Probleme și Teste Grilă de Matematică pentru
Admiterea la Facultatea de Matematică și Informatică
Universitatea Babeș-Bolyai
2025

UNIVERSITATEA BABEȘ-BOLYAI
BABEȘ-BOLYAI TUDOMÁNYEGYETEM
BABEȘ-BOLYAI UNIVERSITÄT
BABEȘ-BOLYAI UNIVERSITY
TRADITIO ET EXCELLENTIA

Versiune din 12.03.2025

Probleme și Teste Grilă de Matematică pentru Admiterea la Facultatea de Matematică și Informatică Universitatea Babeș-Bolyai 2025

Coordonatori – autori:

lect. dr. Mihai Nechita

stud. Rareș Cotoi

stud. Cristian Crețu

Autori:

stud. Luca Crețu

stud. Mara Ielciu

stud. Ariana Ilieș

stud. Patricia Manciu

stud. Rareș Răhăian

Contributori:

prof. emer. dr. Dorel Duca
prof. dr. Simion Breaz
prof. dr. Septimiu Crivei
prof. dr. Mirela Kohr
prof. dr. Andrei Mărcuș
prof. dr. Sanda Micula
prof. dr. Adrian Petrușel
prof. dr. Nicolae Popovici†
cerc. pr. Maria Crăciun
conf. dr. Szilárd András
conf. dr. Cristina Blaga
conf. dr. Paul Blaga
conf. dr. Brigitte Breckner
conf. dr. Adriana Buică
conf. dr. Teodora Cătinaș
conf. dr. Zoltán Finta
conf. dr. Tamás László
conf. dr. Hannelore Lisei
conf. dr. Cosmin Pelea
conf. dr. Gabriela Petrușel
conf. dr. Cornel Pintea
conf. dr. Natalia Roșca
conf. dr. Agoston Róth
conf. dr. Tiberiu Trif
lect. dr. Ștefan Berinde
lect. dr. Anca Grad
lect. dr. Mihai Iancu
lect. dr. Andor Lukács
lect. dr. Ildikó Mezei
lect. dr. Veronica Nechita
lect. dr. Iulian Simion
lect. dr. Zsolt Szilágyi
lect. dr. István Szöllősi
lect. dr. George Țurcaș
asist. dr. Florin Albișoru
asist. dr. Sándor Kajántó
asist. dr. Tudor Micu
drd. Andrei Gasparovici
drd. Eduard Grigoriciuc
drd. Andra Malina
drd. Cristian Rafiliu
stud. Ioana Gavrilă
stud. Florin Grigore
stud. George Lung
stud. Claudiu Pop

Probleme și Teste Grilă de Matematică pentru Admiterea la Facultatea de Matematică și Informatică Universitatea Babeș-Bolyai 2025

Coordonatori:

Mihai Nechita
Rareș Cotoi Cristian Crețu

Presa Universitară Clujeană
2024

Referenți științifici:
prof. univ. emer. dr. Octavian Agratini
prof. univ. emer. dr. Dorel Duca

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României
Probleme și teste grilă de matematică pentru Admiterea la Facultatea de Matematică și Informatică, Universitatea Babeș-Bolyai: 2025 /
Mihai Nechita (coord.), Rareș-Andrei Cotoi (coord.),
Cristian-Emanuel Crețu (coord.), ... – Cluj-Napoca:
Presa Universitară Clujeană, 2024
Conţine bibliografie
ISBN 978-606-37-2362-9

I. Nechita, Mihai
II. Cotoi, Rareș-Andrei
III. Crețu, Cristian-Emanuel

51
37

Universitatea Babeș-Bolyai
Presa Universitară Clujeană
Director: Codruța Săcelean
Strada Hasdeu nr. 51
400371 Cluj-Napoca, România
Tel.: (+40)-0264-597401
Email: editura@ubbcluj.ro
editura.ubbcluj.ro
libraria.ubbcluj.ro

Prefață

Cartea este destinată elevilor de liceu care doresc să își aprofundeze cunoștințele de matematică și să se pregătească în mod eficient pentru examenul de admitere la Facultatea de Matematică și Informatică a Universității Babeș-Bolyai din Cluj-Napoca. Scopul nostru este să oferim o resursă cuprinzătoare care să ajute atât la înțelegerea conceptelor fundamentale de matematică, cât și la dezvoltarea abilităților de rezolvare a problemelor complexe.

Prima parte a cărții conține probleme de antrenament organizate pe capitole (algebră, analiză matematică, geometrie, trigonometrie). A doua parte conține testele de la toate sesiunile de admitere și de la toate edițiile concursului Mate-Info UBB dintre 2021 și 2024, precum și o serie suplimentară de teste de antrenament. A treia (și ultima) parte conține răspunsurile corecte și rezolvări pentru toate problemele din culegere.

Inițiativa și efortul principal de realizare a acestei cărți se datorează următorilor studenți: Rareș-Andrei Cotoi, Cristian-Emanuel Crețu, Tudor-Luca Crețu, Mara Ielciu, Ariana Ilieș, Patricia Manciu și Rareș Răhăian. Aceștia au propus probleme, au redactat soluții și au editat materialul sub coordonarea lect. dr. Mihai Nechita, cu sprijinul departamentului de matematică și al comisiei de admitere nivel licență – condusă de conf. dr. Szilárd András și formată din conf. dr. Tiberiu Trif (analiză matematică), lect. dr. Andor Lukács (algebră) și lect. dr. Ildikó Mezei (geometrie și trigonometrie). Le mulțumim tuturor cadrelor didactice și studenților care au contribuit la realizarea materialului prin propunerea de probleme, redactarea de soluții și realizarea de corecturi. Adresăm mulțumiri speciale pentru ajutorul acordat prof. dr. Andrei Mărcuș (director departament matematică), conf. dr. Marcel Șerban (decan), prof. dr. Adrian Petrușel (prorector).

Îi rugăm pe cei care observă erori (care aproape sigur s-au strecurat, în ciuda eforturilor noastre) sau au sugestii de îmbunătățire să îi contacteze pe coordonatorii culegerii.

De asemenea, le urăm mult succes elevilor în pregătirea lor pentru examenul de admitere și sperăm să-i întâlnim pe mulți dintre ei în sălile Facultății de Matematică și Informatică.

Cluj-Napoca, octombrie 2024 *Coordonatorii*

Cuprins

Partea

I

Probleme

1

Algebră

Aritmetică și Divizibilitate

1. Notăm cu A mulţimea numerelor naturale n care au ultima cifră 6 şi au proprietatea că dacă mutăm această cifră în faţa numărului, obţinem un număr de 4 ori mai mare. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

- $\boxed{\text{A}}$ Dacă $n \in A$, atunci $3 \mid n$;
- $\boxed{\text{B}}$ Există $n \in A$ astfel încât $12 \mid n$;
- $\boxed{\text{C}}$ Există $n \in A$ care are 8 cifre;
- $\boxed{\text{D}}$ Există $n \in A$ care are toate cifrele diferite două câte două.

2. Câte numere naturale n nu au proprietatea că $\sqrt{2n^3 + 13n + 2} \in \mathbb{N}$? ✓ ?

$\boxed{\text{A}}$ 5; $\boxed{\text{B}}$ o infinitate; $\boxed{\text{C}}$ nici unul; $\boxed{\text{D}}$ 1.

3. Pentru câte valori ale lui $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ numărul a_n este pătrat perfect, unde $a_n = 1 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 5 \cdot 6 + ... + \left(\frac{(n-1)\,n}{2} + 1\right)\left(\frac{(n-1)\,n}{2} + 2\right) ... \left(\frac{n\,(n+1)}{2}\right)$? ✓ ?

- $\boxed{\text{A}}$ pentru nici una;
- $\boxed{\text{C}}$ pentru două valori;
- $\boxed{\text{B}}$ pentru o valoare;
- $\boxed{\text{D}}$ pentru o infinitate de valori.

4. Dacă $x = \dfrac{\sqrt{\sqrt{5}+2} + \sqrt{\sqrt{5}-2}}{\sqrt{\sqrt{5}+1}} + \dfrac{\sqrt{\sqrt{5}+2} + \sqrt{\sqrt{5}-2}}{2\sqrt{\sqrt{5}+1}} - \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$, atunci x^2 are valoarea: ✓ ?

$\boxed{\text{A}}$ $\dfrac{\sqrt{2}}{2} + 1$; $\boxed{\text{B}}$ $\dfrac{3}{2} + \sqrt{2}$; $\boxed{\text{C}}$ $\dfrac{1}{2} - \sqrt{2}$; $\boxed{\text{D}}$ $\dfrac{\sqrt{2}}{2} - 1$.

5. Fie a_n o progresie aritmetică cu rația $r \neq 0$ și $a_1 = 1$. Pentru $\forall n \geq 1$ expresia $C = \dfrac{a_{2n} + a_{2n-1} + ... + a_{n+1}}{a_n + a_{n-1} + ... + a_1}$ rămâne constantă. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A $a_{31} = 63$;

B $a_{15} = 29$;

C Rația este egală cu valoarea raportului;

D $C = 3$.

6. Câte numere întregi pozitive de patru cifre există care conțin blocul 25 și sunt divizibile cu 75? (2250 și 2025 sunt două astfel de numere). ✓ ?

A 62; B 31; C 34; D 63.

7. Fie trei numere întregi pozitive a, b și c astfel încât $21a = 9b = 7c$ și $a + 8, b$ și c sunt o progresie aritmetică. Care sunt aceste valori a, b, c ? ✓ ?

A $a = 21, b = 49, c = 81$;

B $a = 12, b = 28, c = 36$;

C $a = 42, b = 105, c = 126$;

D $a = 6, b = 14, c = 18$.

8. Dacă n este un multiplu de 5 și $n = p^2 \cdot q$, unde p și q sunt numere prime, care dintre următoarele este cu siguranță multiplu de 25? ✓ ?

A p^2; B q^2; C pq; D p^2q^2.

9. Fie p un număr prim mai mare decât 3. Care dintre următoarele afirmații este adevărată pentru $p^2 - 1$? ✓ ?

A Expresia este divizibilă cu 12, dar nu și cu 24;

B Expresia este divizibilă cu 18, dar nu și cu 24;

C Expresia este divizibilă cu 24;

D Expresia este divizibilă cu 36, dar nu și cu 24.

10. În care dintre următoarele situații n divide $2^n - 2$? ✓ ?

A n este un număr prim;

B n este un număr impar;

C n este o putere a lui 2;

D n este o putere a lui 2 sau un număr prim.

11. Fie progresia aritmetică $a_1, a_2, ...a_n$ cu rația r. Știind că $a_1 = 1$ și $a_{25} = 121$, câte pătrate perfecte sunt în progresie? ✓ ?

A 3; B 4; C 5; D 6.

12. Fie o progresie aritmetică unde al cincilea termen este de trei ori mai mare decât al doilea, iar al nouălea este mai mare decât al treilea cu 24. Care este primul termen și rația progresiei? ✓ ?

A $a_1 = 1$ și $r = 4$; B $a_1 = 2$ și $r = 3$; C $a_1 = 3$ și $r = 2$; D $a_1 = 2$ și $r = 4$.

13. Două progresii aritmetice sunt definite ca $a_n = 3n + 7$ și $b_m = 5m + 2$. Care este cea mai mică valoare a lui k pentru care $a_k \in b_m$? ✓ ?

A $k = 8$; B $k = 6$; C $k = 5$; D $k = 9$.

Combinatorică

14. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. În planul xOy considerăm o mulţime $\mathcal{M}$ formată din n puncte distincte diferite de O. Numărul tuturor triunghiurilor $\triangle AOB$ cu $A, B \in \mathcal{M}$ este: ✓ ?

A A_n^2; B 2^n; C C_{n+1}^3; D cel mult C_n^2.

15. Fie M o mulțime cu n elemente. În câte moduri posibile putem alege trei submulțimi disjuncte $A, B, C \subseteq M$? ✓ ?

A $3n!$; B 3^n; C 4^n; D C_n^3.

16. Mulţimea numerelor n care verifică inegalitatea $C_{n-1}^5 + C_{n-1}^4 < C_n^{n-3}$ este: ✓ ?

A $(-1, 8)$; B $\{3, 4, 5, 6, 7\}$; C $\{6, 7\}$; D $[8, \infty) \cap \mathbb{N}$.

17. Notăm cu $\mathcal{F}$ mulţimea tuturor funcţiilor cu domeniul $\{0, 1, 2, 3\}$ şi codomeniul $\{1, 2, 3, 4\}$. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate? ✓ ?

A Mulţimea $\mathcal{F}$ conţine 4^3 funcţii;

B Mulţimea $\mathcal{F}$ conţine 4 funcţii strict monotone;

C Mulţimea $\mathcal{F}$ conţine 4 funcţii injective;

D Probabilitatea ca o funcţie f aleasă aleator din mulţimea $\mathcal{F}$ să verifice $f(0) = f(1) = 1$ este $\dfrac{1}{16}$.

18. Dacă $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ şi $x = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\left(C_{n+1}^{k+1}\right)^4}{C_n^k C_n^{k+1}}$, atunci: ✓ ?

A $x \geq 16\left(C_{2n}^n - 1\right)$; C $x = 16C_{2n}^n$;

B $x < 16\left(C_{2n}^n - 1\right)$; D $x \geq 16C_{2n}^n - 17$.

19. Câte funcții $f : \{1, 2, ..., n\} \to \{0, 1\}$ au proprietatea că $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(k) = 3$? ✓ ?

A C_n^2;

B C_n^3;

C $A_n^2 \cdot \frac{1}{2}$;

D 120, când $n = 10$.

20. Considerând mulțimile $A = \{1, 2, 3, 4\}$ și $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, care este numărul funcțiilor $f : A \to B$ strict descrescătoare? Dar numărul funcțiilor $f : B \to A$ crescătoare? ✓ ?

A C_6^4, A_9^3;   B C_6^4, C_{10}^4;   C A_6^4, C_9^3;   D C_6^4, C_9^3.

21. Suma $1 + 2C_n^1 + 3C_n^2 + ... + (n+1)C_n^n$ este egală cu: ✓ ?

A $n \cdot 2^{n-1}$;

B $2^{n-1}(n+2)$;

C $2^n(n+2)$;

D $\sum_{k=0}^{n} C_n^k + n \cdot 2^{n-1}$.

22. Suma $C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + ... + \frac{1}{n+1}C_n^n$ este egală cu: ✓ ?

A $\frac{2^n - 1}{(n+1)!}$;   B $\frac{2^{n+1} - 1}{n+1}$;   C $\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} C_n^k$;   D $\frac{2^{n-1} - 1}{n+1}$.

23. Fie dezvoltarea $(\sqrt{2} + \sqrt[3]{3})^n$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A Dacă $n = 15$, dezvoltarea are exact 3 termeni raționali;

B Dacă $n = 24$, dezvoltarea are exact 5 termeni iraționali;

C Dacă $n = 30$, termenul corespunzător pentru $k = 18$ este irațional;

D Dacă $n = 18$, termenul corespunzător pentru $k = 9$ este irațional.

24. Pe dreptele $d_1 || d_2$ se consideră punctele distincte A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, $A_6 \in d_1$ şi B_1, B_2, B_3, B_4, $B_5 \in d_2$. Numărul triunghiurilor care se pot forma cu aceste puncte este: ✓ ?

A 120;   B 124;   C 135;   D 140.

Funcții logaritmice și exponențiale

25. Fie x și y, numere reale pozitive, $x, y > 1$, astfel încât $\log_x(y^x) = \log_y(x^{ey}) = 2\sqrt{\pi}$. Să se indice care dintre următoarele variante reprezintă valoarea lui $x \cdot y$. ✓ ?

A $\frac{\pi^2}{e}$;   B $\frac{4\pi}{e}$;   C $\frac{\pi}{e}$;   D $\frac{2\sqrt{\pi}}{e}$.

26. Fie $f : \mathbb{E} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_3 x + \log_{\sqrt{x}} x - \log_{\frac{1}{3}} x - 6$. Aici $\mathbb{E} \subset \mathbb{R}$ este domeniul maxim de definiție al lui f. Atunci: ✓ ?

A $\mathbb{E}$ este un interval deschis;

B ecuația $f(x) = 0$ are o singură soluție;

C există un șir nemărginit $(x_n)_{n\geq 1}$ cu proprietatea că $f(x_n) > 0$;

D există un șir nemărginit $(x_n)_{n\geq 1}$ cu proprietatea că $f(x_n) < 0$.

27. Dacă $\log_{12} 27 = a$, atunci valoarea lui $\log_6 16$ este: ✓ ?

A $\frac{4}{a}$; B $\frac{4(3-a)}{3+a}$; C $\frac{4+a}{4-a}$; D $\frac{4(3+a)}{3-a}$.

28. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi numerele reale $a_1, a_2, ..., a_n > 1$. Dacă $L = \log_{a_1^n} a_2 + \log_{a_2^n} a_3 + ... + \log_{a_{n-1}^n} a_n + \log_{a_n^n} a_1$, atunci: ✓ ?

A $L \geq 1$; B $L > 1$; C $L < 1$; D $L = 1$.

29. Fie ecuația $(\sqrt{x} - 2)^3 + \ln x = 0$ și $I = [1, 4]$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A Există cel puțin o soluție a ecuației pe intervalul I;

B Nu există nicio soluție pe intervalul I;

C Există cel puțin o soluție pe intervalul $(1, 4]$;

D Funcția $f(x) = (\sqrt{x} - 2)^3 + \ln x$ nu este definită pentru $x = 0$, deci nu există nicio soluție pe intervalul dat.

30. Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x+1, x < 1 \\ 4 - \log_{\sqrt[4]{2}}(x), x \geq 1 \end{cases}$. Pentru ce valori ale lui c ecuația $f(x) = c$ are exact 2 soluții? ✓ ?

A $c = 2$; B $c = 1$; C $c = 3$; D $\forall c < 2$.

31. Fie S mulțimea soluțiilor reale ale ecuației $\log_3 x + \log_9 x^2 + \log_{27} x^3 + ... + \log_{3^n} x^n = n$, atunci: ✓ ?

A $S \subseteq [0, 1)$;

B $S \subseteq [1, 3)$;

C S are exact 1 element;

D S are exact 3 elemente.

32. Fie sistemul ✓ ?

$$\begin{cases} 4^{\frac{y}{x} + \frac{x}{y}} = 32 \\ \log_9(x - y) + \log_9(x + y) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Care dintre următoarele perechi (x, y) sunt soluții ale sistemului?

A $(2, 1)$; B $(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$; C $(-2, -1)$; D Altă soluție.

33. Valoarea lui n care satisface ecuația $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot ... \cdot \log_n(n+1) = 10$ este ✓ ?

A 1024; B 1023; C 2047; D 512.

34. Valoarea lui x care satisface ecuația $3 + e^{2x} = 7e^{2x}$ este ✓ ?

A $-\ln \frac{1}{2}$; B $\ln \frac{1}{2}$; C $\ln \frac{1}{\sqrt{2}}$; D $-\frac{1}{2} \ln 2$.

35. Se dă ecuația $S := \log\left(\log_{10^a}\left(\log_{10^b}\left(10^{1000}\right)\right)\right) = 0, \quad a, b \in \mathbb{Z}^*, a, b > 0$. Să se indice care dintre următoarele afirmații sunt corecte, știind că M reprezintă mulțimea perechilor unice $\{a, b\}, a \neq b$ astfel încât $S = 0$. ✓ ?

A card $M = 4$;

B $\displaystyle\prod_{k=1}^{\text{card } M} a_k \cdot b_k = 0$;

C $\displaystyle\sum_{k=1}^{\text{card } M} a_k \cdot b_k = 123$;

D $\displaystyle\sum_{k=1}^{\text{card } M} \left(\prod_{k=1}^{\text{card } M} a_k + \prod_{k=1}^{\text{card } M} b_k \right) + 6$ este un pătrat perfect.

Ecuații și inecuații

36. Fie $S = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid xy + x + y = 11 \text{ și } xy(x + y) = 30\}$, atunci: ✓ ?

A $x + y = 5$ sau $xy = 5$ pentru fiecare $(x, y) \in S$;

B S are 2 elemente;

C $x + y = 6$ sau $xy = 6$ pentru fiecare $(x, y) \in S$;

D $S = \emptyset$.

37. Numărul de soluții reale ale ecuației $\sqrt{3 - x} - x = 0$ este: ✓ ?

A 0; B 1; C 2; D 3.

38. Fie S o submulțime a lui $\mathbb{Z}_+$ astfel încât: ✓ ?

(a) $2 \in S$

(b) $n \in S \Leftarrow n^2 \in S$

(c) $(n + 5)^2 \in S \Leftarrow n \in S$

Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

A $-5 \notin S$;

B Numerele întregi, diferite de 1 și care nu sunt multiplii de 5 aparțin lui S;

C $S = \{1\} \cup \{5n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$;

D $S = \mathbb{Z}_+ \setminus \{1\} \cup \{5n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$.

39. Numărul de soluții reale ale ecuației $\left(x^2 - 7x + 11\right)^{x^2-13x+42} = 1$ este: ✓ ?

A 4; B 2; C 6; D 8.

40. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică descrescătoare care verifică relațiile $-a_7a_9a_{11} = 101 \cdot 129 + 8$ și $a_3 + a_4 + a_5 = -6$. Care dintre următoarele afirmații sunt false? ✓ ?

