemes kommutatív gyűrű, ami nem integritástartomány.
18. Legyen $M \neq \emptyset$ egy halmaz és $(R, +, \cdot)$ gyűrű. Az $R^M = \{f \mid f : M \rightarrow R\}$ függvények halmazán bevezetjük a következő műveleteket: $\forall f, g \in R^M$, $f + g : M \rightarrow R$, $f \cdot g : M \rightarrow R$, ahol $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ és $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$, $\forall x \in M$. Bizonyítsuk be, hogy $(R^M, +, \cdot)$ a függvények összeadásával és szorzásával gyűrű. Igaz-e, hogy ha R egységelemes (vagy kommutatív vagy integritástartomány), akkor R^M is az?
19. Bizonyítsuk be, hogy ha az R gyűrűben teljesül az $x^2 = x$ egyenlőség minden $x \in R$ elemre, akkor a gyűrű kommutatív.
20. Igazoljuk, hogy a következő struktúrák \mathbb{C} -vel izomorf testek:
- (a) $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +, \cdot)$, ahol $(x, y) + (a, b) = (x + a, y + b)$ és $(x, y)(a, b) = (xa - yb, ya + xb)$.
- (b) $K = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$ a mátrixok összeadásával és szorzásával.
21. Ha $k \in \mathbb{Z}$, legyen $A_k = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ kb & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}$. Igazoljuk, hogy:
- (a) $(A_k, +, \cdot)$ kommutatív egységelemes gyűrű ($A_k \leq \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$).
- (b) A_k test $\iff k$ nem teljes négyzet.
22. Legyen R egy gyűrű, $X \subseteq R$ és $C_R(X) = \{r \in R \mid rx = xr \forall x \in X\}$ az X centralizátora. Igazoljuk, hogy $C_R(X) \leq R$, továbbá, hogy ha R test, akkor $C_R(X)$ résztest.