Mátrixok

1. Mátrixok determinánsa

$$A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \text{négyzetes } (n \times n\text{-es}) \text{ mátrix}$$

$$\phantom{A = (a_{ij}) \in M_n(}\mathbb{C}$$

Def: $$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)\, a_{1\sigma(1)}\, a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} \quad , \quad |\quad|$$

Példa: 2×2-es mátrixra

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = + a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

$$S_2 : \underset{+1}{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}} , \underset{-1}{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}$$

3×3-as mátrixra

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

$$S_3: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\quad + \qquad\qquad + \qquad\qquad + \qquad\qquad - \qquad\qquad - \qquad\qquad -$$

Tulajd.: $A \in M_n(\mathbb{R})$ $\qquad \det A^t = \det A$

Megj.: $A = (a_{ij})$

$$A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

<u>Tulajd</u>: 1) a determináns lineáris minden egyes oszlopában

$$\left|\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} \\ o^j \\ \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}\right| = \alpha \left|\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} \cdots o_1^j \cdots \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}\right| + \beta \left|\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} \cdots o_2^j \cdots \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}\right|$$

$$o^j = \alpha o_1^j + \beta o_2^j$$

<u>Péld</u>:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} + \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 5 \end{vmatrix}}_{=0}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

2) ha valamelyik oszlop csupa 0 $\Rightarrow$ $\det = 0$

3.) ha 2 oszlop megegyezik $\Rightarrow$ $\det = 0$

4.) ha 2 oszlopot felcserélünk akkor a det előjele változik csak

5.) oszlop számszorosát hozzáadva (kivonva) egy másik oszlophoz a determináns nem változik

6.) j. oszlop szerinti kifejtés:

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \Gamma_{ij}$$, ahol Γ_{ij} az a_{ij} algebrai komplementuma, vagyis $\Gamma_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det A_{ij}$,

ahol A_{ij}-t A-ból kapjuk az i-edik sor és j-edik oszlop törlésével

7.) a fenti igaz sorokra is

8.) $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ $\det(AB) = \det A \cdot \det B$

Példa: 1

$$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2 & a^2 & (a+2)^2 \\ b^2 & b^2 & (b+2)^2 \\ c^2 & c^2 & (c+2)^2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} a^2 & a & (a+2)^2 \\ b^2 & b & (b+2)^2 \\ c^2 & c & (c+2)^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a^2 & 1 & (a+2)^2 \\ b^2 & 1 & (b+2)^2 \\ c^2 & 1 & (c+2)^2 \end{vmatrix} = \dots$$

oszlopok megegyeznek

$$(a+1)^2 = a^2 + 2a + 1$$

$$\begin{pmatrix} a^2 \\ b^2 \\ c^2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a^2 \\ b^2 \\ c^2 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\dots = 2\underbrace{\begin{vmatrix} a^2 & a & a^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}}_{=0} + 8\underbrace{\begin{vmatrix} a^2 & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}}_{=0} + 8\begin{vmatrix} a^2 & a & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} + \underbrace{\begin{vmatrix} a^2 & 1 & a^2 \\ & & \end{vmatrix}}_{=0} + 4\begin{vmatrix} a^2 & 1 & a \\ & & \end{vmatrix} +$$

oszlopcsere

$$+4\underbrace{\begin{vmatrix} c^2 & 1 & 1 \\ & & \end{vmatrix}}_{=0} = 8\begin{vmatrix} a^2 & a & 1 \\ b^2 & b & 1 \\ c^2 & c & 1 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} a^2 & 1 & a \\ b^2 & 1 & b \\ c^2 & 1 & c \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} a^2 & a & 1 \\ b^2 & b & 1 \\ c^2 & c & 1 \end{vmatrix} =$$

előjel -1

$$= 4\begin{vmatrix} a^2 & a & 1 \\ b^2 & b & 1 \\ c^2 & c & 1 \end{vmatrix} = -4\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = -4(c-a)(c-b)(b-a)$$

előjel

csere

3×3 Vandermonde det transzponáltja

Megj: Vandermonde

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (a_j - a_i)$$

(2)

$$\begin{vmatrix} a+b & a+c & b+c \\ a^2+b^2 & a^2+c^2 & b^2+c^2 \\ a^3+b^3 & a^3+c^3 & b^3+c^3 \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} a & a & b \\ & & \\ & & \end{vmatrix}}_{=0} + \underbrace{\begin{vmatrix} a & a & c \\ & & \\ & & \end{vmatrix}}_{=0} + \begin{vmatrix} a & c & b \\ & & \\ & & \end{vmatrix} + \underbrace{\begin{vmatrix} a & c & c \\ & & \\ & & \end{vmatrix}}_{=0}$$