A $a_1 = 5$;

B $a_4^3 = -8$;

C Suma primelor 10 elemente este -70;

D Rația progresiei este 3.

41. Suma soluțiilor ecuației $\sqrt[4]{x} = \dfrac{12}{7 - \sqrt[4]{x}}$ este: ✓ ?

A $S < 2^9$; B $S \in [2^8, 2^9]$; C $S \in (3^5, 2^8)$; D $S \notin (2^7, 7^3)$.

42. Valoarea minimă a expresiei $\sum_{k=1}^{n} |x_k + k|$, unde $\forall x \in \mathrm{Z}, n \in \mathrm{N}^*, n = 2m + 1, m \in \mathrm{N}^*$ și $x_{k+1} = x_k + 1$ este: ✓ ?

A $\dfrac{n^2 + 2n}{2}$;

B $1011 \cdot 1012$, pentru $n = 2023$;

C $\dfrac{n^2 + 2n}{4}$;

D $2023 \cdot 1012$, pentru $n = 2023$.

43. Știind că, prin $[x]$ și $\{x\}$ înțelegem partea întreagă și partea fracționară a numărului real x, ecuația $x^2 + 2[x]\{x\} + 3\{x\}^2 = 4$ are, pe mulțimea numerelor reale: ✓ ?

A 3 soluții;

B 4 soluții;

C 3 soluții întregi;

D 4 soluții întregi.

44. Fie $a, b \in \mathbb{R}$ fixate. Notăm cu S_1 mulțimea soluțiilor reale ale ecuației $ax + b = 0$, iar cu S_2 mulțimea soluțiilor reale ale inecuației $ax + b \leq 0$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A Pentru $a = 1$ și $b = -5$ avem că $S_1 = 5$ și $S_2 = (-\infty, 5)$;

B Pentru $a = 0$ și $b = -5$ avem că $S_1 = -5, 0$ și $S_2 = \mathbb{R}$;

C Pentru $a = -5$ și $b = -5$ avem că $S_1 = -1$ și $S_2 = (-1, +\infty)$;

D Pentru $a = 0$ și $b = 0$ avem că $S_1 = \mathbb{R}$ și $S_2 = \mathbb{R}$.

45. Fie $m \in \mathbb{R}$ un parametru fixat. Notăm cu S mulțimea soluțiilor reale ale ecuației $x^2 - |x| = mx(x+1)$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A S are cel puțin două elemente pentru fiecare $m \in \mathbb{R}$;

B Există un interval nevid $I \subset \mathbb{R}$ a.î. $S \cap (0, \infty) \neq 0$ pentru fiecare $m \in I$;

C Există un $m \in \mathbb{R}$ a.î. S este un interval nevid;

D Există un $m \in \mathbb{R}$ a.î. S este reuniunea a două intervale nevide disjuncte.

46. Fie $E \subset \mathbb{R}$ domeniul de existență al expresiei $\dfrac{x+1}{x^2-3x+5}$, iar $S \subset \mathbb{R}$ mulțimea soluțiilor inecuației $\dfrac{x+1}{x^2-3x+5} \leq 1$. Atunci: ✓ ?

A $E = \mathbb{R} \setminus \{3, 5\}$ și $S = (-\infty, 3)$;

B $E = S$;

C $S = \mathbb{R}$;

D $S \setminus E \neq \emptyset$.

47. Fie $S = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid xy + x + y = 4 \text{ și } xy(x+y) = 4\}$, atunci: ✓ ?

A S are 2 elemente;

B $(0, 4) \in S$;

C $(1+i, 1-i) \in S$;

D $S = \emptyset$.

48. Produsul soluțiilor reale ale ecuației $x^2 + 18x + 30 = 2\sqrt{x^2 + 18x + 45}$ este: ✓ ?

A 360;

B alt răspuns;

C 6!;

D $4! \cdot 15$.

49. Fie $x, y, z \in R, x, y, z > 0$ astfel încât $xyz = 1$ și $x + \dfrac{1}{z} = 3$, $y + \dfrac{1}{x} = 27$. Să se indice care dintre următoarele variante de răspuns reprezintă valoarea lui $y + \dfrac{1}{z}$. ✓ ?

A $\dfrac{160}{7}$;

B $\dfrac{96}{4}$;

C $\dfrac{20}{7}$;

D $\dfrac{180}{7}$.

50. Fie $m \in \mathbb{R}$ un parametru fixat. Notăm cu S mulțimea soluțiilor ecuației $\sqrt{2|x| - 2x} = m - x$. Atunci: ✓ ?

A $m \in S$ pentru fiecare $m \in \mathbb{R}$;

B $m - 2 + 2\sqrt{1-m} \in S$ pentru fiecare $m \in (-\infty, 0)$;

C există un interval nevid, deschis, $I \subset \mathbb{R}$ astfel încât S are un singur element pentru orice $m \in I$;

D există un interval nevid, deschis, $J \subset \mathbb{R}$ astfel încât S are trei elemente pentru orice $m \in J$.

51. Fie S mulțimea soluțiilor reale ale inecuației $x \leq \dfrac{8}{x^2}$. Următoarele afirmații sunt adevărate: ✓ ?

A f și f^{-1} sunt strict crescătoare, unde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(y) = \sqrt[3]{y}$;

B $(-\infty, 0) \subset S$;

C $S = \{x \in \mathbb{R} | x^3 \leq 8\}$;

D S este reuniunea a două intervale nevide disjuncte.

52. Fie $a \in \mathbb{R}$ un parametru fixat și $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + x$. Fie S mulțimea soluțiilor reale ale ecuației $f(x) = a$. Atunci: ✓ ?

A S are 3 elemente pentru $a = 0$;

B f este strict crescătoare;

C S are cel mult un element;

D S are cel puțin un element.

53. Fie $n \in \mathbb{R}$ un parametru fixat. Ecuația $\sqrt{3-x} - x = a$ are cel puțin o soluție reală dacă: ✓ ?

A $a \in (-\infty, -10)$;

B $a \in \{-10, -9, -8\}$;

C $a \in \{-3, -2, -1, 0\}$;

D $a \in \{8, 9, 10\}$.

54. Considerăm în $\mathbb{R}$ ecuaţia $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 1$. Mulţimea soluţiilor ecuaţiei este: ✓ ?

A $S = [3, 12]$;

B $S = [1, \infty)$;

C $S = [5, 10]$;

D $S = \{4, 11\}$.

55. Notăm cu $T = \sum_{k=1}^{2023} \frac{1}{k^2+k}$, $T \in \mathbb{R}$. Fie șirul de numere reale $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ dat prin termenul general $x_n = \left[T + \frac{n}{2024}\right]$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A $T \in \mathbb{N}$;

B $\sum_{i=1}^{2024} x_i = 2023$;

C $x_1 + x_2 + x_3 = 3$;

D $\sum_{i=1}^{2023} x_i = 2024$.

56. Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ un șir de n numere reale, cu n număr natural par. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A Dacă $a_n > 0$ pentru orice n, atunci $\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \geq 2n$;

B Dacă $a_1, a_2 > 0$ și $a_1 a_2 = 3$, atunci $a_1 + a_2 \geq 3$;

C Dacă $(a_n)_{n \geq 5}$ sunt rădăcinile polinomului $f = x^n - nx^{n-1} + 2024x^3 + nx - 1$, atunci $\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} = 2n$;

D Dacă $(a_n)_{n\geq 5}$ sunt rădăcinile polinomului $f = x^n - nx^{n-1} + 2024x^3 + nx - 1$, atunci $\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} = 0$.

57. Mulţimea soluţiilor inecuaţiei $x^{\log_7 10} + 8^{\log_7 x} + 10 \cdot x^{\log_7 9} \leq 11^{1+\log_7 x} + x^{\log_7 11}$ este mulţimea: ✓ ?

A $(0, +\infty)$; B $[1, +\infty)$; C $\{1\}$; D $[1, 10]$.

58. Soluţiile ecuaţiei $5^{2x} + 3x5^x + 2x^2 + 6 = 7 \cdot 5^x + 13x,\ x \in \mathbb{R}$, aparţin mulţimii: ✓ ?

A $[0, 1]$; B $[-1, 4]$; C $(-2, 0]$; D $\{0,\ 1,\ 2\}$.

59. Soluţiile ecuaţiei $x^{\log_7 10} + 8^{\log_7 x} + 2 \cdot x^{\log_7 9} = 4 \cdot x^{\log_7 12}$ aparţin mulţimii: ✓ ?

A $(0, 5)$; B $(0, 4]$; C $[1, 2)$; D $[2, 5)$.

60. Soluţiile ecuaţiei $40^x + 18^x + 3 \cdot 15^x + 4 \cdot 12^x + 3 \cdot 8^x = 30^x + 24^x + 3 \cdot 20^x + 16^x + 3 \cdot 9^x + 3 \cdot 6^x$ aparţin mulţimii: ✓ ?

A $[0, \log_2 3]$; B $[-1, 1]$; C $[0, 2)$; D $[0, \log_4 9]$.

61. Fie funcția $f : [-1, \infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = (x + 1)^{2024}$. Care dintre următoarele afirmații sunt **false**? ✓ ?

A $2f(6)$ este pătrat perfect al unui număr natural;

B $f(x) < 2024x + 1,\ \forall x \in [-1, \infty)$;

C $f(x) \geq 2024x + 1,\ \forall x \in [-1, \infty)$;

D după ridicarea la putere $f(x)$ are exact 2 termeni care **nu** depind de x.

62. Câte triplete (x, y, z) de numere naturale nenule verifică ecuaţia $2xyz + 2xy - xz - 2yz - x - 2y + z = 5$? ✓ ?

A 2; B 4; C 10; D nici unul.

63. Dacă $n \geq 2$ este un număr natural fixat, atunci ecuaţia $(1 + 2^x)\left(1 + 2^{-x}\right) + \cdots + (n + (n + 1)^x)\left(n + (n + 1)^{-x}\right) = \frac{2n^3 + 9n^2 + 13n}{6},\ x \in \mathbb{R}$, are soluţiile în mulţimea: ✓ ?

A $[0, +\infty)$; B $[-1, 1]$; C $[1, 3)$; D $(-5, 4]$.

64. Se consideră șirurile de numere reale (a_n) și (b_n), $n \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sqrt{3}$ și $\sum_{i=1}^{n} b_i = 3$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A $(\sum_{i=1}^{n} a_i^2)(\sum_{i=1}^{n} b_i^2) \geq (\sum_{i=1}^{n} a_i b_i)^2$;

B $(\sum_{i=1}^{n} a_i^2)(\sum_{i=1}^{n} b_i^2) < (\sum_{i=1}^{n} a_i b_i)^2$;

C $\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{b_i} \geq 1$;

D $\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{b_i} < 1$.

65. Considerăm în $\mathbb{R}$ ecuaţia $\sqrt{x^2-6} = x^2 - 8$. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate? ✓ ?

A ecuaţia are exact 4 soluţii;

B ecuaţia nu are soluţii;

C ecuaţia are exact două soluţii;

D suma soluţiilor este 0.

66. Se consideră ecuaţiile: $(7-4\sqrt{3})^x - 2\cdot(2-\sqrt{3})^x = 3$, $(3-2\sqrt{2})^y - 2\cdot(\sqrt{2}-1)^y = 3$. ✓ ?
Ştiind că x şi y sunt soluţiile celor două ecuaţii, atunci:

A $x + y = \ln 3 \cdot \left[\frac{\ln(\sqrt{2}-1) + \ln(2-\sqrt{3})}{\ln(\sqrt{2}-1)\cdot\ln(2-\sqrt{3})}\right]$;

B $x + y = \ln 2 \cdot \left[\frac{\ln(\sqrt{2}+1) + \ln(2+\sqrt{3})}{\ln(\sqrt{2}+1)\cdot\ln(2+\sqrt{3})}\right]$;

C $x - y = \ln 3 \cdot \left[\frac{\ln(\sqrt{2}-1) - \ln(2-\sqrt{3})}{\ln(\sqrt{2}-1)\cdot\ln(2-\sqrt{3})}\right]$;

D $x - y = \ln 2 \cdot \left[\frac{\ln(\sqrt{2}+1) - \ln(2+\sqrt{3})}{\ln(\sqrt{2}+1)\cdot\ln(2+\sqrt{3})}\right]$.

67. Suma elementelor mulţimii $A = \left\{x \in \mathbb{Z} \,\middle|\, \left[\frac{x+1}{2}\right] = 3\right\}$ este: ✓ ?

A 2;

B 10;

C 9;

D 11.

Numere Complexe

68. Considerăm z un număr complex. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A $z^2 < 0,\ \forall z \in \mathbb{C}$;

B $z^2 \in \mathbb{R}$ şi $z^2 \geq 0$ dacă şi numai dacă $z \in \mathbb{R}$;

C $z^2 \in \mathbb{R}$ dacă şi numai dacă partea imaginară a lui z este 0 sau partea reală a lui z este 0;

D $z^2 \geq 0,\ \forall z \in \mathbb{C}$.

69. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ astfel ca numărul complex $(a+bi)^n - (ai+b)^n$ să fie real pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A $n = 2k,\ k \in \mathbb{N}^*$;

B $n = 2k + 4,\ k \in \mathbb{N}$;

C $n = 4k,\ k \in \mathbb{N}^*$;

D $n = 4k + 2,\ k \in \mathbb{N}$.

70. Să presupunem că există numere complexe $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ diferite de zero, astfel încât z satisface ecuațiile $az^3 + bz^2 + cz + d = 0$ și $bz^3 + cz^2 + dz + a = 0$. În acest caz, toate valorile posibile (complexe) ale lui z sunt: ✓ ?

A $\{i, -i\}$;

B $\{1, -1\}$;

C $\{1, i, -1\}$;

D $\{1, i, -1, -i\}$.

71. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Numerele complexe z având modulul 1, pentru care $50z^{2017}\left(z^2 + 1\right) = z^{98} + 1$, aparţin mulţimii: ✓ ?

A $\{i,\ -i,\ 0\}$;

B $\{-1,\ 1,\ i,\ -i\}$;

C $\{1,\ -i\}$;

D $\{\cos\pi + i\sin\frac{\pi}{2},\ \sin\frac{\pi}{2} + i\cos\pi\}$.

72. Fie ecuația $\left(\frac{1-iz}{1+iz}\right)^3 + \left(\frac{1-iz}{1+iz}\right)^2 + \left(\frac{1-iz}{1+iz}\right) + 1 = 0$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A Ecuația are 4 soluții;

B Ecuația are 2 soluții reale;

C Ecuația nu are soluții;

D Produsul soluțiilor ecuației este -1.

73. Fie z un număr complex de modul 1 astfel încât $|z^2+\overline{z}^2| = 2$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A Ecuația are 4 soluții;

B Ecuația are 2 soluții reale;

C Ecuația nu are soluții;

D Suma soluțiilor ecuației este 0.

74. Se consideră $n \in \mathbb{N}^*$, număr prim și $z_n = i^1 + i^2 + \cdots + i^n$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A Există n prim a.î. $\operatorname{Re} z_n = \operatorname{Im} z_n = 0$;

B Există n prim a.î. $\operatorname{Re} z_n = 0$;

C Există n prim a.î. $\operatorname{Im} z_n = 0$;

D $\operatorname{Re} z_n, \operatorname{Im} z_n \in \{-1, 1\}$ pentru orice n prim.

75. Fie $z_1 = 0, z_2 = a > 0, z_3$ afixele vârfurilor unui triunghi echilateral și z_0 afixul centrului de greutate al triunghiului. Dacă $z_0 \neq 0$, atunci expresia $\frac{(z_1)^2 + (z_2)^2 + (z_3)^2}{(z_0)^2}$ este egală cu: ✓ ?

A $(1 + i\sqrt{3})$;

B $\dfrac{\frac{a^2}{2} \cdot (1 + i\sqrt{3})}{\frac{a^2}{6} \cdot (1 + i\sqrt{3})}$;

C 3;

D $\dfrac{\frac{a}{2} \cdot (1 - i\sqrt{3})}{\frac{a}{6} \cdot (1 - i\sqrt{3})}$.

76. Se consideră $S_n = \sum_{k=1}^{n} i^k$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A $S_{174} = S_2$; B $S_{102} = i - 1$; C $S_{2024} = S_{102}$; D $S_{33} = 2i - 1$.

77. Să se afle numărul real α astfel încât $\operatorname{Im}\left(\dfrac{1 + i\sqrt{7}}{\alpha + \left(\alpha + \frac{1}{2}\right)i}\right) = 0$. ✓ ?

A $\alpha = \dfrac{1}{2}$;

B $\alpha = \dfrac{2}{4\sqrt{7} - 2}$;

C $\alpha = \dfrac{1}{2\sqrt{7} - 1}$;

D $\alpha = \dfrac{1}{2\sqrt{7} - 2}$.

78. Cu ce număr poate fi egală partea reală a numărului complex z, dacă z este soluția ecuației: $\operatorname{Re}(z^2 + 1 + i) - \operatorname{Im}(3i\bar{z} + z\bar{z}) + (\operatorname{Im} z)^2 = 1$? ✓ ?

A $\operatorname{Re} z = 0$; B $\operatorname{Re} z = 1/2$; C $\operatorname{Re} z = 1$; D $\operatorname{Re} z = 3$.

79. Fie mulțimea $M = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = \sqrt{3}, |z - 2| = 1\}$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A $\operatorname{card}(M) = 1$;

B $\operatorname{card}(M) = \infty$;

C $\dfrac{3}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} i \in M$;

D $\operatorname{card}(M) = 0$.

80. Fie numărul complex $z = \sqrt{7 + \sqrt{13}} + i\sqrt{7 - \sqrt{13}}$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A $\dfrac{z^2}{\sqrt{13}} \in \mathbb{R}$;

B $|z|^n \in \mathbb{Q}, \forall n \in \mathbb{N}$;

C $|z|^{2024} = |(6 + 4i\sqrt{10})^{1012}|$;

D $|z\bar{z}|^4 \geq \dfrac{2|z^2|^3}{3}$.

81. Fie numerele complexe $z_1, z_2 \in \mathbb{C}, |z_1| = |z_2| = 1, z_1 z_2 \neq -1$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A $\dfrac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2} - \dfrac{7}{3} \in \mathbb{R}$;

B $\dfrac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2} - \dfrac{7}{3} \notin \mathbb{R}$;

C $\dfrac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2} + i \in \mathbb{R}$;

D $\dfrac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2} + i \notin \mathbb{R}$.

82. Fie numerele complexe $z_1, z_2 \in \mathbb{C}, z_1 = 2\sqrt{3}n + (1 - 3n^2)i, z_2 = 2\sqrt{2}n + (n^2 - 2)i$, unde $n \in \mathbb{N}$ este un număr arbitrar, fixat. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

A $|z_1|, |z_2| \in \mathbb{N}$;

B $|z_1| \in \mathbb{N}, |z_2| \notin \mathbb{N}$;

C $|z_1 z_2| \in \mathbb{N}$;

D $|z_1||z_2| \notin \mathbb{N}$.

83. Fie numărul complex $z \in \mathbb{C}, z = 1 + i$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

A $z_1 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ este o rădăcină de ordinul 3 a lui z;

B $z_0 + z_1 + z_2 = \sqrt[6]{2}\left(1 + 2\cos\frac{2\pi}{3}\right)\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$, unde z_0, z_1, z_2 sunt rădăcinile de ordin 3 ale lui z;

C $z_0 + z_1 \notin \mathbb{N}$, unde z_0, z_1 sunt rădăcinile de ordin 2 ale lui z;

D $z_0 + z_1 \in \mathbb{N}$, unde z_0, z_1 sunt rădăcinile de ordin 2 ale lui z.

84. Fie mulțimea $M = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 3| = 2, \operatorname{Im}\left(\frac{z+2}{z-2i}\right) = 0\}$. Câte elemente are mulțimea M?

A O infinitate;

B 3 elemente;

C 2 elemente;

D niciunul.

85. Fie mulțimea $M = \left\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid \left|\sqrt{2a^2 - 7} + i\sqrt{7 - 3b}\right| = \sqrt{17},\ |a| \geq \sqrt{\frac{7}{2}},\ b < \frac{7}{3}\right\}$.

Mulțimea M poate fi scrisă și ca:

A $M = \left\{(a,b) \mid b = \frac{2}{3}a^2 - \frac{17}{3},\ a \in \left(-\sqrt{12}, -\sqrt{\frac{7}{2}}\right) \cup \left[\sqrt{\frac{7}{2}}, 12\right)\right\}$;

B $M = \left\{\left(a, \frac{2}{3}a^2 - \frac{17}{3}\right) \mid a \in \left(-\sqrt{12}, -\sqrt{\frac{7}{2}}\right]\right\}$;

C $M = \left\{\left(a, \frac{2}{3}a^2 - \frac{17}{3}\right) \mid a \in \left(-\sqrt{12}, -\sqrt{\frac{7}{2}}\right] \cup \left[\sqrt{\frac{7}{2}}, \sqrt{12}\right)\right\}$;

D $M = \left\{\left(a, \frac{2}{3}a^2 - \frac{17}{3}\right) \mid a \in \left[\sqrt{\frac{7}{2}}, \sqrt{12}\right)\right\}$.

