

Șiruri

1. Consideram șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definit prin

$$a_0 = 0, a_1 = 1, a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{2}, \quad \forall n \geq 2.$$

- Este șirul monoton?
- Dar convergent?
- Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

2. Definim șirul de numere reale prin relația

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

cu $a_0 \in [-2, 2]$ fixat.

- Aratați că șirul este convergent
- Calculați limita sa
- Determinați expresia termenului general $a_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

3. (*admitere 2021* - simultan 2 probleme)

Pentru orice $n \in \mathbb{N}$ se notează

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2} dx$$

$$I_n = \int_1^e (\ln x)^n dx$$

a) Aratați că șirul $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ verifică relația de recurență

$$I_{n+1} + I_n = \frac{1}{2n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$I_{n+1} + (n+1)I_n = e, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

b) Justificați că $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$

c) Calculați apoi $\lim_{n \rightarrow \infty} nI_n$

d) Calculați și $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_n}{I_{n+1}}$