2 oszlop   2 oszlop   2 oszlop +

8 det +

$$+ \underbrace{\begin{vmatrix} b & a & b \\ & & \\ & & \end{vmatrix}}_{=0} + \begin{vmatrix} b & a & c \\ & & \\ & & \end{vmatrix} + \underbrace{\begin{vmatrix} b & c & b \\ & & \\ & & \end{vmatrix}}_{=0} + \underbrace{\begin{vmatrix} b & c & c \\ & & \\ & & \end{vmatrix}}_{=0} =$$

$$= \begin{array}{c} \begin{matrix} a & b & c \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} a & c & b \\ a^2 & c^2 & b^2 \\ a^3 & c^3 & b^3 \end{vmatrix} \end{array} + \begin{array}{c} \begin{matrix} a & b & c \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} b & a & c \\ b^2 & a^2 & c^2 \\ b^3 & a^3 & c^3 \end{vmatrix} \end{array} = -2 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = -2abc \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}}_{\text{Vandermonde}} =$$

$-$ csere $-$ csere

$$= -2abc\,(c-a)(c-b)(b-a)$$

3

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix} = -abc + abc = 0$$

$$-A = -(a_{ij}) = $$
$$= (-a_{ij})$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & a & b & c & d \\ -a & 0 & e & f & g \\ -b & -e & 0 & h & i \\ -c & -f & -h & 0 & j \\ -d & -g & -i & -j & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$A^t = -A \quad / \det$$

$$\det A = \det A^t = \det(-A) = (-1)^5 \cdot \det A$$
$$5 \times 5 \qquad = -\det A$$

$$\Rightarrow 2 \det A = 0 \Rightarrow \det A = 0$$

páratlan dimenziós antiszimmetrikus mátrix $\det = 0$

4

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & a & b \\ 1 & c & a \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & a-b & b-c \\ 0 & c-b & a-c \end{vmatrix}$$

1 oszlop szerint fejtjük ki

$$= (a+b+c)\left(\underbrace{(a-b)(a-c)+(b-c)^2}\right)$$

$$= f(1)\, f(\varepsilon_1)\, f(\varepsilon_2) =$$

$$= (a+b+c)\underbrace{(a+b\varepsilon_1+c\varepsilon_1^2)(a+b\varepsilon_2+c\varepsilon_2^2)}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \end{vmatrix} =$$

$$\det A \cdot \det B = \det AB$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon_1 & \varepsilon_2 \\ 1 & \varepsilon_1^2 & \varepsilon_2^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f(1) & f(\varepsilon_1) & f(\varepsilon_2) \\ 1\cdot f(1) & \varepsilon_1 f(\varepsilon_1) & \varepsilon_2 f(\varepsilon_2) \\ 1^2 f(1) & \varepsilon_1^2 f(\varepsilon_1) & \varepsilon_2^2 f(\varepsilon_2) \end{vmatrix} = f(1)\, f(\varepsilon_1)\, f(\varepsilon_2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon_1 & \varepsilon_2 \\ 1 & \varepsilon_1^2 & \varepsilon_2^2 \end{vmatrix}$$

$\varepsilon_i^3 = 1$

$1,\ \underset{\varepsilon_1}{\varepsilon},\ \underset{\varepsilon_2}{\varepsilon^2}$

$$f = a + bX + cX^2$$

$$c + a\varepsilon_1 + b\varepsilon_1^2 = \varepsilon_1 f(\varepsilon_1)$$

$$\varepsilon_1(a + b\varepsilon_1 + c\varepsilon^2)$$

5

$$\begin{vmatrix} 1+x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1 & 1+x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & 1+x_n \end{vmatrix} = (1+x_1+x_2+\cdots+x_n) \begin{vmatrix} 1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 1 & 1+x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_2 & \cdots & 1+x_n \end{vmatrix}$$

$+$

$$= (1+x_1+\cdots+x_n) \begin{vmatrix} 1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = (1+x_1+\cdots+x_n) \underbrace{\det I_{n-1}}_{=1}$$

$$= 1+x_1+\cdots+x_n$$

2. Mátrix hatványa, Cayley–Hamilton

$$A^m = \underbrace{A \cdot A \cdots \cdot A}_{m\text{-szer}} \quad , \quad A \in M_n(\mathbb{R})$$

2×2-es mátrixra Cayley–Hamilton:

$A \in M_2(\mathbb{R})$ $\qquad \boxed{A^2 - \operatorname{Tr} A \cdot A + \det A \cdot I_2 = O_2}$ mátrix azonosság

ahol $\operatorname{Tr} A = A$ nyoma $=$ főátló elemeinek összege $=$

$= a_{11} + a_{22}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Példák

(1) $A \in M_2(\mathbb{R})$ $\quad A^{2021} = O_2$ $\quad A = ?$ $\quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$A^2 - \cancel{(a+d)}A + \cancel{\underbrace{(ad-bc)}_{\det A} I_2} = O$$

$$A^{2021} = O_2 \ / \det \Rightarrow \det(A^{2021}) = (\det A)^{2021} = 0 \Rightarrow \det A = 0$$

$$\det A^n = (\det A)^n$$

$$\underset{C-H}{\Rightarrow} \quad A^2 = (a+d)A \ / \cdot A^{2019}$$

$$\underline{O_2} = A^{2021} = (a+d)A^{2020} = \underline{(a+d)^{2020} \cdot A}$$

$\underline{1 \text{ eset}}$: $a+d = 0 \Rightarrow A^2 = O_2$ $\Big\} \Longrightarrow A^2 = O_2$

$\underline{2 \text{ eset}}$: $A = O_2$

$$\begin{pmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2+bc \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a^2+bc=0 \\ d^2+bc=0 \\ \underline{b(a+d)}=0 \\ \underline{c(a+d)}=0 \end{cases}$$

$a, b, c, d \in \mathbb{R}$

$b=0 \vee c=0 \Rightarrow a=d=0$ $\quad \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$

$b, c \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} a+d=0 \\ a^2+bc=0 \end{cases}$ $\quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$

$a^2+bc=0$

$\begin{pmatrix} a^3 & 3a^2b+3b^2a+b^3 \\ 0 & (a+b)^3 \end{pmatrix}$

n

② $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a+b \end{pmatrix}$ $\quad A^n = ?$

<u>1Megold</u> $A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a+b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab+b^2 \\ 0 & (a+b)^2 \end{pmatrix}, \quad A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab+b^2 \\ 0 & (a+b)^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a+b \end{pmatrix}$

sejtés $A^n = \begin{pmatrix} a^n & (a+b)^n - a^n \\ 0 & (a+b)^n \end{pmatrix}$

biz indukcióval $n = 1, 2, 3$ ✓

elf n-re is $n+1$-re

$$A^{n+1} = \underset{\text{ind. felt}}{A^n} \cdot A = \begin{pmatrix} a^n & (a+b)^n - a^n \\ 0 & (a+b)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{n+1} & (a+b)^{n+1} - a^{n+1} \\ 0 & (a+b)^{n+1} \end{pmatrix}$$

$$a^n b + \left((a+b)^n - a^n\right)(a+b) =$$
$$= (a+b)^{n+1} - a^{n+1}$$

2. Megold: Newton-binomiális

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a+b \end{pmatrix} = B + \alpha \cdot I_2 = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & b \end{pmatrix} + a I_2 \quad !$$

mindenképp egységmátrix legyen, mert a mátrixok szorzata itt fo— kell legyen (ált. mátrix szorzat nagyon nem fo—)

$$A^0 = I_2$$

$$A^n = \left(b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + a I_2 \right)^n =$$

$$= C_n^0 b^n \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n}_{= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} + C_n^1 b^{n-1} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{n-1}}_{= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} a I_2 + \dots$$

$$\dots + C_n^n a^n I_2^n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\left(C_n^0 b^n + C_n^1 b^{n-1} a + \dots + C_n^{n-1} b a^{n-1} \right)}_{(a+b)^n - a^n} + C_n^n a^n I_2^n =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left((a+b)^n - a^n \right) + \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & a^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^n & (a+b)^n - a^n \\ 0 & (a+b)^n \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(3)

$$A = \begin{pmatrix} a & a & b \\ 0 & a & a \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \qquad A^n = ?$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & a & b \\ 0 & a & a \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & a & b \\ 0 & a & a \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 2a^2 & a^2+2ab \\ 0 & a^2 & 2a^2 \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix} \qquad n$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} a^3 & 3a^3 & 3a^3+3a^2b \\ 0 & a^3 & 3a^3 \\ 0 & 0 & a^3 \end{pmatrix}$$

$a^3 + 2a^2b + 2a^3 + a^2b$

$A^4 \quad 3a^4 + 3a^3b + 3a^4$

$6a^4 + 4a^3b$

indukcijal

$$A^n = \begin{pmatrix} a^n & na^n & \frac{n(n-1)}{2}a^n + na^{n-1}b \\ 0 & a^n & na^n \\ 0 & 0 & a^n \end{pmatrix}$$