86. Fie mulțimea $M = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{-3\} \mid \frac{z-3}{z+3} \in \mathbb{R}\}$. Mulțimea M poate fi scrisă și ca:

A $M = \emptyset$;

B $M = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{-3\} \mid z = \bar{z}\}$;

C $M = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{-3\} \mid z = -\bar{z}\}$;

D $M = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{-3\} \mid \operatorname{Re} z = 0\}$.

Matrici

87. Fie matricile $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ și $A^n = \begin{pmatrix} a_n & -b_n \\ b_n & a_n \end{pmatrix}$. Dintre următoarele enunțuri sunt adevărate: ✓ ?

A rang $(A) = 2$;

B $a_{13}^2 + b_{13}^2 = 2^{18} * (a_7^2 + b_7^2)$;

C $a_{14}^2 + b_{14}^2 = 2^{18} * (a_7^2 + b_7^2)$;

D $A^{100} = 8^{50} * I_2$.

88. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 2i & -1 \\ 4 & 2i \end{pmatrix}$. Sunt **false** următoarele afirmații: ✓ ?

A $A^{-1} = O_2$;

B $A^{51} = -2^{100}A$;

C $A^{16} = 4^3 i A^{13}$;

D $A^{101} = 16^{50}A$.

89. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & \cos t & -\sin t \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin t & \cos t \end{pmatrix}$. Sunt **false** următoarele afirmații: ✓ ?

A $\det(A) = -1$;

B Ecuația $A * X = I_3$ nu are nicio soluție în $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$;

C rang $(A) = 2$;

D rang $(A) = 3$.

90. Se dă matricea $A(x, y) = \begin{pmatrix} y & y & y & y \\ y & x & x & y \\ y & y & x & x \\ y & x & y & x \end{pmatrix}$. Sunt adevărate următoarele afirmații: ✓ ?

A $A^{100}(10, 10) = 4^{100}A\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$;

B Matricea $A(x, y)$ nu este singulară pentru $x = y$ sau $y = 0$;

C $A^{100}(10, 10) = 16^{25}A\left(\frac{5}{4}, \frac{5}{4}\right)$;

D $A^{-50}(2, 2) = 8^{-49}A(2, 2)$.

91. Se consideră mulțimea M a matricelor de forma $A(x) = \begin{pmatrix} x & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & x \end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{C}$ și funcția $f : \mathbb{C} \to \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, $f(z) = \frac{1}{2} * A(z)$. Sunt adevărate următoarele afirmații: ✓ ?

A $f(zw) = f(z) * f(w)$;

B Funcția f este injectivă;

C rang $(A(x)) = 3, \forall x \in \mathbb{C}$;

D $f(z^3) = (f(z))^3$.

92. În $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se consideră matricile $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, precum și submulțimea ✓ ?
$G = \{X(a) \mid a \in \mathbb{R}, X(a) = I_2 + a * A\}$. Sunt adevărate următoarele afirmații:

A $I_2 \notin G$;

B $X(a) * X(b) = X(a + b + 3ab), \forall X(a), X(b) \in G$;

C $X\left(\frac{-50}{3}\right) * X\left(\frac{-49}{3}\right) * \cdots * X\left(\frac{49}{3}\right) * X\left(\frac{50}{3}\right) = X\left(\frac{-1}{3}\right)$;

D $X(a) * X(b) = X(a + b + ab), \forall X(a), X(b) \in G$.

93. În $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ se consideră matricile $A = \begin{pmatrix} 2 & x & 3 \\ a & x-1 & 1 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix}$, $a, x \in \mathbb{R}$ și $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. ✓ ?
Sunt adevărate următoarele afirmații:

A Pentru $a \in \left(\frac{2}{3}, 1\right)$, rang $(A) =$ rang $(B), \forall x \in \mathbb{R}$;

B Pentru $a \in \left(\frac{2}{3}, 1\right)$ matricea A este inversabilă $\forall x \in \mathbb{R}$;

C Pentru $a = 2$, matricea A este inversabilă $\forall x \in \mathbb{R}$;

D Pentru $a = 3$, matricea A este inversabilă $\forall x \in \mathbb{R}$.

94. În $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & x & 3 \\ x & -1 & x \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix}$, $a, x \in \mathbb{R}$. Sunt adevărate ✓ ?
următoarele afirmații:

A Pentru $a \in \left(-1, \frac{3}{10}\right)$ matricea A este inversabilă $\forall x \in \mathbb{R}$;

B Pentru $a \in \left(\frac{-2}{3}, 1\right)$ matricea A este inversabilă $\forall x \in \mathbb{R}$;

C Pentru $a \in (7, 9)$ matricea A este inversabilă $\forall x \in \mathbb{R}$;

D Pentru $a \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ matricea A este inversabilă $\forall x \in \mathbb{R}$.

95. Se notează cu E_n matricea pătratică de ordin n care are toate elementele egale cu 1. ✓ ?
Sunt **false** următoarele afirmații:

A rang $(E_n) = n, \forall n \in \mathbb{N}^*$;

B $E_n^2 = n * E_n$;

C $I_n * E_n$ nu este inversabilă;

D $E_n^{-1} = \frac{1}{\sqrt{n}} * E_n$.

96. În $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ și relația $A + A^2 + A^3 + ... + A^n = a_n * A$, ✓ ?
$\forall n \in \mathbb{N}^*$. Sunt adevărate următoarele afirmații:

A. Există un număr natural nenul x pentru care $A^3 = x * A$;

B. Există un număr rațional nenul x pentru care $A^3 = x * A$;

C. $a_n = 3^{n-1} - \frac{1}{3}$;

D. $a_n = \frac{3^n - 1}{2}$.

97. Se consideră mulțimea G a matricelor de forma $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ -x & 1 & -\frac{x^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{R}$. ✓ ?

Sunt adevărate următoarele afirmații:

A. $\operatorname{rang}(A) = 2, \forall A \in G$;

B. $\operatorname{rang}(A) = 3, \forall A \in G$;

C. $A * B \in G, \forall A, B \in G$;

D. Există $B \in G$ astfel încât $A * B = A$.

98. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & x & 1 \\ x & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & x \end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{R}$. Sunt **false** următoarele afirmații: ✓ ?

A. Există valori ale lui x pentru care $\operatorname{rang}(A) = 1$;

B. Există valori ale lui x pentru care $\operatorname{rang}(A) = 4$;

C. Există valori ale lui x pentru care $\operatorname{rang}(A) = 3$;

D. Pentru $x = 0$, $\operatorname{rang}(A) = 3$.

99. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & 0 & 0 \\ b & b & 0 \end{pmatrix}$, $b \in \mathbb{R}$. Sunt adevărate următoarele afirmații: ✓ ?

A. $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(B)$ pentru $b = 0$;

B. $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^{n-1} & 3^{n-1} \\ 0 & 1 & 2^{n-1} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \forall n \in \mathbb{N}^*$;

C. $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(B)$ pentru $b \in \mathbb{R}^*$;

D. $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

100. Se consideră matricea $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), A = \begin{pmatrix} 0 & x & y \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Sunt adevărate următoarele afirmații: ✓ ?

A. $A^2 = O_3$ doar pentru $x = 0$;

B. $A^2 = O_3$ doar pentru $z = 0$;

C. Dacă $A^2 = O_3$, $I_3 - A$ e inversabilă și inversa ei e egală cu $I_3 + A$;

D. $A^2 = O_3$ pentru $x * z = 0$.

101. Se consideră matricea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ a & a \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}$ și matricea $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Sunt adevărate următoarele afirmații: ✓ ?

A rang $(A) =$ rang (B) pentru $a = 0$;

B $A^2 - (2+a)A - aI_2 = O_2, \forall a \in \mathbb{R}$;

C $A^2 - 2aA - aI_2 = O_2, \forall a \in \mathbb{R}$;

D Pentru $a = -1$, există $n \in \mathbb{N}^*, k \in \mathbb{Z}$ astfel încât $A^n = k * I_2$.

102. Se consideră matricea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ și funcția $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $f(X) = X^2 - 4X + 2I_2$. Sunt adevărate următoarele afirmații: ✓ ?

A $f(A) = O_2$;

B există o matrice $C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $f(A) = (I_2 - A) * C$;

C există o matrice $D \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $f(I_2) - f(A) = (I_2 - A) * D$;

D există $k \in \mathbb{N}$ astfel încât $f(I_2) = k * I_2$.

103. Determinantul matricei $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ -6 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ este ✓ ?

A 2;

B -5;

C 0;

D un număr din $\mathbb{R} \setminus \{2, -5, 0\}$.

104. Considerăm matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. Sunt adevărate afirmațiile: ✓ ?

A Matricea A este inversabilă și elementul din linia 2 și coloana 3 a lui A^{-1} este $-\frac{1}{4}$;

B Matricea A este inversabilă și elementul din linia 3 și coloana 2 a lui A^{-1} este $-\frac{1}{4}$;

C Matricea A este inversabilă și elementul din linia 3 și coloana 2 a lui A^{-1} este $-\frac{1}{8}$;

D Matricea A nu este inversabilă.

105. Se consideră a ecuația matriceală ✓ ?

$$\begin{pmatrix} 2 & 3a & 1 & -1 \\ 1 & 2 & a & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

în care toate matricele care apar sunt considerate matrice cu elemente numere reale.

A Indiferent ce valoare ia parametrul $a \in \mathbb{R}$, nu există matrice din $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ care să verifice (1);

B Ecuația (1) are soluții dacă și numai dacă $a \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$;

C Ecuația (1) are soluții pentru orice $a \in \mathbb{R}$;

D Dacă $\begin{vmatrix} 2 & 3a & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$ atunci ecuația (1) nu are soluții.

106. Mulțimea tuturor valorilor $m \in \mathbb{R}$ pentru care ecuația $\begin{vmatrix} 2x & -2x & 1 \\ 1-x^2 & x^2 & -1 \\ -2x-m & x+m & x-2 \end{vmatrix} = 0$ admite o rădăcină dublă este: ✓ ?

A $\{1, 2\}$; B $\{-2, 0, 2\}$; C $\{-2\}$; D $\{-2, 2\}$.

107. Fie $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ și $\mathcal{X} = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}) \mid \det(X) = \det(A + X) = 0\}$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A Dacă $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{X}$ și $a \neq 2c$, atunci 1024 divide toți coeficienții lui X^6;

B Dacă $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{X}$ şi $c = a^2 \neq 0$, atunci $\dfrac{b^2}{d} \in \left(\dfrac{1}{2}, 1\right)$;

C Dacă $X, Y \in \mathcal{X}$, atunci $X + Y \in \mathcal{X}$;

D Dacă $X \in \mathcal{X}$, atunci $-X \in \mathcal{X}$.

108. Valorile lui $\theta \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ care verifică ecuația $\begin{vmatrix} 1+\sin^2\theta & \cos^2\theta & 4\sin 4\theta \\ \sin^2\theta & 1+\cos^2\theta & 4\sin 4\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & 1+4\sin 4\theta \end{vmatrix} = 0$ sunt: ✓ ?

A $\dfrac{7\pi}{24}$; B $\dfrac{5\pi}{24}$; C $\dfrac{11\pi}{24}$; D $\dfrac{\pi}{24}$.

109. Fie A o matrice pătratică de ordinul n, elementele acesteia fiind fie 1, fie -1. Stabiliți care dintre următoarele afirmații sunt adevărate (pentru orice A cu proprietatea dată). ✓ ?

A $\det(A) = 0$; B $2 \mid \det(A)$; C $|\det(A)| = 1$; D $2^n \mid \det(A)$.

110. Fie ecuația matriceală $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ cu rădăcinile $A_1, A_2 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Sunt adevărate următoarele afirmații: ✓ ?

A $A_1 + A_2 = I_2$;

B $A_1 * A_2 = A_1^2$;

C $A_1 * A_2 = -A_2 * A_1$;

D $A_1 * A_2 = -A_1^2$.

111. Fie matricea $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Sunt adevărate următoarele afirmații: ✓ ?

A $\operatorname{rang}(A) = 3$ pentru b=0 sau a=1;

B $\operatorname{rang}(A) = 3$ pentru $b \in \mathbb{R}^*, a \neq 1$;

C $\det(X^3) = -b^3(a-1)^3$;

D $\det(X^3) = b^3(a-1)^3$.

112. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ n & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Sunt adevărate următoarele afirmații: ✓ ?

A Suma elementelor de pe linia 5 a matricei A^5 este n^5;

B Cel mai mic număr k pentru care $A^k = O_n$ este $n-1$;

C Cel mai mic număr k pentru care $A^k = O_n$ este n;

D Cel mai mare număr k pentru care $A^k \neq O_n$ este $n-2$.

113. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ Sunt adevărate următoarele afirmații: ✓ ?

A $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\operatorname{tr}(A^n)}{\det(A^n)} = 0$;

B $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^{n-1}\operatorname{tr}(A^n)}{a^{n-2}\det(A^n)} = 0$, unde a este un număr real nenul;

C $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\operatorname{tr}(A^n)}{\det(A^n)} = 1$;

D $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^{n}\operatorname{tr}(A^n)}{a^{n-2}\det(A^n)} = 0$, unde a este un număr real nenul.

114. Fie matricea $X = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ și ecuația $X^n * \begin{pmatrix} 3^n \\ 3^n \\ 3^n \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1, n > 1$. Sunt adevărate următoarele afirmații: ✓ ?

A Ecuația are o singură soluție rațională;

B Ecuația nu are soluții întregi;

C Ecuația are 2 soluții naturale pentru n par;

D Numărul de soluții distincte al ecuației este 3.

115. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{1} \\ \hat{4} & \hat{0} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_5)$. Sunt adevărate următoarele afirmații: ✓ ?

A $A^{4k+3} = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{4} \\ \hat{1} & \hat{0} \end{pmatrix}$;

B $A^{4k+5} = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{4} \\ \hat{1} & \hat{0} \end{pmatrix}$;

C $\det(A^{4k}) = \det(A^{4k+2}), \det(A^{4k+1}) = \det(A^{4k+3}), \det(A^{4k}) \neq \det(A^{4k+1})$;

D $\det(A^{4k} + A^{4k+1} + A^{4k+2} + A^{4k+3}) = \hat{0}$.

116. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha - 1 \\ \alpha & \alpha \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, unde α e o rădăcină a ecuației $x^2+x+1 = 0$. Sunt adevărate următoarele afirmații: ✓ ?

A $\det(A) = 2\alpha + 2$;

B $A^2 + A - I_2 = O_2$;

C $\det(A) = -\alpha^2 + \alpha - 1$;

D $A^2 + A - \alpha^2 I_2 = O_2$.

117. Numărul soluțiilor în $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ ale ecuației $X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ este: ✓ ?

A 2;

B 3;

C 4;

D 6.

118. Fie $A(m) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ m & 1 & -1 \\ 0 & m & 1 \end{pmatrix}, m \in \mathbb{Q}$. Sunt adevărate următoarele afirmații: ✓ ?

A $A(m)$ este inversabilă, $\forall m \in \mathbb{Q}$;

B $\operatorname{rang} A(3) = 3, \forall m \in \mathbb{Q}$;

C $A(0)^n = \begin{pmatrix} 1 & n & -n^2 - 2n \\ 0 & 1 & -n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

D $A(0)^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n & -n^2 - 2n \\ 0 & 1 & -n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Sisteme

119. Se dă sistemul de ecuații $\begin{cases} (a+1)x - 2y + 7z = 1, \\ ax + y - 2z = 0, \\ x - y - z = 7 + b \end{cases}$, cu a, b numere reale. Sunt ✓ ?
false următoarele afirmații:

A Sistemul este incompatibil pentru o infinitate de valori ale lui b;

B Sistemul este compatibil determinat pentru o valoare a lui a;

C Sistemul este compatibil nedeterminat pentru 2 valori ale lui b;

D Sistemul este compatibil nedeterminat pentru 3 valori ale lui b.

120. Se dă sistemul de ecuații $\begin{cases} -x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ 3x_1 + x_2 + ax_3 - x_4 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + bx_4 = c \end{cases}$ cu a, b, c numere reale. ✓ ?
Sunt **false** următoarele afirmații:

A Sistemul este incompatibil;

B Sistemul este compatibil pentru $a = 10$, $b = -5$, $c = -\frac{15}{4}$;

C Sistemul este compatibil pentru $a = 10$, $b = 7$;

D Sistemul este incompatibil pentru $a = 10$, $b = -5$, $c = -\frac{15}{4}$.

121. Se dă sistemul de ecuații $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ ax_1 + bx_2 + cx_3 = d \\ a^2x_1 + b^2x_2 + c^2x_3 = d^2 \end{cases}$, cu a, b, c, d numere reale. ✓ ?
Sunt adevărate următoarele afirmații::

A Pentru $\begin{cases} a \neq d \\ b \neq d \\ a \neq c \\ b = c \end{cases}$, sistemul este incompatibil;

B Sistemul este incompatibil pentru $a = b = c = d$;

C Sistemul este compatibil pentru $a = b = c = d$;

D Pentru $\begin{cases} a \neq d \\ a = b = c \end{cases}$, sistemul este incompatibil.

122. Se dă sistemul de ecuații $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 + 9x_2 + ax_3 + 3x_4 = 3 \\ 5x_1 - 6x_2 + 10x_3 + bx_4 = c \end{cases}$, cu a, b, c numere reale. ✓ ?
Sunt **false** următoarele afirmații:

A Sistemul este incompatibil pentru $a = 3$;

B Sistemul este compatibil nedeterminat pentru $a = 2, b = -2, c = -2$;

C Sistemul este compatibil nedeterminat pentru $a = 2, b = -2, c = 7$;

D Sistemul este incompatibil pentru $a = 2, b = -2, c = -3$.

123. Se dă sistemul de ecuații $\begin{cases} bx + ay = c \\ cx + az = b \\ cy + bz = a \end{cases}$ cu a, b, c, d numere reale. Sunt adevărate următoarele afirmații:

A Pentru $a = b = c = 0$ sistemul are soluție unică;

B Sistemul este incompatibil pentru $a = b = 0, c = 8$;

C Sistemul este compatibil pentru $a = 0, c \neq \pm b$;

D $M = \{(1, \alpha, \alpha) | \alpha \in \mathbb{R}\}$ este mulțimea soluțiilor pentru $a = 0, b = c$.

124. Se dă sistemul de ecuații $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = -1 \\ -x_1 + x_2 + ax_3 + 2x_4 = 2 \\ -x_1 - 3x_2 + 2x_3 + bx_4 = c \end{cases}$, cu a, b, c numere reale. Sunt adevărate următoarele afirmații:

A $(2, -1, 0, 4)$ este soluția sistemului pentru $a = -2, b = -18, c = -7$;

B Sistemul este compatibil nedeterminat pentru $a = -2, b = -18, c = -10$;

C Sistemul este compatibil nedeterminat pentru $a = 2, b = -2, c = 7$;

D Sistemul este incompatibil pentru $a = -2, b = -18, c = -3$.

125. Se dă sistemul de ecuații $\begin{cases} -2x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + ax_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + bx_4 = c \end{cases}$ cu a, b, c numere reale. Sunt adevărate următoarele afirmații:

A $(-1, -1, 1, -1)$ este soluția sistemului pentru $a = -11, b = -7, c = 1$;

B Sistemul este compatibil pentru $a > 3, b < 2, c = 0$;

C Sistemul este compatibil nedeterminat pentru $a = -11, b = -7, c \neq -\frac{8}{5}$;

D Sistemul este incompatibil pentru $a = -11, b = -7, c \neq -\frac{8}{5}$.

126. Se dă sistemul de ecuații $\begin{cases} ax + by + 2z = 1 \\ ax + (2b - 1)y + 3z = 1 \\ ax + by + (b + 3)z = 2b - 1 \end{cases}$, cu a, b, c, d numere reale. Sistemul este incompatibil pentru:

A $a = 1, b = -1$. B $a = 0, b = 2$. C $a = 1, b = 1$. D $a \neq 0, b = 1$.

127. Fie S mulţimea soluţiilor din $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ale sistemului $\begin{cases} x + y = 7 \\ x^2 + 13x + 56 = y \end{cases}$ Care dintre următoarele afirmații sunt **false**?

$\boxed{\text{A}}$ $S = \{(-7, 14), (14, -7)\}$;

$\boxed{\text{B}}$ $S = \emptyset$;

$\boxed{\text{C}}$ $S = \{(-7, 14)\}$;

$\boxed{\text{D}}$ $S = \{(14, -7)\}$.

128. Considerăm $\alpha \in \mathbb{C}$ un parametru şi sistemul de ecuaţii liniare cu 4 necunoscute ✓ ?

$$\begin{cases} 2x_1 + \alpha x_2 + 2x_4 = 1 \\ 4x_1 - x_2 + (\alpha+2)x_3 + 5x_4 = 1 \\ 2x_1 + 10x_2 - 5x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$$

Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

$\boxed{\text{A}}$ Sistemul dat este incompatibil dacă şi numai dacă $\alpha \neq 3$;

$\boxed{\text{B}}$ Pentru $\alpha = -5$ sistemul dat este compatibil;

$\boxed{\text{C}}$ Sistemul dat este compatibil dacă şi numai dacă $\alpha \neq 3$;

$\boxed{\text{D}}$ Sistemul dat este compatibil dacă şi numai dacă $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{-5, 3\}$.

129. Câte triplete (x, y, z) de numere întregi verifică sistemul ✓ ?

$$\begin{cases} x^2 - xy + 4yz + xz + 1 = 0 \\ xy + 2yz + 2xz - 2 = 0 \end{cases} \quad ?$$

$\boxed{\text{A}}$ 5;

$\boxed{\text{B}}$ 4;

$\boxed{\text{C}}$ 1;

$\boxed{\text{D}}$ O infinitate.

130. Fie a, b, c, d numere reale. Când cele 2 parabole $y = ax^2 + c$ și $y = bx^2 - d$ se intersectează în exact 2 puncte? ✓ ?

$\boxed{\text{A}}$ $\dfrac{a}{b} < -\dfrac{c}{d}$;

$\boxed{\text{B}}$ $a < b$;

$\boxed{\text{C}}$ $(c - d)(a - b) > 0$;

$\boxed{\text{D}}$ $(d + c)(a - b) < 0$.

131. Se dă sistemul de ecuații $\begin{cases} x + y + z = 17, \\ x + yz = 26 \end{cases}$ cu soluții numere naturale. Sunt **false** următoarele afirmații: ✓ ?

$\boxed{\text{A}}$ $\dfrac{x - 7y}{3z} + \dfrac{x}{4} \in (-10, 0), \forall x, y, z$ soluții;

$\boxed{\text{B}}$ $\dfrac{x - 7y}{3z} + \dfrac{x}{4} \in (-12, 2), \forall x, y, z$ soluții;

$\boxed{\text{C}}$ $\dfrac{4z - y}{z} + \dfrac{3}{x} \in (-1, 2], \forall x, y, z$ soluții;

$\boxed{\text{D}}$ $\dfrac{4z - y}{z} + \dfrac{3}{x} \in (-1, 10), \forall x, y, z$ soluții.

132. Se dă sistemul de ecuații $\begin{cases} x + 6y + mz = 1 \\ 2x - 6y + m^2 z = m + 1, \\ x + (m+1)z = m^2 \end{cases}$ $m \in \mathbb{R}$. Notăm cu $S = \sum m$, ✓ ? pentru toate valorile lui m pentru care sistemul este incompatibil. Suma S este egală cu:

A $S = 2$; B $S = -1$; C $S = 1$; D $S = 3$.

133. Se dă sistemul de ecuații $\begin{cases} \log_5 x \cdot \log_x (x + 2y) = 2, \\ -xy + 26y = y^3 \end{cases}$. Sunt adevărate următoarele ✓ ? afirmații:

A Sistemul are o singură soluție reală;

C Sistemul are două soluții reale;

B Sistemul are trei soluții reale;

D Sistemul are o infinitate de soluții.

134. Se dă sistemul de ecuații $\begin{cases} ax + (a+1)y + (a+2)z = a+3, \\ bx + (b+1)y + (b+2)z = b+3, \\ x + cy + c^2 z = c^3 \end{cases}$ cu a, b, c numere ✓ ? reale. Sunt **false** următoarele afirmații:

A Sistemul este incompatibil;

B Sistemul este compatibil nedeterminat pentru $c \neq 1, a = b$;

C Sistemul este compatibil nedeterminat pentru $a = b = c = 1$;

D Sistemul este incompatibil pentru $a = 10, b = -5, c = 1$.

135. Se dă sistemul de ecuații $\begin{cases} (x+y)^{\frac{1}{2x}} = 4 \\ (x+y) \cdot 3^x = 48 \end{cases}$ cu soluții naturale. Fie S suma ✓ ? divizorilor primi a tuturor soluțiilor sistemului. Sunt adevărate următoarele afirmații:

A $S = 2$;

C $S = 8$;

B $S = 9$;

D S nu poate fi determinată.

136. Se dă sistemul de ecuații $\begin{cases} x + \hat{2}y - \hat{3}z = \hat{4} \\ \hat{2}x + \hat{3}y + z = \hat{7} \\ \hat{3}x + y + \hat{2}z = \hat{1} \end{cases}$ în $\mathbb{Z}_{10}$. Sunt adevărate următoarele ✓ ? afirmații:

A Sistemul are 2 soluții;

C $(\hat{8}, \hat{9}, \hat{9})$ este o soluție a sistemului;

B $(\hat{3}, \hat{4}, \hat{4})$ este o soluție a sistemului;

D Sistemul are o sută de soluții.

137. Se dă sistemul de ecuații $\begin{cases} A \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} -57 & 76 \\ 34 & 221 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} A + B \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 51 & 97 \\ 36 & -42 \end{pmatrix} \end{cases}$ în $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$. ✓ ?

Sunt adevărate următoarele afirmații:

A Sistemul are două soluții;

B $A = \begin{pmatrix} -16 & 22 \\ 59 & 83 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -15 & 8 \\ -40 & 20 \end{pmatrix}$ este o soluție a sistemului;

C $A = \begin{pmatrix} -16 & 24 \\ 59 & 83 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -15 & 8 \\ -40 & 20 \end{pmatrix}$ este o soluție a sistemului;

D Sistemul are soluție unică.

138. Se dă sistemul de ecuații $\begin{cases} mx - y + z = \hat{1} \\ x + my - z = \hat{1} \\ -x + y + mz = \hat{1} \end{cases}$ în $\mathbb{Z}_5$. Sunt adevărate următoarele afirmații: ✓ ?

A Pentru $m = \hat{0}$ sistemul este incompatibil;

B Pentru $m \in \{\hat{1}, \hat{2}, \hat{3}\}$ sistemul este incompatibil;

C Pentru $m \in \{\hat{1}, \hat{2}, \hat{4}\}$ sistemul este incompatibil;;

D Pentru $m \in \{\hat{0}, \hat{2}\}$ sistemul este incompatibil.

Structuri algebrice

139. Pe mulțimea numerelor reale pozitive se consideră legea de compoziție $x * y = x^{y^{xy}}$. ✓ ?
Notăm rezultatul calculului $\sum_{t=2}^{2024} \frac{1}{\log_{t+1} \log_t (t * (t+1))}$ cu $\frac{a}{b}$, unde $a, b \in \mathbb{N}$. Atunci valoarea expresiei $b - a$ este:

A 2025; B 2026; C 2027; D nu se poate determina.

140. Pe mulțimea $\mathbb{Z}_6$ se consideră legea de compoziție $x * y = xy + x + y$. Fie funcția $f : \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_6,\ f(x) = x * \hat{4}$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A f este surjectivă, dar nu este injectivă;

B f este injectivă, dar nu este surjectivă;

C f nu este nici surjectivă, nici injectivă;

D f este bijectivă.

141. Fie $M = \left\{ \begin{pmatrix} b & 0 \\ a & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Q},\ bc = 1 \right\}$. Sunt adevărate afirmațiile: ✓ ?

A M este parte stabilă a lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ în raport cu înmulţirea matricelor;

B Înmulţirea matricelor este o operaţie asociativă pe M;

C Înmulţirea matricelor este o operaţie comutativă pe M;

D Înmulţirea matricelor este o operaţie pe M care admite element neutru.

142. Pe mulţimea $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \{f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ considerăm operaţiile de adunare şi înmulţire definite punctual, adică pentru orice $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, funcţiile $f + g, f \cdot g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sunt definite prin $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$, $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Sunt adevărate următoarele afirmaţii: ✓ ?

- A Funcţia identică $1_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $1_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}(x) = x$ este element neutru în $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \cdot)$;
- B $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, \cdot)$ este corp;
- C $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, \cdot)$ este inel, dar nu este corp;
- D $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, \cdot)$ nu este inel.

143. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ a numerelor reale definim legea de compoziție "$\circ$" prin $x \circ y = 2xy - 3x - 3y + 6$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

- A Elementul neutru în raport cu "$\circ$" este 3;
- B Simetricul lui 4 în raport cu "$\circ$" este $\frac{8}{5}$;
- C Orice $x \in \mathbb{R}$ este simetrizabil în raport cu "$\circ$";
- D Funcţia $f : \mathbb{R} \setminus \{\frac{3}{2}\} \to \mathbb{R}^*$, $f(x) = x - \frac{3}{2}$ este izomorfism de la grupul $(\mathbb{R} \setminus \{\frac{3}{2}\}, \circ)$ la grupul $(\mathbb{R}^*, \cdot)$.

144. Pe intervalul $(-1, 1)$ definim legea de compoziţie "$*$" prin $x * y = \dfrac{x + y}{1 + xy}$, pentru orice $x, y \in (-1, 1)$. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate? ✓ ?

- A Elementul neutru în raport cu "$*$" este $\frac{1}{2}$;
- B $\frac{1}{3} * \left(\frac{1}{3} * \frac{1}{3}\right) = \frac{5}{9}$;
- C Legea de compoziţie "$*$" este asociativă;
- D Simetricul lui $\frac{1}{3}$ în raport cu "$*$" este $\frac{1}{9}$.

Problemele **145.** și **146.** se referă la legea de compoziție "$*$" definită pe $\mathbb{R}$, $x * y = 3(x - 2)(y - 2) + 7\alpha - 12$, unde $\alpha \in \mathbb{R}^*_+$.

145. Se consideră mulțimea $G_\alpha = (\alpha, \infty)$. Dacă $\alpha = 2$, atunci $(G, *)$ este: ✓ ?

- A Grup necomutativ;
- B Grup abelian;
- C Grup izomorf cu $(\mathbb{R}^*_+, \cdot)$;
- D Monoid comutativ.

146. Mulțimea $G_\alpha = (\alpha, \infty)$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea "$*$" pentru: ✓ ?

- A $\alpha = 1$;
- B $\forall \alpha \in$ (-∞, 0];
- C $\forall \alpha \geq 2$;
- D $\alpha = 0$.

Problemele **147.** și **148.** se referă la legea de compoziție "$*$", definită pe mulțimea G $= [0, 1)$, $x * y = \{x + y\}$, $\forall x, y \in G$, unde $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a numărului x.

147. Structura $(G, *)$ este: ✓ ?

A Monoid comutativ;

B Grup abelian;

C Grup izomorf cu grupul $(\mathbb{R}, +)$;

D Niciuna dintre variantele menționate.

148. Ecuația $x * x * x = \dfrac{1}{2}$ are: ✓ ?

A 2 soluții;

B 3 soluții;

C 0 soluții;

D 1 soluție.

149. Se consideră mulțimea $G = (12, \infty)$, iar pe mulțimea numerelor reale pozitive și nenule, se consideră legea de compoziție asociativă "$*$", definită prin $x * y = xy - 12x - 12y + 156$, $\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*$. Știind faptul că $f : G \to \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = x - 12$ este un izomorfism între grupurile $(G, *)$ și $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$, stabiliți care dintre următoarele afirmații sunt adevărate: ✓ ?

A $a = \dfrac{1 * 2 * 3 * \ldots * 2024}{6}$ este număr prim;

B $a = \dfrac{1 * 2 * 3 * \ldots * 2024}{6}$ este număr par;

C $\underbrace{x * x * x * \ldots * x}_{2024 \text{ ori}} = (x - 12)^{2024}, x \in G$;

D $\underbrace{x * x * x * \ldots * x}_{2024 \text{ ori}} = (x - 12)^{2024} + 12, x \in G$.

150. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$. În care dintre următoarele cazuri este f un morfism de grupuri între grupurile $(\mathbb{R}, +)$ şi $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$? ✓ ?

A $f(x) = |x|,\ \forall x \in \mathbb{R}$;

B $f(x) = x + 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$;

C $f(x) = e^x,\ \forall x \in \mathbb{R}$;

D $f(x) = x^2,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

151. Fie $U_{12} = \{z \in \mathbb{C} |\ z^{12} = 1\}$ grupul rădăcinilor de ordinul 12 ale unităţii. Considerăm numărul complex $w = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2} \in U_{12}$. Care este ordinul acestui element în grupul $(U_{12}, \cdot)$? ✓ ?

A 2;

B 6;

C 12;

D 3.

152. Fie $\alpha \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Pe mulţimea $\mathbb{Z}$ definim operaţiile: $x \oplus y = x + y + \alpha$ și $x \odot y = (x + 7)(y + 7) - 7$. Atunci: ✓ ?

A 0 este elementul neutru al operaţiei $\oplus$;

B Operaţia $\odot$ este asociativă;

C $\odot$ este distributivă faţă de $\oplus$ dacă şi numai dacă $\alpha = -7$;

D $x \in \mathbb{Z}$ este inversabil faţă de legea $\odot$ dacă şi numai dacă $x = -8$.

153. Fie legea de compoziţie pe $\mathbb{Q}$ definită de relaţia ✓ ?

$$x \circ y = x + y + 3xy.$$

Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

A $(\mathbb{Q}, \circ)$ este grup abelian;

B Există $m \in \mathbb{Q}$ pentru care $(\mathbb{Q} \setminus \{m\}, \circ)$ este grup;

C Legea "$\circ$" este asociativă;

D Legea "$\circ$" are element neutru.

154. Fie $(\{0, 1, \alpha, \beta\}, +, \cdot)$ un corp cu patru elemente. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate? ✓ ?

A $1 + 1 = 0$;

B $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha = 1$;

C $\alpha + \beta = 0$;

D $1 + 1 + 1 + 1 = 0$;

155. Pentru un grup finit $(G, \cdot)$ cu elementul neutru e şi un număr natural nenul p, notăm $G_p = \{x \in G : x^p = e\}$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A Există un grup finit G astfel încât G_2 să aibă 3 elemente;

B Există un grup finit G astfel încât G_2 să aibă 4 elemente;

C G_3 are un număr impar de elemente, pentru orice grup finit G;

D Există un grup finit G astfel încât G_3 să aibă 3 elemente.

156. Fie mulţimile de matrici: $\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$, $\mathcal{B}_d = \{M \in \mathcal{M} |\ \det(A) = d\}$, ✓ ?
pentru orice $d \in \mathbb{R}$ şi funcţia $f : \mathbb{C} \to \mathcal{M}$ definită prin $f(a + ib) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$. Fie $U_4 = \{z \in \mathbb{C} |\ z^4 = 1\}$. Atunci:

A f este o funcţie injectivă;

B f este un morfism de corpuri;

C $\mathbb{C} = \bigcup_{d \in \mathbb{R}_{\geq 0}} f^{-1}(\mathcal{B}_d)$;

D $f(U_4) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$.

Pe mulțimea $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definim legea de compoziție "$*$", $(x, y) * (w, t) = (xw + yt, xt + wy)$. Problemele **157.** și **158.** se referă la această lege de compoziție.

157. Elementul neutru al legii "$*$" este: ✓ ?

A $(0,0)$; B $(1,0)$; C $(0,1)$; D $(1,1)$.

158. Fie $(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, astfel încât $(-2024, 2024) * (-2023, 2023) * \cdots * (2023, -2023) * (2024, -2024) = (a,b)$. Valoarea expresiei $a+b$ este: ✓ ?

A 2024; B 4048; C 0; D 1.

159. Fie $(G, \cdot)$ un monoid cu elementul neutru e și $x \in G, x \neq e$ astfel încât $x^2 = e$. Dacă $y \in G, y \neq x$ astfel încât $xy = y^2$, atunci $y^{2024} =$? ✓ ?

A y^4; B e; C x; D y^2.

160. Fie $G = (\mathbb{Z}, +)$ grupul format din mulțimea numerelor întregi și operația de adunare. Notăm $End(\mathbb{Z})$ mulțimea endomorfismelor lui G și $Aut(\mathbb{Z})$ mulțimea automorfismelor lui G. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A Dacă $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \in End(\mathbb{Z})$, $\varphi(x) = \dfrac{x}{k}, k \in \mathbb{Z}$;

B Dacă $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \in End(\mathbb{Z})$, $\varphi(x) = x \cdot k, k \in \mathbb{Z}$;

C $Aut(\mathbb{Z}) = \{\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} | \varphi(x) = x\}$;

D $Aut(\mathbb{Z}) = \{\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} | \varphi(x) = x \text{ sau } \varphi(x) = -x\}$.

Pe mulțimea $\mathbb{N}$ definim legile de compoziție "$\oplus$" și "$\odot$" astfel:

$$x \oplus y = \text{cel mai mare divizor comun al numerelor } x \text{ și } y$$
$$x \odot y = \text{cel mai mic multiplu comun al numerelor } x \text{ și } y.$$

Problemele **161.** și **162.** se referă la aceste legi de compoziție.

161. Rezultatul calculului $1 \oplus 2 \oplus 3 \oplus \cdots \oplus 2024 \oplus 2025$ este: ✓ ?

A 0; C 2025;

B 1; D nu se poate determina.

162. Rezultatul calculului $1 \oplus 2 \odot 3 \oplus 4 \odot \cdots \odot 2023 \oplus 2024 \odot 2025$ este: ✓ ?

A 0; C 2025;

B 1; D nu se poate determina.

163. Pe $\mathbb{R}$ definim legea de compoziție "$*$", $x * y = |x| + |y|, x, y \in \mathbb{R}$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A Dacă $x * 3 \leq 5, x \in [-2, 2]$; C $x * y = x + y \iff x, y \leq 0$;

B Dacă $x * 1 \leq 0, x \in (-\infty, -1]$; D $x * y \geq |x + y|$.

164. Fie mulțimea $G = (3, \infty)$ definim legea de compoziție "$*$", $x*y = -3x-3y+xy+12$; $x, y \in G$. Fie funcția $f : G \to \mathbb{R}, f(x) = \ln(ax^2 + bx + c)$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel încât $ax^2 + bx + c > 0, \forall x \in G$. Știind că f este un izomorfism între grupurile $(G, *), (\mathbb{R}, +)$, atunci: ✓ ?

A $a = 1, b = 2, c = 3$;

B $a = 0, b = 1, c = -3$;

C $a = 0, b = 1, c = 3$;

D $a = 1, b = 2, c = -3$.

165. Fie $\xi = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \in \mathbb{C}$. Se ştie că $(\mathbb{Z}[\xi], +, \cdot)$ este un inel, unde: $\mathbb{Z}[\xi] := \{a + b\xi |\ a, b \in \mathbb{Z}\}$. Considerăm funcţia: ✓ ?

$$\Phi : \mathbb{Z}[\xi] \to \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$$
$$a + b\xi \mapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & f(a,b) \end{pmatrix}$$

unde $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ este o funcţie. Dacă Φ este un morfism de inele între $(\mathbb{Z}[\xi], +, \cdot)$ şi $(\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}), +, \cdot)$, stabiliți care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate:

A $\Phi(\xi) = -\Phi(\xi^2) + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$;

B $f(x, y) = x+y$, pentru orice $x, y \in \mathbb{Z}$;

C $f(x, y) = x-y$, pentru orice $x, y \in \mathbb{Z}$;

D $\Phi(\xi + 1) = \Phi(-\xi^2)$.

Polinoame

166. Fie $\alpha \in \mathbb{R},\ f = X^3 + \alpha X^2 - \alpha X - 1 \in \mathbb{R}[X]$ şi matricea $A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{pmatrix}$ din $M_3(\mathbb{C})$ ale cărei elemente sunt rădăcinile lui f. Atunci: ✓ ?

A Cel puţin un element din fiecare linie a lui A este 1;

B Valorile lui α pentru care $A \in M_3(\mathbb{R})$ sunt $\alpha \in (-\infty, -3] \cup [1, \infty)$;

C $\det(A) \in \mathbb{R}$ pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$;

D Valorile lui α pentru care $A \in M_3(\mathbb{R})$ sunt $\alpha \in [-3, 1]$.

167. Se consideră polinomul $f \in \mathbb{R}[X], f = X^3 - (m+2)X^2 + (m^2+2)X - 1, m \in \mathbb{R}$. Valoarea parametrului m pentru care toate rădăcinile polinomului sunt numere reale este: ✓ ?

A -1;

B 1;

C 0;

D 2.

168. Să se determine numerele $a, b \in \mathbb{Z}$ astfel încât polinoamele $f = aX^2 + bX + 12$ şi $g = X^3 + 2bX^2 + 3aX + 5$ să aibă o rădăcină întreagă comună. ✓ ?

A $a = 18,\ b = -30$;

B $a = 28,\ b = 40$;

C $a = 20,\ b = 30$;

D Nu există valori care să îndeplinească condiția.

169. Câte polinoame $p \in \mathbb{R}[X]$ pentru care funcţia polinomială asociată lui p să fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin x$ există? ✓ ?

A Un singur polinom;

B Două polinoame;

C O infinitate;

D Nici unul.

Problemele **170.** și **171.** se referă polinomul $f = X^4 + aX^3 + \widehat{2}X^2 + aX + a + \widehat{1} \in \mathbb{Z}_3[X]$.

170. Polinomul f are rădăcină în $\mathbb{Z}_3$ dacă şi numai dacă: ✓ ?

A $a \in \{\widehat{0}, \widehat{2}\}$;

B $a \in \mathbb{Z}_3$;

C $a \in \{\widehat{1}, \widehat{2}\}$;

D $a \in \emptyset$.

171. Mulţimea tuturor valorilor $a \in \mathbb{Z}_3$ pentru care polinomul f este reductibil în $\mathbb{Z}_3[X]$ este: ✓ ?

A $\{\widehat{0}, \widehat{2}\}$;

B $\emptyset$;

C $\{\widehat{1}, \widehat{2}\}$;

D $a \in \mathbb{Z}_3$.