1

$3 = 1+2 \leftarrow 3$

$6 = 1+2+3$

$10 = 1+2+3+4$

$\frac{n(n-1)}{2} \overset{?}{=} 1 + \ldots + n-1 \leftarrow n$

$$A = aI_3 + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{B}$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B^3 = O_3$$

$$B^3 = O_3$$
$$B^l = O_3 \quad l \geq 3$$

$$A^n = C_n^0 a^n I_3^n + C_n^1 a^{n-1} \underbrace{I_3^{n-1} B}_{B} + C_n^2 a^{n-2} I_3^{n-2} B^2 =$$

$$= \begin{pmatrix} a^n & na^n & na^{n-1}b \\ 0 & a^n & na^n \\ 0 & 0 & a^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2}\cdot a^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^n & na^n & \frac{n(n-1)}{2} a^n + na^{n-1}b \\ 0 & a^n & na^n \\ 0 & 0 & a^n \end{pmatrix}$$

(4) $A \in M_3(\mathbb{R})$, $\mathbb{C}$ $\qquad A^{2007} - 2007 \cdot A - I_3 = O_3$

$\text{rang}\, A = ?$, $\text{rang}\,(2007A + I_3) = ? = \text{rang}\, A^{2007}$

$A^{2007} = 2007 \cdot A + I_3 \Rightarrow$

Minden mátrix $\mathbb{R}$ v $\mathbb{C}$-felett triangularizálható $\mathbb{C}$-felett!

$A^2 = T^{-1} D \underbrace{T T^{-1}}_{I} D T$

$$\begin{pmatrix} a_1 & * & * \\ & a_2 & * \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A = T^{-1} \underbrace{\begin{pmatrix} \diagdown & \\ 0 & \diagdown \end{pmatrix}}_{D} T \quad \mathbb{C}\text{-felett}}$$

$A^n = T^{-1} D^n T$

$\text{rang}\, A = \text{rang}\, D$

rang nem változik ha balról jobbról invertálhatóval mátrixal szorozunk

$A \longleftrightarrow D$

$T^{-1}\left(D^{2007} - 2007 D - \underset{T^{-1} \cdot T}{I_3}\right) \cancel{T} = O_3$

$$D^{2007} = 2007 D + I_3 = \begin{pmatrix} 1+ & * & * \\ & 1+ & * \\ 0 & & 1+ \end{pmatrix}.$$

Ha $\underline{\det D = 0}$ $\quad D = \begin{pmatrix} a_1 & * & * \\ 0 & a_2 & * \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \exists i : \underline{a_i = 0}$

<u>Megj</u>: $A \in M_n(\mathbb{R})$ $\quad f_n(A) = O_n$ ahol f polinom

$$a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \ldots + a_1 A + a_0 I_n = O_n$$

akkor a triangulációs alak főátlóján levő elemek gyökei kell legyenek f-nek.

Ha $\det D = 0 \Rightarrow$ valamelyik eleme a f-ü-a'ltlán $= 0 \Rightarrow$ megoldás
gyöke $f = X^{2007} - 2007X - 1$ -nek

$$A^{2007} - 2007A - I_3 = O_3$$

Tehát $\det D \neq 0 \Rightarrow \det D^{2007} \neq 0 \Rightarrow \det(2007D + I_3) \neq 0$

$$\underbrace{\det D^{2007}}_{= (\det D)^{2007}}, \quad D^{2007} = 2007D + I_3$$

$$\text{rang } D = \text{rang } (2007D + I_3) = \text{rang } A = \text{rang}(2007A + I_3) = 3$$

3. Lineáris egyenletrendszerek

(Mátrix rangja)

n ismeretlenek száma

m az egyenletek száma

$$(S)\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{1m}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$A = (a_{ij})$ a rendszer mátrixa

$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ a szabadtagok oszlopa

Tétel (Kronecker–Capelli): (S) kompatibilis (van megoldása) $\iff$ $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}(A\ b)$

$(A\ b) =: \bar{A}$ a bővített rendszermátrix

(S) homogén ha $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

Homogén rendszer mindig kompatibilis mert $x_1 = \dots = x_n = 0$ is triviális megoldás

Homogén rendszernek csak triviális megoldása van

$\Longleftrightarrow$ rang $A = n =$ ismeretlenek száma

(Ha A négyzetes rang $A = n \Longleftrightarrow \det A \neq 0$)

Tulajd: Ha $n = m$ (vagyis A négyzetes)

(S) kompatibilis és egyetlen megoldása van $\Longleftrightarrow$ $\underline{\det A \neq 0}$

(vagyis (S) Cramer rendszer)

és ezekben az egyetlen megoldás $x_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\det A}, \dots, x_n = \dfrac{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & b_1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & b_n \end{vmatrix}}{\det A}$

(S) határozatlansági foka (kompatibilitás esetén)

$$n - \operatorname{rang} A = \text{mellékismeretlenek száma}$$

$$\operatorname{rang} A = \text{főismeretlenek száma}$$

Ha (S) kompatibilis akkor elég rang A-nyi egyenletet megtartani, ezek kiadják a rangot (mellékegyenletek elhagyhatóak) $\longrightarrow$ az új rendszerben az egyenletek száma = = rang A-val.