172. Fie polinomul $h = X^4 - 5X^2 + 4$, astfel încât $h(w) = h(x) = h(y) = h(z) = 0$ și $w \neq x \neq y \neq z$. Care dintre următoarele afirmații despre produsul $S = (4 - w)(4 - x)(4 - y)(4 - z)$ nu sunt adevărate? ✓ ?

A $(w \cdot x \cdot y \cdot z)^4 \leq S$;

B $S = 196$;

C $S \geq 4^3$;

D $S = 180$.

173. Dacă polinomul $f(x) = x^3 - 2025x^2 + 2024x + 2023$ are ca rădăcini distincte numerele $a, b, c \in \mathbb{R}$, valoarea raportului $\dfrac{3 - 2a^2 - 2b^2 - 2c^2 + a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2}{(1 - a^2)(1 - b^2)(1 - c^2)}$ este: ✓ ?

A $\dfrac{4047}{2027}$;

B $\dfrac{2025}{2027}$;

C $-\dfrac{2025}{2024}$;

D $\dfrac{2025}{2024}$.

Problemele **174.** și **175.** se referă polinomul $f = X^{2024} + 7X^{2023} + 3x^2 + 3, f \in \mathbb{R}[x]$.

174. Restul împărțirii lui f la polinomul $X + 1$ este: ✓ ?

A 0;

B $x^2 + 12x + 1$;

C $x + 7$;

D 10.

175. Dacă $x_i, i = \overline{1, 2024}$ sunt rădăcinile polinomului f, care este rezultatul calculului ✓ ?

$$\sum_{i=1}^{2024} x_i + \prod_{i=1}^{2024} x_i \ ?$$

A π; B -7; C $\pi\sqrt{3}$; D -4.

Problemele **176.** și **177.** se referă polinomul $f = X^2 + mX - 2$, unde $m \in \mathbb{R}, m > 0$.

176. Valoarea lui m astfel încât $f \,\vdots\, (X - m)$ este: ✓ ?

A 1; B 2; C 2024; D 391.

177. Dacă x_1 și x_2 sunt rădăcinile polinomului f, valoarea lui m astfel încât $\dfrac{\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}}{x_1 + x_2} = 2$ ✓ ?
este:

A 1; B 2; C 2024; D 391.

178. Fie f un polinom de gradul 3 cu rădăcini complexe, astfel încât ✓ ?

$$\begin{cases} x_1 = i + 1, \text{ rădăcină a lui } f; \\ f(0) = f(1); \\ \text{coeficientul lui } X^3 \text{ este } 1. \end{cases}$$

Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

A $f(-1) = 0$;
B $f(0) = f(1) = 0$;
C $x_1 + x_2 + x_3 = 1$;
D $x_1 x_2 x_3 = -2$.

179. Se consideră polinomul $f = 5X^3 - 15aX^2 + 12X - 2$, unde $a \in \mathbb{R}$. Știind că rădăcinile lui f se află în progresie aritmetică, valoarea lui a poate fi: ✓ ?

A $-\dfrac{1}{2}$; B $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$; C $-\dfrac{1}{2} + \dfrac{3\sqrt{5}}{10}$; D 1.

180. Fie a, b și c soluțiile ecuației $x^3 + 6x^2 + 16x + 8 = 0$. Valoarea expresiei $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}$ ✓ ?
este:

A 0; B 5; C 2; D 3.

181. Se consideră polinomul $P \in \mathbb{R}[X]$, $P = X^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Restul împărțirii lui P la polinomul $X^2 + 2X - 63$ este: ✓ ?

A $-\dfrac{(9^n + 7^n)}{2}X + \dfrac{3 \cdot 7^n + 9^n}{2}$;
B $\dfrac{9^n + 7^n}{2}$;
C $9^n \cdot X + \dfrac{25 \cdot (-9)^n - 9 \cdot 7^n}{16}$;
D $\dfrac{(-9)^n + 7^n}{16}X + \dfrac{7 \cdot (-9)^n + 9 \cdot 7^n}{16}$.

182. Fie două polinoame $P_1, P_2 \in \mathbb{R}[X]$ cu termenul liber $a \in \mathbb{R}^*, a > 2$. Știind că ambele polinoame dau același rest la împărțirea cu $X - a$, termenul liber al polinomului $P_1(P_2(x)) - P_2(P_1(x))$ este: ✓ ?

A 0; B 1; C 2024; D 3192.

183. Fie polinomul $P \in \mathbb{R}[X]$. Știind că funcția polinomială asociată acestuia are forma ✓ ?

$$P(x) = \frac{x^n}{a_n a_{n-1}} + \frac{x^{n-1}}{a_{n-1}a_{n-2}} + \cdots + \frac{x^2}{a_2 a_1} + \frac{n}{a_1 a_n}$$

care dintre următoarele afirmații **nu** sunt adevărate, considerând că $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sunt termenii unei progresii aritmetice?

A $(X-1) \nmid P$;

B $P(1) = n + \dfrac{n}{a_1 a_n}$;

C $P(1) = 0$;

D $P(1) = n - 1 + \dfrac{n}{a_1 a_n}$.

184. Fie polinomul $P = 2021X^3 + 2022X^2 - 2023X + 2024$, cu rădăcinile x_1, x_2 și x_3. ✓ ?

Valoarea determinantului $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 - 1 \\ x_1 & x_2 - 1 & x_3 \\ x_1 - 1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix}$ este:

A 2023; B $\dfrac{4043}{2021}$; C 2024; D $\dfrac{4044}{2023}$.

185. Se consideră polinomul $f = (1+X)^{25} = a_0 + a_1 X + \cdots + a_{25}X^{25}$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A $a_1 + a_3 + \cdots + a_{25} = 2^{25}$;

B $a_1 + a_3 + \cdots + a_{25} = 2^{24}$;

C $a_{19} = C_{25}^{12}$;

D $a_{19} = a_6$.

186. Fie polinomul $S_k = a_k X^k + a_{k-1}X^{k-1} + \ldots a_2 X^2 + a_1 X + a_0$ dat de șirul de coeficienți $(a_k, a_{k-1}, \ldots, a_1, a_0)$. Rădăcinile acestui polinom sunt $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A Pentru $k = 3$ și șirul de coeficienți $(5, -11, 7, 3)$, valoarea sumei $x_1 \cdot (1 + x_2 + x_3) + x_2 \cdot (1 + x_1 + x_3) + x_3 \cdot (1 + x_1 + x_2) = \dfrac{3}{5}$;

B Pentru $k = 100$ și șirul de coeficienți $(1, 1, \ldots, 1)$, valoarea sumei $\displaystyle\sum_{i=1}^{100} \frac{1}{1 - x_i} = 50$;

C Pentru $k = 2$ și șirul de coeficienți $(3, 7, q)$, valoarea lui q este egală cu 3, știind că $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = \dfrac{7}{3}$;

D Pentru $k = 10$ și șirul de coeficienți $(1, 1, \ldots, 1)$, valoarea sumei $\displaystyle\sum_{i=1}^{10} \frac{1}{1 - x_i} = 55$;

187. Fie polinomul $P = X^4 + aX^3 + bX + c,\ a, b, c \in \mathbb{R}$ cu rădăcinile $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$. Să se determine valoarea expresiei $x_2 P'(x_2) + x_3 P'(x_3) + x_1 P'(x_1) + x_4 P'(x_4)$. ✓ ?

A $9c - 4a^2 + 2ab$; B $5ab + 4c$; C $a^4 - 3a^2b + 3ab + 3ac - 4c$; D $3a^4 + 3ac - 4c$.

188. Fie $P \in \mathbb{R}[X]$ având coeficientul dominant 2. Știind că $xP(x-2) = (x-4)P(x-1)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A $P(4) = 0$;

B rădăcinile polinomului P sunt $x_1 = 0,\ x_2 = -1,\ x_3 = 2,\ x_4 = 1$;

C $P(3) = 48$;

D polinomul are gradul 5.

Diverse

189. Fie a, b, c trei numere întregi. Numărul de triplete (a, b, c) care satisfac ecuația $a^2 + b^2 - 8c = 6$ este: ✓ ?

A 1; B 2; C 3; D 0.

190. Notăm cu $\mathcal{F}$ mulțimea tuturor funcțiilor cu domeniul $\{0, 1, 2, 3\}$ și codomeniul $\{1, 2, 3, 4\}$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A Mulțimea $\mathcal{F}$ conține 4^3 funcții;

B Mulțimea $\mathcal{F}$ conține 4 funcții strict monotone;

C Mulțimea $\mathcal{F}$ conține 4 funcții injective;

D Probabilitatea ca o funcție f aleasă aleator din mulțimea $\mathcal{F}$ să verifice $f(0) = f(1) = 1$ este $\frac{1}{16}$.

191. Fie $a \in (0, +\infty) \setminus \{1\}$ şi $x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n \in \mathbb{R}$ astfel încât $x_1 + x_2 + ... + x_n = 0$. Dacă ✓ ?

$$P = \left(a^{2x_1}\right)^n \cdot a^{x_1} + \left(a^{2x_2}\right)^n \cdot a^{x_2} + ... + \left(a^{2x_n}\right)^n \cdot a^{x_n} \quad \text{și}$$

$$Q = n\left(a^{2x_1} + a^{2x_2} + ... + a^{2x_n}\right) - (n-1)\left(a^{x_1} + a^{x_2} + ... + a^{x_n}\right), \quad \text{atunci:}$$

A $P > Q$; B $P \geq Q$; C $P < Q$; D $P > Q - 1$.

192. Dacă ecuaţia de gradul al doilea $x^2 + ax + b = 0$, are coeficienţii a şi b întregi şi rădăcinile întregi diferite de $k-1$, k şi $k+1$, atunci numărul $b + ak + k^2$ este: ✓ ?

A Compus (adică nu este prim);

C 1;

B Prim;

D Poate fi şi compus şi prim.

193. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, $x_1, x_2, ...,\ x_n \geq 0$ şi $a \geq 2$. Dacă $P = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + a^{x_k} + a^{x_{k+1}+1}\right)$ şi $Q = a^{2(n+x_1+x_2+...+x_n)}$, unde $x_{n+1} = x_1$, atunci: ✓ ?

A $P \geq Q$; B $P < Q$; C $P = Q - 1$; D $P = Q + 1$.

194. Care este cea mai mică valoare a expresiei $E(x, y, z) = x + 2y + 3z$, atunci când numerele întregi x, y, z verifică relaţia $2x(3x - 1) + y(y - 4x) + 4z(z - x) = 1$? ✓ ?

A 0; B -1; C -2; D 1.

195. Dacă $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sunt definite prin $f(x) = x^2 - 3x + 2$, $g(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, atunci inecuaţia $f(g(f(x))) \leq 0$, $x \in \mathbb{R}$, are soluţiile incluse în mulţimea: ✓ ?

A $\left[\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}, 1\right] \cup \left[2, \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right]$;

B $\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}, 1\right) \cup \left[2, \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right]$;

C $[-1, 1] \cup [2, 3]$;

D $[0, 1] \cup [2, 4]$.

196. Dacă x, y, z sunt numere întregi nenule astfel încât $4x + 7z = 7y + 9$, atunci restul împărţirii lui $2x + y + 5z$ la 6 este: ✓ ?

A 1; B 2; C 3; D 4.

197. Valoarea expresiei $|1 - 4 + 9 - 16 + 25 - 36 + \ldots + 99^2 - 100^2|$ poate fi exprimată ca și: ✓ ?

A $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 98 + 99 + 100$;

B $2 + 4 + 6 + 8 + \ldots + 196 + 198 + 200$;

C $\dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{3} + \ldots + \dfrac{5059}{5060}$;

D $3 + 7 + 11 + 15 + \ldots + 199$.

Fie n şi p numere naturale mai mari sau egale decât 2 şi $x = \sqrt[n]{\sqrt{p} + \sqrt{p-1}} + \sqrt[n]{\sqrt{p} - \sqrt{p-1}}$

Problemele **198.** şi **199.** se referă la această ecuație.

198. Dacă p nu este pătrat perfect, atunci x este: ✓ ?

A Întreg; B Raţional; C Iraţional; D Natural.

199. Pentru $n = 2$, numerele p pentru care x este raţional au forma: ✓ ?

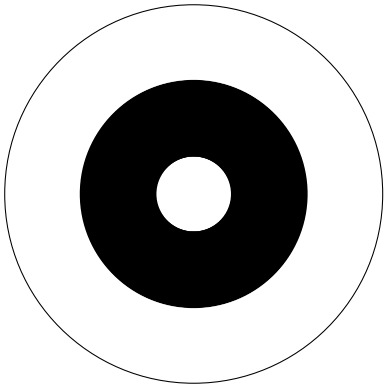
A $4r^4$, cu $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 2$;

B $(2r^2 - 1)^2$, cu $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 2$;

C $(2r^2 - 3)^2$, cu $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 2$;

D $(3r^2 - 1)^2$, cu $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 1$.

200. Fie o țintă de darts, alcătuită din 3 cercuri concentrice, având razele $1, 3, 5$ respectiv. O săgeată este aruncată la întamplare și atinge ținta; care este probabilitatea ca săgeata să aterizeze pe zona neagră? ✓ ?



✓ ?

[A] 32%; [B] 36%; [C] 40%; [D] 56%.

2

Analiză matematică

Șiruri

201. Termenul general al șirului (x_n) definit prin $x_{n+1} = x_n^{1+\frac{1}{n}}$, $x_1 \in \mathbb{R}$, este: ✓ ?

$\boxed{A}$ $x_n = x_1^{\frac{1}{n}}$; $\boxed{B}$ $x_n = x_1^{\frac{n+1}{n}}$; $\boxed{C}$ $x_n = x_1^n$; $\boxed{D}$ $x_n = x_1^{\frac{n+2}{n+1}}$.

202. Aflați termenul general al șirului (x_n) definit prin $x_1 = 2, x_2 = 2, x_{n+2} = \dfrac{4x_n x_{n+1}}{4x_n - x_{n+1}}$. ✓ ?

$\boxed{A}$ $x_n = \dfrac{2^n}{n}$; $\boxed{B}$ $x_n = \dfrac{2^{n+1}}{n+1}$; $\boxed{C}$ $x_n = \left(\dfrac{x_1}{1}\right)^n$; $\boxed{D}$ $x_n = \dfrac{n+1}{2^n}$.

203. Pentru șirul (x_n) de numere pozitive cu $x_{n+1}^3 < 3x_n - 2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, este adevărat că: ✓ ?

$\boxed{A}$ Șirul este crescător;

$\boxed{B}$ Șirul este mărginit inferior;

$\boxed{C}$ Șirul este mărginit superior;

$\boxed{D}$ Limita șirului este 1.

204. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate pentru $x_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k^4 + k^2 + 1}$? ✓ ?

$\boxed{A}$ Șirul (x_n) este mărginit superior;

$\boxed{B}$ Șirul (x_n) este mărginit inferior;

$\boxed{C}$ Șirul (x_n) este nemărginit;

$\boxed{D}$ $x_n < \frac{1}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

205. Pentru $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$ valoarea lui $L = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(a_n + \frac{1}{n(n+1)}\right)^n$ este: ✓ ?

$\boxed{A}$ $L = 1$; $\boxed{B}$ $L = 2$; $\boxed{C}$ $L = \infty$; $\boxed{D}$ $L = e$.

206. Valoarea limitei șirului (x_n) definit prin $x_n = \sqrt{n + \sqrt{n+1}} - \sqrt{n - \sqrt{n+2}}$ este: ✓ ?

A 0; B 1; C $\frac{1}{2}$; D $\frac{1}{4}$.

207. Numerele $a, b \in \mathbb{R}$ pentru care $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a\cdot n^2+b\cdot n+5}{b\cdot n^2+4\cdot n+7}\right)^{\frac{n^2+3}{n+1}}=\frac{1}{e}$ pot lua valorile: ✓ ?

A $a=2$; B $b=-2$; C $b=2$; D $a=-2$.

208. Limita șirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ definit prin $x_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}$ este: ✓ ?

A 0; B $\frac{1}{2}$; C ∞; D $\ln 2$.

209. Valoarea expresiei $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}}}$ este egală cu: ✓ ?

A 2; B -1; C 1; D -2.

210. Se consideră șirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dat prin $a_n=\{\sqrt{n^2+5n}\}$, unde $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a numărului real x. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ este egală cu: ✓ ?

A 0; B $\frac{1}{4}$; C $\frac{1}{5}$; D $\frac{1}{2}$.

211. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^3+x-1$ și x_n soluția ecuației $f(x)=\frac{n+1}{n}$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=1$;

C $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\frac{1}{2}$;

B f este injectivă, dar nu surjectivă;

D f este bijectivă.

212. Fie șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cu $x_0=a$ și $x_{n+1}=\frac{x_n^2+1}{x_n}$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A Șirul (x_n) este divergent;

C $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{\sqrt{n}}=\sqrt{2}$;

B Șirul (x_n) este convergent;

D $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{\sqrt{n}}=2$.

213. Fie șirurile (a_n), (b_n) definite prin $(1+\sqrt{5})^n=a_n+b_n\sqrt{5}$. Valoarea limitei $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$ este: ✓ ?

A $\sqrt{5}$; B $2\sqrt{5}$; C $e^{\sqrt{5}}$; D $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

214. Fie șirul (x_n) definit prin $x_n=\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n)}$. Limita șirului (x_n) este: ✓ ?

A 0; B ∞; C $\frac{1}{4}$; D $\frac{3}{4}$.

215. Fie $L = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{1+x_k}$ pentru șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, cu $x_1 = a \geq 1$, și $x_{n+1} = x_n + x_n^2$. ✓ ?
Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

A Șirul este convergent;
C Șirul este divergent;
B $L = \frac{1}{a}$;
D $L = \frac{1}{2a}$.

216. Fie șirul (a_n) definit prin relația de recurență $n \cdot a_{n+1} = (2n+2)(a_n + n \cdot 2^n)$, $n \geq 1$, cu $a_1 = 2$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A $a_n = n^2 \cdot 2^n$;
C $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$;
B $a_n = (n+1)^2 \cdot 2^n$;
D $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

217. Dacă $a_n = \ln(n+1) - \ln n + \frac{n}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}^*$, atunci șirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este: ✓ ?

A Nemărginit;
C Monoton;
B Convergent;
D Mărginit inferior de 1.

218. Dacă $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ satisface $x_1 = 1$ și $x_n = \frac{1}{2^n - 2} \cdot \sum\limits_{k=1}^{n-1} x_k \cdot x_{n-k}$, $n \geq 2$, atunci, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, e adevărat că: ✓ ?

A $(n+1) \cdot x_{n+1} = x_n$;
C $x_n \leq 2^n \cdot x_{n+1}$;
B $(n+1) \cdot x_{n+1} = n \cdot x_n$;
D $x_n \leq 2022 \cdot x_{n+1}$.

219. Considerăm şirul $(a_n)_{n\geq 2}$, cu $a_n = \sqrt{n+2} - 2\sqrt{n} + \sqrt{n-2}$, $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate? ✓ ?

A Șirul $(a_n)_{n\geq 2}$ este divergent;
C $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot a_n = 0$;
B Șirul $(a_n)_{n\geq 2}$ este strict crescător;
D $\lim\limits_{n\to\infty} n\sqrt{n} \cdot a_n = -1$.

220. Fie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definit prin relaţia de recurenţă $a_{n+1} = \frac{1}{4}\left(1 - \sqrt{a_n}\right)^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$ şi $a_0 = 0$. ✓ ?
Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

A Şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este monoton;
C Şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ are limită;
B Şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este mărginit;
D Şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este divergent.

221. Definim şirul de numere reale $(a_n)_{n\geq 1}$ prin relaţia $a_{n+1} = \frac{1}{n} + a_n^2, \forall n \in \mathbb{N}^*$ cu $a_1 = 0$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A Şirul este monoton;

B Şirul este mărginit;

C Şirul nu are limită;

D Şirul este convergent.

222. Fie şirul definit recursiv prin $a_{n+1} = \dfrac{2}{2 - a_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, cu $a_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A $a_n \notin \mathbb{Q}$, $\forall n \in \mathbb{N}$;

B $a_{n+4} = a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$;

C (a_n) şir mărginit;

D $\exists a_0$ astfel încât șirul converge.

223. Pentru $n \in \mathbb{N}^*$ fie $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate? ✓ ?

A Şirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este strict crescător;

B $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$;

C $a_{2021} \leq \dfrac{1}{2021}$;

D $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

224. Pentru $n \in \mathbb{N}$ fie $a_n = \dfrac{2^n}{n!}$. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate? ✓ ?

A Şirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este monoton;

B Şirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este convergent;

C $a_{2023} < \left(\dfrac{2}{3}\right)^{2023}$;

D $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

225. Pentru $a \in (0, \infty)$ definim $x_1 = \sqrt{a}$, $x_n = \sqrt{a + x_{n-1}}$, $\forall n \geq 2$. Atunci şirul (x_n) este: ✓ ?

A Descrescător şi convergent;

B Crescător;

C Crescător şi nemărginit;

D Mărginit.

226. Fie p, $n \in \mathbb{N}$, cu p, $n \geq 2$ şi ✓ ?

$$a_k = \begin{cases} \sqrt{p + k + \sqrt{2p + 2k - 1}}, & \text{dacă } k \in \{1, ..., n\} \\ -\sqrt{2n + p + 1 - k - \sqrt{4n + 2p + 1 - 2k}}, & \text{dacă } k \in \{n + 1, ..., 2n\}. \end{cases}$$

Dacă $A = \left(\dfrac{a_1 + a_2 + ... + a_{2n}}{2n}\right)^{2n}$ şi $G = a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_{2n}$, atunci:

A $A \leq G$;

B $A \geq G$;

C Dacă n este par atunci $A \leq G$, iar dacă n este impar atunci $A \geq G$;

D Dacă n este par atunci $A < G$, iar dacă n este impar atunci $A > G$.

227. Dacă $(x_n)_{n\geq 1}$ este definit prin $x_1 = 0$ şi $x_n = 1 + \dfrac{(n-1)^2}{1 + x_{n-1}}$, $\forall n \geq 2$, şi $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{n}$, $\beta = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \dfrac{x_n}{n}\right)^n$, atunci: ✓ ?

A $\alpha = 1, \quad \beta = 0$; B $\alpha = 1, \quad \beta = 1$; C $\alpha = 1, \quad \beta = 2$; D $\alpha = 2, \quad \beta = 1$.

228. Dacă $p > 0$ şi $L = \lim\limits_{n\to\infty}\Big(\sum\limits_{k=1}^{n}\Big(\sqrt{1 + p\frac{\sqrt{k^3}}{n^2}} - \frac{p}{2}\frac{\sqrt{k^3}}{n^2}\Big) - n\Big)$, atunci: ✓ ?

A $L = 0$; B $L = -\frac{p^2}{32}$; C $L = \frac{p^2}{32}$; D $L = p$.

229. Dacă $\alpha(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum\limits_{k=1}^{n}(k + (k+1)^x)(k + (k+1)^{-x}),\ x \in \mathbb{R}$, atunci: ✓ ?

A $\alpha(x) = \frac{1}{3}, \forall x \in \mathbb{R}$;

B $\alpha(x) = \frac{1}{3}$, dacă $|x| < 1$; $\alpha(x) = \frac{2}{3}$, dacă $|x| = 1$; $\alpha(x) = +\infty$, dacă $|x| > 1$;

C $\alpha(x) = \frac{1}{3}$, dacă $|x| \le 1$; $\alpha(x) = +\infty$, dacă $|x| > 1$;

D $\alpha(x) = \frac{1}{3}$, dacă $|x| < 1$; $\alpha(x) = +\infty$, dacă $|x| \ge 1$.

230. Fie $a \in (0, +\infty)$ și $A = \Big\{x \in \mathbb{R}\colon\ \frac{a^n n!}{n^n} \le x,$ pentru o infinitate de $n \in \mathbb{N}^*\Big\}$. Atunci: ✓ ?

A $A = (0, \infty)$, dacă $a < \mathrm{e}$;

B $A = \emptyset$, dacă $a > \mathrm{e}$;

C $A = (a, \infty)$, dacă $a > \mathrm{e}$;

D $A = \emptyset$, dacă $a < \mathrm{e}$;

231. Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ un șir de numere reale pozitive cu $e^{n+1}x_{n+1} - e^n x_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Atunci: ✓ ?

A $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este crescător;

B $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ are un subşir care nu e convergent;

C $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este descrescător;

D $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este convergent.

232. Valoarea limitei $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^4 + 2^4 + \cdots + n^4}{n^5}$ este: ✓ ?

A $\frac{1}{4}$; B 1; C $\frac{1}{5}$; D 0.

233. Fie $a_n = \frac{1}{n^2+1} + \cdots + \frac{1}{n^2+n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} n a_n$ este: ✓ ?

A 1; B $\frac{1}{2}$; C 0; D ∞.

234. Fie şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ definit prin $x_0 > 0$ şi $x_{n+1} = x_n + e^{-x_n^2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Atunci: ✓ ?

A $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este mărginit;

B $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$;

C $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{n} = e$;

D $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este strict descrescător.

235. Fie $0 < c < 1$ şi $k \in \mathbb{N}^*$. Limita $\lim_{n\to\infty} n^k c^n$ este egală cu: ✓ ?

A ∞; B 0; C 1; D e.

236. Ştiind că $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$, valoarea limitei $\lim_{n\to\infty} \left(n\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - en\right)$ este: ✓ ?

A 0; B $-\frac{1}{2}$; C $\frac{e}{2}$; D $-\frac{e}{2}$.

237. Considerăm şirul seriei armonice $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}, h_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Ştiind că şirul $(h_n - \ln n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este convergent la constanta Euler-Mascheroni $\gamma = 0.57721...$, valoarea limitei $\lim_{n\to\infty} (e^{h_{n+1}} - e^{h_n})$ este: ✓ ?

A 0; B e^γ; C γ^e; D $\ln \gamma$.

238. Se consideră șirurile de numere reale $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ și $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, cu $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sum_{i=1}^{k} i}$ și ✓ ?

$y_n = \frac{[1012(n+1)x_n]}{n+1}$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x. Notăm cu $L = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{y_n} \sum_{k=1}^{n} \log_{\frac{2}{3}} \frac{k^2+4k+3}{(k+2)^2}$. Să se indice care dintre următoarele afirmații sunt adevărate.

A $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{x_n}{2}\right)^n = \frac{1}{e}$;

B $L = 2024$;

C $\sum_{k=1}^{2024} L = 1$;

D $L \leq 1$.

239. Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, notăm $L = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^2 + 3k + 2}$. Valoarea limitei $\lim_{n\to\infty} L^n$ este: ✓ ?

A 1; B e^{-1}; C $\ln 2$; D $3 \ln 2$.

Funcții

240. Notăm cu ℓ valoarea limitei $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[2]{x+1} - 1}{\sqrt[4]{2x+1} - 1}$. Să se indice care dintre următoarele variante de răspuns **nu** reprezintă valoarea lui ℓ. ✓ ?

A $\frac{2}{3}$; B $\frac{4}{3}$; C $\frac{3}{4}$; D 1.

241. Știind că $L_n = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)\cos(2x)\ldots\cos(nx)}{x^2}$ cu $n\in\mathbb{N}^*$, să se indice valoarea de adevăr a următoarelor propoziții. ✓ ?

A $L_1 = \frac{1}{2}$;

B $L_1 = \frac{1}{4}$;

C $L_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{12}$;

D $L_n = \dfrac{n^2(2n+1)}{24}$.

242. Fie funcția $f:(1,\infty)\to\mathbb{N}$, $2^{f(x)} \le x < 2^{f(x)+1}$. Punctele în care funcția are limita sunt: ✓ ?

A $\{2^k \mid k\in\mathbb{N}\}$;

B $(1,\infty) - \{2^k \mid k\in\mathbb{N}\}$;

C $\{2k \mid k\in\mathbb{N}\}$;

D $(1,\infty) - \{2k \mid k\in\mathbb{N}\}$.

243. Să se indice care dintre următoarele variante de răspuns sunt adevărate, știind că $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1}$. ✓ ?

A f impară;

B f pară;

C f marginită;

D $\mathrm{Im}(f) = (-1,1)$.

244. Valoarea lui $n\in\mathbb{N}^*$ pentru care $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}\cdot \ln \dfrac{e^x + e^{2x} + e^{3x} + \ldots + e^{nx}}{n} = \dfrac{5}{2}$ este: ✓ ?

A 2; B 3; C 4; D 1.

245. Notăm cu $\ell = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{tg} x - \sin x}{\sin^3 x}$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A $\ell = 1/2$; B $\ell = 0$; C $\ell = 1/3$; D ℓ nu există.

246. Valoarea limitei $\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot\left(x\cdot\sin\frac{1}{x} - 1\right)\cdot\sin x$ este: ✓ ?

A 0; B 1; C ∞; D alt răspuns.

247. Pentru $n\in\mathbb{N}^*$, valoarea limitei $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)+\sin(2x)+\cdots+\sin(nx)}{\ln(x+1)+\ln(2x+1)+\cdots+\ln(nx+1)}$ este: ✓ ?

A $n(n+1)$; B $\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$; C $\dfrac{n(n+1)}{2}$; D 1.

248. Fie $f\colon(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = \left(\dfrac{\mathrm{arctg}\, x}{x}\right)^2$, ✓ ?

$$A := \left\{\alpha\in\mathbb{R} \mid \lim_{x\to 0} x^\alpha f(x) \in (0,\infty)\right\} \quad \text{şi} \quad B := \left\{\beta\in\mathbb{R} \mid \lim_{x\to\infty} x^\beta f(x) \in (0,\infty)\right\}.$$

Să se indice care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate.

A Mulţimea $A \cup B$ este finită;

B $2 \in A$;

C $0 \in B$;

D $A \cap B = \emptyset$.

249. Fie $f\colon [0, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{\cos x}$, şi $M := \left\{p \in \mathbb{R} \mid \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x\right)^p f(x) \in (0, \infty)\right\}$. ✓ ?
Să se indice care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate.

A $M = \emptyset$;

B $M \subseteq \mathbb{Q}$;

C $M = (0, \infty)$;

D $M \cap \mathbb{N} \neq \emptyset$.

250. Dacă $l = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{1+k+k^2}\right)$, atunci valoarea lui l este egală cu: ✓ ?

A $\frac{\pi}{4}$;

B $\frac{\pi}{2}$;

C 0;

D 1.

251. Valoarea limitei $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right)^{\frac{1}{\sin x}}$? este: ✓ ?

A 0;

B 1;

C e^2;

D e.

252. Notăm cu $h = \lim\limits_{x\to\infty} x\left(\dfrac{\pi}{4} - \operatorname{arctg}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)\right)$. Care dintre următoarele variante de răspuns indică valoarea lui h? ✓ ?

A $\frac{1}{2}$;

B $\frac{1}{4}$;

C 1;

D 0;

253. Fie $\ell = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\lim\limits_{x\to 0}\left(1 + \sum\limits_{k=1}^{n} \ln(1+kx)\right)^{\frac{1}{x}}\right]^{\frac{2}{n^2}}$. Dacă ℓ este de forma e^x, care dintre următoarele variante de răspuns indică valoarea lui x? ✓ ?

A $\frac{1}{2}$;

B $\frac{1}{4}$;

C 1;

D ∞;

254. Dacă $L = \lim\limits_{x \searrow 0} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{\ln(x+1)}}{x\sqrt{x}}$, atunci valoarea lui L este: ✓ ?

A 0;

B $\frac{1}{4}$;

C 2;

D ∞;

255. Se dă limita $L = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^4}\ln(1-x^3)\right)$. Stabiliţi valoarea de adevăr a afirmaţiilor. ✓ ?

A $-1 < L < 1$;

B $L > 0$;

C $L \in \{-\infty, +\infty\}$;

D limita nu există.

256. Fie $\ell = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\operatorname{tg}(\sqrt{5-x} - 2)}{x^2 - 1}$. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate? ✓ ?

$\boxed{\text{A}}$ $\ell = 0$; $\boxed{\text{B}}$ $|\ell| \leq 1/4$; $\boxed{\text{C}}$ $\ell \in \mathbb{Q}$; $\boxed{\text{D}}$ $\ell \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

257. Fie $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x+1}+ax+b) = 2$. Să se indice valoarea de adevăr a următoarelor afirmații. ✓ ?

$\boxed{\text{A}}$ $a < b$; $\boxed{\text{B}}$ $a \neq b$; $\boxed{\text{C}}$ $a = b = 1$; $\boxed{\text{D}}$ $a^2 + 2b = 6$.

Problemele **258.** și **259.** se referă la funcția $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \dfrac{1}{x} + \rho(x), \forall x \geq 1$, unde $\rho(x)$ notează distanţa de la x la cel mai apropiat întreg.

258. Dacă $\alpha = \inf\left\{\sup\{f(x) : \ x \in [n, n+1)\} : \ n \in \mathbb{N}^*\right\}$, atunci: ✓ ?

$\boxed{\text{A}}$ $\alpha = 0$; $\boxed{\text{B}}$ $\alpha = 1/2$; $\boxed{\text{C}}$ $\alpha = 1$; $\boxed{\text{D}}$ $\alpha = 3/2$.

259. Dacă $\beta = \sup\left\{\inf\{f(x) : \ x \in [n, n+1)\} : \ n \in \mathbb{N}^*\right\}$, atunci: ✓ ?

$\boxed{\text{A}}$ $\alpha = 0$; $\boxed{\text{B}}$ $\alpha = 1/2$; $\boxed{\text{C}}$ $\alpha = 1$; $\boxed{\text{D}}$ $\alpha = 3/2$.

260. Funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = kx^3 - (k+1)x^2 + (2-k)x - k$ are un minim local în $x = 1$ pentru orice: ✓ ?

$\boxed{\text{A}}$ $k > 0$; $\boxed{\text{B}}$ $0 < k < 1$; $\boxed{\text{C}}$ $k > 1/2$; $\boxed{\text{D}}$ $k \in \mathbb{R}$.

261. Numărul valorilor $a \in (0, 2\pi)$ pentru care $f(x) = |x^2 - 1|\sin(ax)$ este derivabilă pe $\mathbb{R}$ este: ✓ ?

$\boxed{\text{A}}$ 0; $\boxed{\text{B}}$ 1; $\boxed{\text{C}}$ 3; $\boxed{\text{D}}$ ∞.

262. Inegalitatea $a^x \geq x + 1$ are loc pentru orice $x \in \mathbb{R}$ dacă și numai dacă: ✓ ?

$\boxed{\text{A}}$ $a = e$; $\boxed{\text{B}}$ $a = 1$; $\boxed{\text{C}}$ $a = e^e$; $\boxed{\text{D}}$ $a = 1/e$.

263. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{dacă } x < 1 \\ 2x^2 - 6x + 6, & \text{dacă } x \geq 1, \end{cases}$ și $g : (1, 2) \to \mathbb{R}$, $g(t) = \displaystyle\int_{t-1}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x$. Numărul punctelor de extrem local ale lui g în intervalul $(1, 2)$ este: ✓ ?

$\boxed{\text{A}}$ 0; $\boxed{\text{B}}$ 1; $\boxed{\text{C}}$ 2; $\boxed{\text{D}}$ 3.

264. Se dă funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \sqrt{\left|x^2 - 3x + 2\right|}, & \text{dacă } x \in (0, 3) \\ -\dfrac{3}{2\pi\sqrt{2}}\sin(\pi x), & \text{altfel} \end{cases}$. Să se indice care dintre următoarele variante de răspuns sunt adevărate. ✓ ?

A f nu are puncte de întoarcere;

B f are un punct de întoarcere;

C f are doua puncte de întoarcere;

D $x = 1$ este punct de întoarcere.

265. Fie $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$ și $L = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k!} f^{(k)}(3)$. Stabiliți valoarea de adevăr a afirmațiilor. ✓ ?

A G_f are o asimptotă oblică;

B f are 3 puncte de extrem;

C $L = 3$;

D $L = 4$.

266. Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3x + 1$. Care dintre următoarele variante de răspuns sunt adevărate? ✓ ?

A f injectivă;

B f surjectivă;

C $f(x) = 0$ are două soluții reale;

D Suma părților întregi ale soluțiilor ecuației $f(x) = 0$ este negativă.

267. Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = [x]\cos\left(\dfrac{(2x-1)\pi}{2}\right)$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A funcția este continuă pe $\mathbb{R}$;

B funcția este continuă pe $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$;

C funcția este discontinuă pe $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$;

D funcția este discontinuă pe $\mathbb{Z}$.

268. Dacă $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_a(x) = \begin{cases} e^{ax}, & x \le 0 \\ x^a \ln(x+1), & x > 0 \end{cases}$ pentru $a \in \mathbb{R}$, atunci: ✓ ?

A $\exists a \in \mathbb{R}$ astfel încât f_a este continuă pe $\mathbb{R}$;

B $\exists a \in \mathbb{R}$ astfel încât f_a este derivabilă pe $\mathbb{R}$;

C $\forall a \in \mathbb{R} : f_a$ este continuă pe $\mathbb{R}$;

D $\forall a \in \mathbb{R} : f_a$ este derivabilă pe $\mathbb{R}$.

269. Dacă $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ este o funcție definită pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, atunci ce valoare are a n-a derivată a lui f în $x = 0$? ✓ ?

A n!;

B $\dfrac{n!}{2}$;

C $(-1)^n n!$;

D $2n!$.

270. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcţia definită prin $f(x) = \begin{cases} x^4 + a, & x \in (-\infty, 0], \\ bx^3, & x \in (0, \infty), \end{cases}$ unde $a, b \in \mathbb{R}$ sunt parametri. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate? ✓ ?

A Dacă $a = 0$ şi $b \in \mathbb{R}$, atunci funcţia f este continuă pe $\mathbb{R}$;

B Dacă $a = 1$ şi $b = -1$, atunci funcţia f este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$;

C Dacă $a = 1$ şi $b = -1$, atunci funcţia f este discontinuă în 0;

D $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ oricare ar fi $a, b \in \mathbb{R}$.

271. Să se indice care dintre următoarele afirmații sunt adevărate, dacă $f\colon [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ funcţia definită prin ✓ ?

$$f(x) = \begin{cases} \cos x - 2, & -\dfrac{\pi}{2} \le x \le 0 \\ \dfrac{\sin x}{x}, & 0 < x \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

A Funcţia $|f|$ este continuă în 0;

B Funcţia f are cel puţin un zero în intervalul $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, pentru că $f(-\frac{\pi}{2})\cdot f(\frac{\pi}{2}) < 0$;

C Funcţia f nu are niciun zero în intervalul $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$;

D Funcţia f nu are limită în 0.

272. Fie $A := \{a \in \mathbb{R} \mid \text{ funcţia } f\colon [a,\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = x^4 - 10x^2 + 9, \text{ este injectivă}\}$. Să se indice care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate. ✓ ?

A $A = \emptyset$;

B $[3, \infty) \subseteq A$;

C Mulţimea A are un cel mai mic element;

D $2 \notin A$.

273. Fie $f\colon [0, 2\sqrt{3}] \to \mathbb{R}$ funcţia definită prin $f(x) = x-[x]$, unde $[x]$ desemnează partea întreagă a lui x. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate? ✓ ?

A Funcţia f este continuă;

B Funcţia f are exact 3 puncte de discontinuitate;

C Funcţia f are exact 3 puncte de minim global;

D $\displaystyle\int_0^{2\sqrt{3}} f(x)\mathrm{d}x = 12 - 6\sqrt{3}$.

274. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă în origine, astfel încât $f(0) = 0$ şi $f'(0) = 1$. Valoarea limitei $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)f(2x)\dots f(nx)}{x^n}$ este: ✓ ?

A $\dfrac{1}{n!}$;

B 1;

C 0;

D $n!$.

275. Dacă $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă care satisface ecuaţia funcţională $\mathrm{e}^{x+y} f(xy) = \mathrm{e}^{(x+1)y} f(x) + \mathrm{e}^{(y+1)x} f(y),\ \forall x, y \in (0, +\infty)$, atunci f este derivabilă şi ✓ ?

A există un număr real $c \neq 0$ astfel încât $cxf'(x) = \mathrm{e}^x(x \ln x + 1),\ \forall x \in (0, +\infty)$;

B $f(x) = x\mathrm{e}^x \ln x,\ \forall x \in (0, +\infty)$;

C $f'(x) = e^x(x \ln x + 1)$, $\forall x \in (0, +\infty)$;

D $xf'(x) = x \ln x + 1$, $\forall x \in (0, +\infty)$.

276. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ✓ ?

$$f(x) = \begin{cases} x(\ln|x| - 1) & , x \neq 0 \\ \\ 0 & , x = 0. \end{cases}$$

Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate?

A f are limită $x = 0$;

B f este continuă în punctul $x = 0$;

C f are derivată în punctul $x = 0$;

D f este derivabilă în punctul $x = 0$.

277. Derivata de ordin n a funcției: $f(x) = x^n \ln x$, cu $x \in \mathbb{R}_+^*$. este: ✓ ?

A $n!x[\ln x + (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n})]$;

B $n![\ln x + (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n})]$;

C $n!x^{n-1}[\ln x + (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n})]$;

D $n!x^n[\ln x + (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n})]$.

278. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcţia definită prin $f(x) = (x^2 + a)^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$, unde a este un parametru real. Considerăm mulţimea ✓ ?

$$M = \{a \in \mathbb{R} \mid f \text{ are exact două puncte de minim local}\}.$$

Aceasta este:

A $M = (-\infty, 0]$; B $M = (-\infty, 0)$; C $M = (0, +\infty)$; D $M = [0, +\infty)$.

279. Fie $a > 0$ și $f : [-a, a] \to (0, a]$ o funcţie derivabilă cu derivata continuă în punctul $x = 0$ Fie $x_1 \in [-a, a]$ şi $x_n = f(x_{n-1})$, $n \geq 2$. Dacă şirul (x_n) converge la 0, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}$este: ✓ ?

A $f(0)$; B $f'(0)$; C 0; D $f'(0) + f(0)$.

280. Fie $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă cu derivata continuă care are proprietatea că ecuaţia $f(x) = 0$ are cel puţin o soluţie în intervalul $[0, 1]$. Dacă $\alpha(p) = \displaystyle\int_0^1 f^p(x)dx$ şi $\beta(p) = \dfrac{p^2}{2}\displaystyle\int_0^1 f^{2p-2}(x)dx + \dfrac{1}{2}\int_0^1 (f'(x))^2dx$, $p \in \mathbb{N}^*$, atunci: ✓ ?