Példa: ① Oldjuk meg

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + x_4 + x_6 = 4 \\ -x_1 + x_2 - 2x_4 + x_5 + \beta x_6 = -2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + \alpha x_5 + x_6 = \gamma \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -2 & 1 & \beta \\ 1 & 1 & 2 & 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ \gamma \end{pmatrix}$$

Tárgyalás! $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -2 & 1 & \beta \\ 1 & 1 & 2 & 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix}$$

rangmeghatározás <u>elemi transzformációkkal</u> (rangőrzőek)

- skalárral szorozni, osztani sort, oszlopot
- fel lehet cserélni sort sorral, oszlopot oszloppal
- sor skalárszorosát hozzá lehet adni sorhoz (oszlophoz) (oszlop)

Cél

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & 0 & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 1 & & \\ & 0 & & & 0 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

rang = 1-esek száma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$/:-1 \quad /:-2$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{rang} = 2$$

Visszatérve a feladatunkhoz

$$\text{rang } A: \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -2 & 1 & \beta \\ 1 & 1 & 2 & 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & \beta+1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & \alpha & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & \beta+1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & \alpha & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & \beta+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha-1 & -\beta-1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{\alpha-1} & \boxed{-\beta-1} \end{pmatrix}$$

$\text{rang } A = 2 \iff \alpha = 1$ és $\beta = -1$

$\text{rang } A = 3 \iff \alpha \neq 1$ vagy $\beta \neq -1$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 0 & -2 & 1 & \beta & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & \alpha & 1 & \gamma \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{rang} \tilde{A} : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & \beta+1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & \alpha & 0 & \gamma-4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha-1 & -\beta-1 & \gamma-6 \end{pmatrix}$$

$\operatorname{rang} \tilde{A} = 2 \iff \alpha = 1$ és $\beta = -1$ és $\gamma = 6$

különben $\operatorname{rang} \tilde{A} = 3$

(S) kompatibilis $\iff \operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \bar{A}$ vagyis ha

$\alpha = 1$ $\beta = -1$ és $\gamma = 6$ $(\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \bar{A} = 2)$

vagy ha $\alpha \neq 1$ vagy $\beta \neq -1$ $(\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \bar{A} = 3)$

1 eset $\quad \alpha = 1 \quad \beta = -1 \quad \gamma = 6$

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + x_4 + x_6 = 4 \\ -x_1 + x_2 - 2x_4 + x_5 - x_6 = -2 \\ \cancel{x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 + x_6 = 6} \end{cases}$$

$+$ $\quad x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 2$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$$

$\rightsquigarrow$ rang $A = 2$

2 fő-ism 2 főegyenlet

hat föla $= 6 - 2 = 4$

4 mellékismeretlen v.

$\underset{a}{x_3}, \underset{b}{x_4}, \underset{c}{x_5}, \underset{d}{x_6}$ paraméterek.

$$\begin{cases} x_1 = 4 - a - b - d \\ x_2 = 2 - a + b - c \end{cases}$$

2 eset : $\alpha \neq 1 \vee \beta \neq -1$ $\quad \rightsquigarrow$ rang $A = 3$

3 fő-ism 3 főegyenlet

3 mellékism $=$ hat föla

$\alpha \neq 1$

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + x_4 + x_6 = 4 \\ -x_1 + x_2 - 2x_4 + x_5 + \beta x_6 = -2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + \alpha x_5 + x_6 = \gamma \end{cases}$$

$\beta \neq -1$

fixăm x_1, x_2, x_5 [illegible] $\overset{a}{x_3}, \overset{b}{x_4}, \overset{c}{x_6}$

fixăm x_1, x_2, x_6

aplicăm Cramer.

$$\begin{cases} x_1 = 4 - a - b - c = b_1 \\ -x_1 + x_2 + x_5 = 2b - \beta c - 2 = b_2 \\ x_1 + x_2 + \alpha x_5 = -2a - c + \gamma = b_3 \end{cases}$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ b_2 & 1 & 1 \\ b_3 & 1 & \alpha \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{vmatrix}}$$