A $\alpha(p) \leq \beta(p)$, $\forall p \in \mathbb{N}^*$;

B $\exists p \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\alpha(p) \leq \beta(p)$;

C $\alpha(p) > \beta(p)$, $\forall p \in \mathbb{N}^*$;

D $\exists p \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\alpha(p) > \beta(p)$.

281. Considerăm funcţia ✓ ?

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\left|\frac{1}{2}\,x-3\right|, & \text{dacă } x\in(-\infty,-2];\\ x+3\,, & \text{dacă } x\in(-2,1);\\ 3-2x\,, & \text{dacă } x\in[1,\infty).\end{cases}$$

Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

A f este surjectivă, dar nu este injectivă;

B f este bijectivă;

C f este injectivă, dar nu este surjectivă;

D f nu este nici surjectivă, nici injectivă.

282. Se dau funcţiile ✓ ?

$$f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=(x^2+5x+9)\ln x$$
$$g:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ g(x)=e^x(x^2+2x+6)$$

Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate?

A f' este convexă pe $(0,\infty)$;

B f' este concavă pe $(0,\infty)$;

C g' este strict crescătoare pe $(0,\infty)$;

D g' este descrescătoare pe $(0,\infty)$.

283. Valoarea lui $m\in\mathbb{R}$ pentru care graficul funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^3+(m+1)\cdot x+1$ are în punctul de abscisă $x=2$ tangenta paralelă cu prima bisectoare este: ✓ ?

A $m=4$;

B $m=12$;

C $m=-12$;

D $m=-4$.

284. Se dă funcţia $f:[0,\infty)\to[1,\infty),\ f(x)=x^2+2^x+\ln(x+1)$. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate? ✓ ?

A f este bijectivă;

B f are asimptotă spre $+\infty$;

C $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f'(1)+f'(2)+...+f'(n)}{2^n}=2\ln 2$;

D $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{4}{3}+\ln\frac{27}{4}+\frac{2}{\ln 2}$.

Grafice

285. Considerăm funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x-[x]-\dfrac{1}{2}$. Stabiliţi valoarea de adevăr a următoarelor afirmaţii: ✓ ?

A Graficul funcţiei f intersectează axa Oy în cel puţin 2 puncte;

B Graficul funcţiei f nu intersectează axa Ox;

C Graficul funcţiei f intersectează axa Ox într-o infinitate de puncte;

D Graficul funcţiei f nu intersectează axa Oy.

286. Funcţia $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 2x}$, $x \geq 0$, are ca asimptotă oblică dreapta de ecuație: ✓ ?

A $y = -1$; B $y = 2x + 1$; C $y = 0$; D $y = x - 1$.

287. Fie funcţia f definită prin $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9 \ln x$. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate? ✓ ?

A Domeniul de definiţie maximal al funcţiei f este $\mathbb{R}^*$;

B Dreapta de ecuaţie $y = 0$ este asimptotă orizontală la graficul funţiei f;

C Funcţia f nu are puncte unghiulare;

D Punctul $(1, 4)$ este un punct de extrem global al funţiei f.

288. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dată prin $f(x) = \dfrac{1 + x}{e^{|x-1|}}, \forall x \in \mathbb{R}$. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate? ✓ ?

A Dreapta de ecuaţie $y = 2$ este asimptotă vertifcală la graficul funcţiei f;

B Funcţia f nu are asimptote orizonatale;

C Punctul de coordonate $(1, 2)$ este un punct de întoarcere al graficului funcţiei f;

D Ecuaţia $f(x) = 1$ are exact două soluţii reale.

289. Fie mulţimea $A = (-\infty, \dfrac{1}{2})$ şi funcţiile $f, g : A \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{3}(1 - 2x)^{\frac{3}{2}}$, $g(x) = f'(x), \forall x \in A$. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate? ✓ ?

A $\exists a \in A$ astfel încât $f(a) + g(a) \geq 0$;

B $\forall a \in A$ are loc $f(a) + g(a) \geq 0$;

C $\exists a \in A$ astfel încât tangentele la graficele celor două funcţii în punctele de abscisă $x = a$ sunt ortogonale;

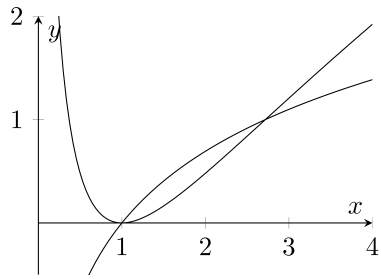
D $\forall a \in A$ tangentele la graficele celor două funcţii în punctele de abscisă $x = a$ sunt ortogonale.

290. Fie $a, b \in \mathbb{R}^*$ cu proprietatea că dreapta de ecuaţie $y = 2x + 3$ este asimptota oblică spre ∞ a funcţiei $f \colon D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{|x^2 - 1| + x}{ax + b}$, unde D este domeniul maxim de definiţie. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate? ✓ ?

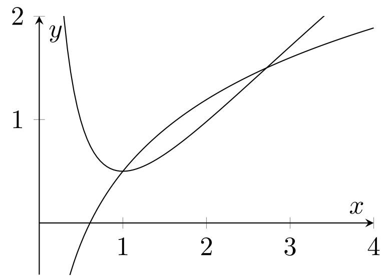
A $ab > 0$; B $a = b$; C $a^2 = |b|$; D $b < a$.

Problemele **291.** și **292.** se referă la ecuațiile $y = \ln x$ și $y = \left(\ln x\right)^2$.

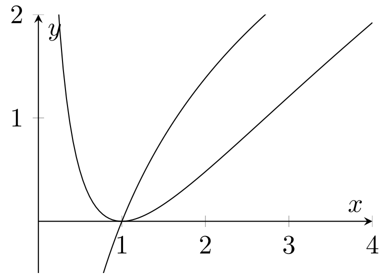
291. Care dintre graficele de mai jos corespund celor două ecuații? ✓ ?



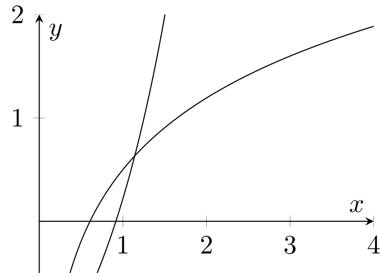
A



C



B



D

292. Care este aria suprafeței cuprinse intre cele două ecuații? ✓ ?

A $-e$; B $2e + 1$; C $e - 1$; D $3 - e$.

293. Fie funcția $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = |\sqrt{x} - 3| + |4 - \sqrt{x}|$. Care dintre următoarele afirmații sunt corecte? ✓ ?

A G_f intersectează axa Ox;

B G_f are un punct de întoarcere;

C G_f are două puncte unghiulare;

D niciuna din afirmațiile anterioare nu e corectă.

294. Considerăm funcția $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}, f(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!}$. Considerăm de asemenea și graficele restricțiilor funcțiilor sin și cos la același interval $[-2, 2]$. Care dintre următoarele afirmații sunt corecte? ✓ ?

A G_f intersectează axa Ox în două puncte;

B f aproximează $\cos x$;

C f are două subintervale de concavitate în $[-2, 2]$;

D f' aproximează $\sin x$.

295. Fie funcția $f : \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\} \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{x}{x^4 - 1}$. Considerăm de asemenea ecuația $ax^4 - x - a = 0, a \in \mathbb{R}$. Folosindu-vă de graficul funcției f, care dintre următoarele afirmații sunt corecte: ✓ ?

A Dacă $a = 1$, ecuația are 4 soluții reale;

B f este strict descrescătoare pe $(-1, 1)$;

C G_f are 2 asimptote;

D Dacă $a = 1$, ecuația are 2 soluții reale.

296. Fie funcția $f : \mathbb{R}/\{-2, -1\} \to \mathbb{R}, f(x) = -\dfrac{2x^3}{(x+1)(x+2)}$. Care dintre următoarele afirmații legate de graficul G_f al funcției sunt corecte? ✓ ?

A $x = 1$ este asimptotă verticală;

B $y = -2x + 6$ este asimptotă oblică;

C G_f admite asimptotă oblică;

D $y = -2x + 1$ este asimptotă oblică.

297. Considerăm funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^4 - \frac{8}{3}x^3 - 2x^2 + 8x$. Notăm cu: z-numărul de puncte de intersecție ale lui G_f cu axa Ox, l-numărul de puncte de extrem local, g-numărul de puncte de extrem global și i-numărul de puncte de inflexiune. Atunci: ✓ ?

A $z^l \cdot (g+i) = 10$;

B $z \cdot (g+4i) = 36$;

C $z+l+g+i = 8$;

D $z^2 \cdot g - i = 3$.

298. Considerăm funcțiile $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{\ln|x| - 1}{x}$ și $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = x^2 - 4$. Folosind graficele celor 2 funcții, numărul de soluții al ecuației $\ln|x| = x^3 - 4x + 1, x \neq 0$ este: ✓ ?

A 2;

B 4;

C 3;

D 1.

Primitive

299. Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{x^2 + x + 5}$. O primitivă a funcției f este: ✓ ?

A Nu există;

B $\dfrac{2}{\sqrt{19}}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{2x+1}{\sqrt{19}}\right) + 19$;

C $\operatorname{arctg}(2x + 1)$;

D $\dfrac{5}{\sqrt{17}}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{5x+10}{\sqrt{17}}\right) + 17$.

300. Fie funcția $f : [-1, 1] \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{dacă } x < 0, \\ x^2 + 2, & \text{dacă } x \geq 0 \end{cases}$. Fie F o primitivă a lui f. Să se indice care dintre următoarele afirmații sunt adevărate. ✓ ?

A $F(x) = \begin{cases} e^x + 1, & \text{dacă } x < 0, \\ \dfrac{x^3}{3} + 2x, & \text{dacă } x \geq 0 \end{cases}$;

B f admite primitive pe $[-1, 1]$;

C $F(x) = \begin{cases} e^x, & \text{dacă } x < 0, \\ \dfrac{x^3}{3} + 2x + 1, & \text{dacă } x \geq 0 \end{cases}$;

D f nu este continuă pe $[-1, 1]$;

Problemele **301.** și **302.** se referă la funcția $f(x) = \dfrac{x^3 + x}{x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1}$, respectiv șirul $I(n) = \displaystyle\int_0^{e^n} \frac{x^3 + x}{x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1}\, \mathrm{d}x, \forall n \in \mathbb{N}$.

301. Sunt primitive ale funcției f: ✓ ?

A $-\frac{1}{2} \cdot \frac{x^2+4x^4-8x^2+4}{(x^2-1)^2}$;

B $-\frac{1}{2} \cdot \frac{x^2+x^4-2x^2}{(x^2-1)^2} - \frac{2}{(x^2-1)^2}$;

C $-\frac{1}{4} \cdot \frac{x^2-4x^4+8x^2-4}{(x^2-1)^2}$;

D $-\frac{1}{2} \cdot \frac{x^2+x^4-2x^2}{(x^2-1)^2} - \frac{4}{(x^2-1)^2}$.

302. Valoarea limitei $\lim\limits_{n\to\infty} \left[e\left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n^2} I(n)\right]$ este: ✓ ?

A $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$; B $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$; C $\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)$; D $\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)$.

303. Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{dacă } x < 0, \\ \cos x, & \text{dacă } x \geq 0 \end{cases}$. Fie F o primitivă a lui f. Să se indice care dintre următoarele afirmații sunt adevărate. ✓ ?

A $F(-1) = \frac{1+e}{e}$;

B f derivabilă pe $\mathbb{R}$;

C $F\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{2+\sqrt{3}}{2}$;

D f nu admite primitive;

304. Fie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită astfel: ✓ ?

$$g(x) = \begin{cases} e^x, & \text{dacă } x \geq 0, \\ x+1, & \text{dacă } x < 0. \end{cases}$$

Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate?

A $G(x) = \begin{cases} e^x + 1, & \text{dacă } x \geq 0 \\ \frac{x^2}{2} + x, & \text{dacă } x < 0 \end{cases}$ este o primitivă a lui g;

B $G(x) = \begin{cases} e^x, & \text{dacă } x \geq 0 \\ \frac{x^2}{2} + x + 1, & \text{dacă } x < 0 \end{cases}$ este o primitivă a lui g;

C g admite primitive;

D g nu admite primitive.

305. Fie $F(x) = e^{3x}(a \sin 2x + b \cos 2x)$ și $f(x) = e^{3x} \cos 2x$. Știind că F este o primitivă a lui f, atunci: ✓ ?

A $a = \frac{1}{13}, b = \frac{2}{13}$;

B $a = \frac{2}{13}, b = \frac{3}{13}$;

C $a = \frac{1}{13}, b = \frac{3}{13}$;

D $a = \frac{3}{13}, b = \frac{2}{13}$.

306. Se dă funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{5}{a \sin x + b}$. Considerând că f admite primitive, care sunt relaţiile satisfăcute de constantele reale şi pozitive a şi b? ✓ ?

A $a > b$; B $a = b$; C $a < b$; D Alt răspuns.

307. Se dă funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{e^x}{e^{2x} + e^x + 6}$. Care dintre următoarele sunt primitive ale lui f? ✓ ?

A $F(x) = \dfrac{1}{\sqrt{23}}\text{arctg}\left(\dfrac{e^x+1}{\sqrt{23}}\right)$;

B $F(x) = \dfrac{4}{23}\text{arctg}\left(\dfrac{2e^x+1}{23}\right)$;

C $F(x) = \dfrac{2}{\sqrt{23}}\text{arctg}\left(\dfrac{2e^x+1}{\sqrt{23}}\right) + 23$;

D f nu admite primitive.

308. Se dă funcţia $f(x) = \dfrac{x-1}{(x+1)^3}$. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate? ✓ ?

A f admite primitive pe domeniul $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$;

B f nu admite primitive pe domeniul $(-1, 1)$;

C $F(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2} - \dfrac{x^2}{2}$ este o primitivă a lui f pe domeniul maximal de definiție;

D $F(x) = -\dfrac{x}{(x+1)^2} + 1$ este o primitivă a lui f pe domeniul maximal de definiție.

309. Se dă funcţia $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\ldots}}}}_{\text{n ori}}$. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate? ✓ ?

A $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\sqrt{x}} + C$ este familia de primitive ale lui f;

B $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + C$ este familia de primitive ale lui f;

C f este funcţia constantă zero;

D $x = 0$ este un punct de discontinuitate al lui f.

310. Se dă funcţia $f : \mathbb{R}\setminus\{0,1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{2x^3 - 5x^2 + 4x - 4}{x^2 - x}$. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate? ✓ ?

A $F(x) = x^2 - 3x + 4\ln|x| - 3\ln|x-1|$ este o primitivă a lui f;

B $F(x) = \ln\dfrac{e^{x\cdot(x-3)}\cdot x^3}{|x-1|^4}$ este o primitivă a lui f;

C $F(x) = x^2 + 3x + 3\ln|x| - 4\ln|x-1|$ este o primitivă a lui f;

D $F(x) = \ln\dfrac{e^{x\cdot(x-3)}\cdot x^4}{|x-1|^3}$ este o primitivă a lui f.

311. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{1}{(x^2+3)^{\frac{3}{2}}}$. Familia de primitive a funcţiei f este: ✓ ?

A $\frac{1}{3}\sin\left(\mathrm{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)\right)+C$;

B $\frac{1}{3}\cos\left(\mathrm{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)\right)+C$;

C $\frac{x\sqrt{3}}{3\sqrt{x^2+3}}+C$;

D $\frac{x}{3\sqrt{x^2+3}}+C$.

312. Se dă funcţia $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sin(\ln x)$. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate? ✓ ?

A $F(x)=\dfrac{x}{2}\cdot(\sin(\ln x)+\cos(\ln x))$ este o primitivă a funcţiei f;

B $F(x)=\dfrac{x\sqrt{2}}{2}\cdot\sin\left(\ln x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ este o primitivă a funcţiei f;

C orice primitivă a lui f este o funcţie periodică, care oscilează în jurul valorii 0;

D orice primitivă a lui f se anulează într-o infinitate de puncte $x_n = e^{\frac{\pi}{4}+n\pi}, n\in\mathbb{Z}$.

313. Se dă funcția $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ definită astfel: ✓ ?

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}+1, & \text{dacă } x\in[0,1],\\ (x^2+x-1)\cdot e^{x-1}, & \text{dacă } x\in(1,\infty).\end{cases}$$

Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

A f nu admite primitive pe întreg domeniul de definiţie;

B $x=1$ este un punct de discontinuitate de speţa I;

C $F(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2}-\dfrac{\cos 2x}{4}+C, & \text{dacă } x\in[0,1]\\ (x^2-2x+1)\cdot e^{x-1}+C, & \text{dacă } x\in(1,\infty)\end{cases}$ este familia de primitive ale lui f.

D $F(x)=\begin{cases}x+\dfrac{\arcsin x}{2}+\dfrac{x\sqrt{1-x^2}}{2}+C, & \text{dacă } x\in[0,1]\\ (x^2-2x+1)\cdot e^{x-1}+C, & \text{dacă } x\in(1,\infty)\end{cases}$ este familia de primitive ale lui f.

314. Se dă funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definită astfel: ✓ ?

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\underbrace{\cos\left(\frac{2\pi}{3}\cos\left(\frac{2\pi}{3}\cos\left(...\cos\left(\frac{2\pi}{3}x\right)\right)...\right)\right)}_{n \text{ ori}}.$$

Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

A $F(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{3}\sin\left(\frac{\pi}{3}\sin\left(...\sin\left(\frac{\pi}{3}x\right)\right)...\right)\right)}_{n \text{ ori}}$ este o primitivă a lui f;

B $F(x)=\dfrac{x}{2}$ este o primitivă a lui f;

C orice primitivă a lui f este o funcţie periodică;

D f admite primitive pe întreg domeniul de definiţie.

315. Se dă funcţia $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\arcsin x$. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate? ✓ ?

A $F(x)=\dfrac{\arcsin x}{2}\cdot\left(2x^2-1\right)+\dfrac{x}{2}\cdot\sqrt{1-x^2}$ este o primitivă a lui f;

B $F(x)=\dfrac{\arcsin x}{4}\cdot\left(2x^2-1\right)+\dfrac{x}{4}\cdot\sqrt{1-x^2}$ este o primitivă a lui f;

C $F(1)=\dfrac{\pi}{4}$.

D f nu admite primitive pe întreg domeniul de definiţie.

316. Se dă funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^3}{\sqrt{x^2+9}}$. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate? ✓ ?

A $F(x)=\dfrac{1}{3}\sqrt{x^2+9}\cdot(x^2-18)+C$ este familia de primitive ale lui f;

B $F(x)=\dfrac{1}{3}\sqrt{x^2+9}\cdot(x^2+6)+C$ este familia de primitive ale lui f;

C când $F(4)=\dfrac{5}{3}, F(x)=\dfrac{1}{3}\sqrt{x^2+9}\cdot(x^2-18)+5$;

D când $F(\sqrt{7})=-18, F(x)=\dfrac{1}{3}\sqrt{x^2+9}\cdot(x^2+6)-6$.

317. Se dă funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{1-x^2}$. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate? ✓ ?

A $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_n^{n+1} f(x)\mathrm{d}x=0$;

B $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_n^{n+1} f(x)\mathrm{d}x=\infty$;

C orice primitivă a funcţiei f poate fi exprimată folosind funcţii elementare;

D orice primitivă a funcţiei f admite două puncte de extrem local.

318. Se dă funcţia $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate? ✓ ?

A $x=0$ este un punct de discontinuitate de speţa a II-a;

B există o funcţie $g(x)=\begin{cases} f(x) & \text{dacă } x\neq 0\\ 0 & \text{dacă } x=0\end{cases}$ care admite primitive;

C f admite primitive pe $\mathbb{R}$;

D f se anulează în o infinitate de puncte $x_n=\dfrac{1}{n\pi}, n\in\mathbb{Z}^*$.

319. Se dă funcţia $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\cos x}{4\sin^2 x + 10\sin x - 3}$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A $x = \arcsin \dfrac{\sqrt{37}-5}{4}$ este un punct de discontinuitate;

B domeniul de primitivabilitate este acelaşi cu cel de definiţie;

C $F(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{37}} \ln \left| \dfrac{4\sin x + 5 - \sqrt{37}}{4\sin x + 5 + \sqrt{37}} \right|$ este o primitivă a lui f, pentru $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, 0\right]$;

D $F(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{37}} \ln \left| \dfrac{\sin x + 5 + \sqrt{37}}{\sin x + 5 - \sqrt{37}} \right|$ este o primitivă a lui f, pentru $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, 0\right]$.

320. Se dă funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}}$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A $F(x) = \operatorname{arctg}\left(\sin\left(\operatorname{arctg} \dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)\right) + C$ este familia de primitive ale lui f;

B $F(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}} + C$ este familia de primitive ale lui f;

C $F(x) + F\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\pi}{2} - 2 \cdot C$;

D f admite puncte de discontinuitate in $\mathbb{R}$.

321. Se dă funcţia $f : (-1,1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^4}}$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A $F(x) = \dfrac{\operatorname{arctg} x^2}{2} + C$ este o primitiva a lui f, pentru $x \in (-1,1)$;

B $F(x) = \dfrac{\arcsin x^2}{2} + C$ este o primitivă a lui f, pentru $x \in (-1,1)$;

C când $F(0) = \dfrac{\pi}{8}$, $F(x) = \dfrac{\operatorname{arctg} x^2}{2} - \dfrac{\pi}{8}$,

D când $F(0) = \dfrac{\pi}{4}$, $F(x) = \dfrac{\arcsin x^2}{2} + \dfrac{\pi}{4}$;

322. Se dă funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită astfel: ✓ ?

$$f(x) = \begin{cases} mx^2 + n, & \text{dacă } x \le -1, \\ 2\ln(x+2), & \text{dacă } x > -1. \end{cases}$$

Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

A $F(x) = \begin{cases} m\dfrac{x^3}{3} + nx, & \text{dacă } x \le -1 \\ 2((x+2)\ln(x+2) - x) + \dfrac{2m}{3} - 2, & \text{dacă } x > 1 \end{cases}$ este o primitivă a funcţiei f;

B $F(x) = \begin{cases} m\dfrac{x^3}{3} + nx, & \text{dacă } x \leq -1 \\ 2((x+2)\ln(x+2) - x) + \dfrac{m}{3} - 1, & \text{dacă } x > 1 \end{cases}$ este o primitivă a funcţiei f;

C $m = n + 2$;

D $m = -n$.

323. Se dă funcţia $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2+1}}$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A $F(x) = \dfrac{1}{2}\ln|\sqrt{x^2+1} - 1| - \dfrac{1}{2}\ln|\sqrt{x^2+1} + 1|$ este o primitivă a lui f;

B $F(x) = \dfrac{1}{2}\ln|\sqrt{x^2+1} + 1| - \dfrac{1}{2}\ln|\sqrt{x^2+1} - 1|$ este o primitivă a lui f;

C $F(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{\sqrt{x^2+1}+1}{\sqrt{x^2+1}-1}\right|$ este o primitivă a lui f;

D $F(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1}\right|$ este o primitivă a lui f.

Integrale definite

324. Să se indice valoarea limitei $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{1}{t^2}\displaystyle\int_0^t (\sqrt{x} + \sin x)\,\mathrm{d}x$. ✓ ?

A 0; B 1; C ∞; D π;

325. Fie ✓ ?

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \int_0^n \frac{x^{2019}(1-x)}{(x^{2020}+1)(x^{2021}+1)}\,\mathrm{d}x.$$

Valoarea lui ℓ este

A 0; B 1; C $\dfrac{\pi}{2}$; D π;

326. Fie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x^2+2x+2}$ şi $L = \lim\limits_{y\to\infty} \dfrac{\int_0^y f(x)\,\mathrm{d}x}{y}$. Să se indice care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate. ✓ ?

A $L = \infty$; B $L = 1$; C $L \in \mathbb{N}$; D $L = 0$.

327. Fie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{1+x^{2022}}$. Se notează cu $a = \displaystyle\int_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ și $b = \displaystyle\int_0^1 (f(x) \cdot f''(x) + (f'(x))^2)\,\mathrm{d}x$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A $a \in \left[\frac{\pi}{2}, 2\right]$; B $a \in \left[1, 2\right]$; C $b = \frac{1011}{4}$; D $b = -\frac{1011}{4}$.

328. Fie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ șirul definit prin $a_n = \int_1^{\mathrm{e}} (\ln x)^n \, \mathrm{d}x$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \mathrm{e}$; B $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$; C $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = \infty$; D $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = e$.

329. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$ fie $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x} \, \mathrm{d}x$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A Șirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este crescător.

B Șirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este descrescător.

C $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = \frac{\pi}{4}$.

D $I_{2022} = \pi$.

330. Valoarea integralei $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \cdot \mathrm{tg}^2\, x \, \mathrm{d}x$ este: ✓ ?

A $\frac{3\sqrt{2}-4}{2}$; B alt răspuns; C $\frac{3\sqrt{2}-1}{2}$; D $\frac{\sqrt{2}-4}{2}$.

331. Fie funcția $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n \ln x, n \in \mathbb{N}^*$. Limita $L = \lim\limits_{n\to\infty} \int_{\frac{1}{e}}^{1} f(x) \, \mathrm{d}x$: ✓ ?

A Nu există;

B $L = 1$;

C $L = 0$;

D $L = \lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{\sin nx}{n} \, \mathrm{d}x$.

332. Rezultatul calculului $\int_0^{\pi} \cos(x) \sin(\sin x) \cos(\sin x) \, \mathrm{d}x$ este: ✓ ?

A 0; B π; C 1; D $\sqrt{3}$.

333. Valoarea parametrului real a pentru care $\int_0^1 \frac{ax}{x^4+1} \, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{16}$ este: ✓ ?

A $a = \frac{1}{8}$; B $a = 1$; C $a = \frac{1}{2}$; D $a = \frac{1}{4}$.

334. Notăm cu $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \prod_{k=1}^{\infty} \cos\left(\frac{x}{2^k}\right) \mathrm{d}x$. Să se indice care dintre următoarele afirmații sunt adevărate. ✓ ?

A $\prod_{k=1}^{\infty} \cos\left(\frac{x}{2^k}\right) = \frac{x}{\sin x}$;

B $I < 1$;

C $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \sin x \, dx$;

D $I = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$.

335. Valoarea integralei $\int_0^1 \frac{x-4}{x+3} dx$ este: ✓ ?

A $1 - 7\ln\frac{4}{3}$; B $1 + 7\ln\frac{4}{3}$; C $1 - \frac{7}{2}\ln\frac{16}{9}$; D $1 - 7\ln\frac{3}{4}$.

336. Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x, \alpha) = \int_0^x e^{-\alpha t} \sin t \, dt$ unde $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0$. ✓ ? Să se indice care dintre următoarele afirmații sunt adevărate.

A $f\left(\frac{\pi}{4}, 1\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{2}$;

B $\min f(x, 1), \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] = 0$;

C $\lim_{x\to\infty} f(x, \alpha)$ este convergentă;

D Toate afirmațiile sunt false.

337. Valoarea integralei $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2t}{1+\cos t} dt$ este: ✓ ?

A $\frac{\pi}{4} - \ln 2$;

B $\frac{\pi}{4}$;

C $\sqrt{2} + 2\ln\frac{2+\sqrt{2}}{4}$;

D $2 - \sqrt{2} + 2\ln\frac{2+\sqrt{2}}{4}$.

338. Considerăm funcția $f(x) = \sqrt{x^2-1}$ definită pe intervalul $1 \le x \le 2$. Fie S_f aria ✓ ? dintre graficul funcției și axa Ox. Care dintre urmatoarele afirmații sunt **false**?

A Funcția este strict descrescătoare pe $[1, 2]$;

B Graficul funcției trece prin origine $(0, 0)$;

C $S_f = \sqrt{3} - \ln|2 + \sqrt{3}|$;

D $S_f > \frac{1}{2}$.

339. Fie $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{tg}x}{1+m^2\text{tg}^2 x} dx$, unde $m \in \mathbb{N}^*$. Care dintre următoarele afirmații sunt ✓ ? corecte?

A $I = \frac{1}{(e-1)(e+1)}$, pentru $m = e$;

B $(I)_{m\in\mathbb{N}^*}$ este strict crescător;

C $I = \frac{16\ln\pi - 32\ln 2}{\pi^2 - 16}$, pentru $m = \frac{\pi}{4}$;

D Toate răspunsurile sunt false.

340. Dacă $\int_0^1 \frac{\arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)}{1+x^2} dx = A$, atunci $\sqrt{A}$ este egal cu: ✓ ?

A $\pm\frac{\pi}{2}$;

B $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}+n} \frac{\sin x}{x}\,dx$;

C $\frac{\pi}{4}$;

D $\int_{1}^{e^{\frac{\pi}{4}}} \frac{1-\ln x}{x}\,dx$.

341. Valoarea integralei $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\cos x}$ este: ✓ ?

A $\frac{\pi}{6\sqrt{3}}$; B $\frac{\pi\sqrt{3}}{9}$; C $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$; D $\frac{2\pi\sqrt{3}}{36}$.

342. Fie șirul $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, având ca termen general $s_k = \sum\limits_{q=1}^{k}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+(\mathrm{tg}(x))^q}$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}s_n = 0$;

B $s_{2^{16}} = \frac{\pi}{4}$;

C $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\sum\limits_{i=1}^{n} s_i = \frac{\pi}{8}$;

D $\forall k \in \mathbb{N}^*$, s_k este constant.

343. Fie $f_n(x) = \int_0^3 \frac{1}{\underbrace{\sqrt{\sqrt{\cdots\sqrt{x}}}}_{\text{de } n \text{ ori}}}\,dx$, $n\in\mathbb{N}^*$ și $L = \lim\limits_{n\to\infty} f(x)$. Să se indice care dintre următoarele afirmații sunt adevărate. ✓ ?

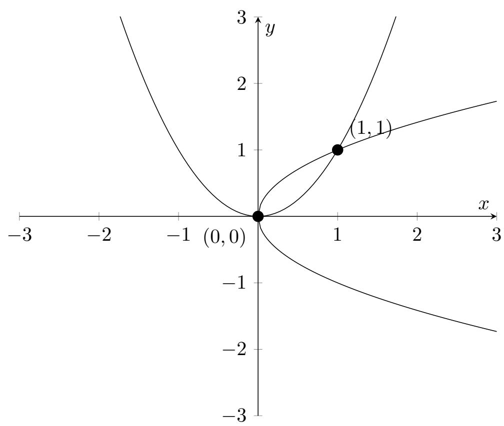
A $f_n(x)$ nu este continuă pe $[0,3]$;

B $f_1(x) > L$;

C $L \geq \lim\limits_{x\to 0} \frac{3\cos x \sin 4x}{2x}$;

D $L = 6$.

344. Fie S aria suprafeței cuprinsă între cele două parabole. Care dintre următoarele afirmații sunt **false**? ✓ ?



✓ ?

A $S = \dfrac{2}{3}$;

B $S = \dfrac{1}{2} \cdot M$, unde M este aria suprafeței cuprinsă între $y = x^2$ și $y = 2x$;

C $S = \dfrac{1}{3}$;

D $S = \dfrac{1}{2} \cdot T$, unde T este aria suprafeței determinată de graficul funcției $f(x) = \cos^3(x)$, unde $f : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$.

345. Notăm $I = \displaystyle\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \sqrt{(1-\cos x)(1-\cos 2x)}\,\mathrm{d}x$. Valoarea lui I este: ✓ ?

A $\dfrac{2-4\sqrt{2}}{3}$; B $\dfrac{1}{3}$; C $\dfrac{2}{3}$; D $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$.

346. Valoarea parametrului $a > 0$ pentru care aria regiunii plane mărginită de graficele funcţiilor $f(x) = \sqrt{a}\,x$ si $g(x) = (1+a)x^2$ să fie maximă, este ✓ ?

A 2; B 3; C 4; D 1.

347. Se dă integrala $I = \displaystyle\int_{\frac{\sqrt{5}}{5}}^{1} \min\left\{\frac{1}{x}, 1+x\right\} \mathrm{d}x$. Stabiliţi valoarea de adevăr a afirmaţiilor. ✓ ?

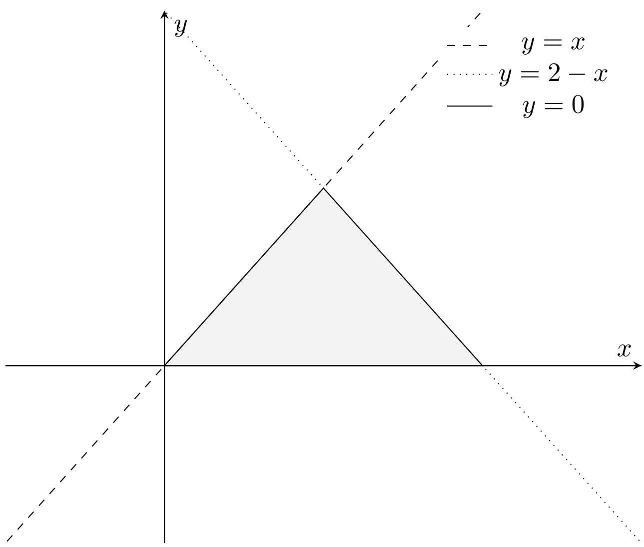
A $I = \dfrac{5-\sqrt{5}}{4} + \ln\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}$;

B $I = \dfrac{3+\sqrt{5}}{20} + \ln\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$;

C $I = \dfrac{1}{2}\ln 5$;

D $I = \dfrac{7-\sqrt{5}}{5}$.

348. Notăm cu S aria delimitată de cele trei drepte: ✓ ?



✓ ?

Să se indice care dintre următoarele expresii indica valoarea lui S.

A $\displaystyle\int_0^2 (2-x)\,\mathrm{d}x$;

B $\displaystyle\int_0^1 (x-2)\,\mathrm{d}x + \int_0^2 (2-x)\,\mathrm{d}x$;

C $\displaystyle\int_0^1 (x-0)\,\mathrm{d}x + \int_1^2 (2-x)\,\mathrm{d}x$;

D $\displaystyle\int_0^1 (x+1)\,\mathrm{d}x + \int_1^2 (2-x)\,\mathrm{d}x$.

349. Care este valoarea maximă integralei $\displaystyle\int_0^1 \left(x^2 f(x) - x f^2(x)\right)\mathrm{d}x$, unde maximul se ia peste toate funcțiile continue $f : [0,1] \to \mathbb{R}$? ✓ ?

A $\dfrac{1}{12}$; B $\dfrac{1}{16}$; C $\dfrac{4}{16}$; D $\dfrac{1}{8}$.

350. Știind că $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$, să se indice care dintre următoarele variante de răspuns reprezintă valoarea integralei $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{x^{\ln x}\sqrt[3]{x^{\ln^2(x)}\sqrt[4]{x^{\ln^3(x)}\sqrt[5]{\cdots}}}}\,\mathrm{d}x$. ✓ ?

A $e - \dfrac{1}{e}$; B $\dfrac{1}{e} - 1$; C $\dfrac{e^2-1}{e}$; D $1 - \dfrac{1}{e}$.

351. Fiind dată funcția f și $f(ex) = 3f(x)$; $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = e$, să se indice care este valoarea integralei $\displaystyle\int_1^e f(x)\,\mathrm{d}x$. ✓ ?

A $6e$; B $6e-2$; C $3e^2 - e$; D $6e^2 - 2e$.

352. Notăm cu S mulțimea soluților ecuației $\displaystyle\int_0^2 x^t\,\mathrm{d}t = 3$. Să se indice valoarea de adevăr a propozițiilor: ✓ ?

A $\displaystyle\prod_{k=1}^{\text{card } S} 2^{s_k} < 1\,, \forall s_k \in S$;

B $\text{card } S < 2$;

C $\displaystyle\sum_{k=1}^{\text{card } S} |s_k| \geq 2\,, \forall s_k \in S$;

D $S = \emptyset$.

353. Numărul soluțiilor ecuației $\displaystyle\int_x^{x^2} (2t^2+1)\cdot e^{t^2}\,\mathrm{d}t = 0$ este diferit de: ✓ ?

A 0; B 2; C 4; D 1.

354. Fie $I = \displaystyle\int_1^4 \frac{e^x(x-1)}{(x+e^x)x}\,\mathrm{d}x$ și $J = \displaystyle\int_0^3 \frac{2x}{x^2+2x+1}\,\mathrm{d}x$. Să se stabilească care dintre următoarele variante de răspuns sunt adevărate. ✓ ?

A $J < 16$;

B $I = \ln\left(\dfrac{4+e^4}{1+e}\right)$;

C $I > J$;

D $I + J = \ln\left(\dfrac{4^3(4e+e^5)}{1+e}\right)$.

355. Se dă funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Știind că $f^{-1}(1) = e$, $f^{-1}(0) = F(e) = 1$, $F(1) = 0$, unde F este o primitivă a funcției f, să se stabilească care dintre următoarele răspunsuri indică valoarea integralei $\displaystyle\int_0^1 f^{-1}(x)\,\mathrm{d}x$. ✓ ?

A e;

B $e-1$;

C $-e$;

D $1-e$.

356. Fie $I(x) = e^x \cdot e^{e^x} \cdot e^{e^{e^x}}$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A $e^{e^{e^x}} + e^{e^x} + 1$ este primitivă lui f;

B $\displaystyle\int_0^e f(x)\,\mathrm{d}x = e^{e^{e^e-1}}$;

C $e^{e^{e^x}} + 4e$ este primitivă lui f;

D $\displaystyle\int_0^e f(x)\,\mathrm{d}x = e^{e^{e^e+e-1}} - e$;

357. Valoarea integralei $\displaystyle\int_0^{\sqrt[3]{\frac{1}{4}}} \sqrt{\frac{x}{1-x^3}}\,\mathrm{d}x$ este: ✓ ?

A $\dfrac{\pi}{6}$;

B $\dfrac{\pi}{9}$;

C $\dfrac{2\pi}{9}$;

D $\dfrac{\pi}{3}$.

358. Fie funcţia $I(t) = \displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{1+e^{tx}}\,\mathrm{d}x$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A $I(t) = 1 + \ln\dfrac{1+e^{-t}}{1+e^t}$, $\forall t \in \mathbb{R}$;

B $I(0) = 1$;

C $I(t) + I(-t) = 2$, $\forall t \in \mathbb{R}$;

D $I(t) = 1$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

359. Fie $I = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos^4 x \sin^2 x}\mathrm{d}x$. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate? ✓ ?

A $I \in \mathbb{Q}$;

B $I = \dfrac{1}{6}$;

C $I \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;

D $I = \dfrac{4}{3}(2\sqrt{3}-1)$.

360. Fie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x^2+2x+2}$, şi $L := \displaystyle\lim_{y\to\infty} \frac{\int_0^y f(x)\mathrm{d}x}{y}$. Să se indice care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate. ✓ ?

A $L = \infty$;

B $L = 1$;

C $L \in \mathbb{N}$;

D $L = 0$.

361. Valoarea lui $x \in \mathbb{R}$ pentru care funcția $\displaystyle\int_1^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ are două puncte de extrem este: ✓ ?

$\boxed{A}$ $\ln(2e)$; $\boxed{B}$ alt răspuns; $\boxed{C}$ 1; $\boxed{D}$ 2.

362. Se consideră numărul $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{(1+\sqrt[3]{x^2})^3}{\sqrt[4]{x^3}}\,dx$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

$\boxed{A}$ $I \in \mathbb{Z}$; $\boxed{B}$ $\{I\} = 0$; $\boxed{C}$ $[I] = 9$; $\boxed{D}$ $[I] = 8$.

363. Fie funcția $f(x) = \operatorname{arctg}(x)$. Rezultatul calculului $\displaystyle\int_1^2 x^5\sqrt{f'(x)}\,dx$ este: ✓ ?

$\boxed{A}$ $\dfrac{8\sqrt{5}}{3}$; $\boxed{B}$ $\dfrac{8\sqrt{5}}{3} - \dfrac{7\sqrt{2}}{15}$; $\boxed{C}$ $\dfrac{8\sqrt{5}}{3} + \dfrac{7\sqrt{2}}{15}$; $\boxed{D}$ $\dfrac{7\sqrt{2}}{15}$.

364. Dacă $I = \left\{ \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\sin^n x}{2+\sin^n x+\cos^n x}\,dx : n \in \mathbb{N}^* \right\}$, atunci mulțimea I are: ✓ ?

$\boxed{A}$ cel mult 3 elemente;

$\boxed{B}$ cel puțin 3 elemente;

$\boxed{C}$ 1 element;

$\boxed{D}$ o infinitate de elemente.

365. Dacă $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2}\,dx$, $n \in \mathbb{N}^*$, atunci ✓ ?

$\boxed{A}$ $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$;

$\boxed{B}$ $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n = \dfrac{1}{2}$;

$\boxed{C}$ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{I_{n+1}}{I_n} = \dfrac{1}{2}$;

$\boxed{D}$ $\lim\limits_{n\to\infty} n^2(I_{n+1} - I_{n-1}) = -\dfrac{1}{2}$.

366. Dacă $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n e^{-x}\,dx$, $n \in \mathbb{N}$, atunci ✓ ?

$\boxed{A}$ $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este monoton;

$\boxed{B}$ $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$;

$\boxed{C}$ $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n = 0$;

$\boxed{D}$ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{I_n}{I_{n+1}} = 1$.

367. Valoarea integralei $I = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x - x\cos x}{x^2+\sin^2 x}\,dx$. este: ✓ ?

$\boxed{A}$ 0;

$\boxed{B}$ $\operatorname{arctg}\left(\dfrac{2\pi\sqrt{3}}{9}\right) - \operatorname{arctg}\left(\dfrac{\pi\sqrt{2}}{4}\right)$;

$\boxed{C}$ $\operatorname{arctg}\left(\dfrac{2\pi\sqrt{3}}{9}\right) - 1$;

$\boxed{D}$ 1.

368. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate, știind că $S_n = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{\ln 2}} 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots + nx^{n-1}\,dx$, cu $n \in \mathbb{N}$? ✓ ?

A $\lim\limits_{x\to\infty} S_n = +\infty$;

B $S_n < 1$;

C $S_n = \dfrac{\ln 2}{\ln 2 - 1}$;

D $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{e^{n\ln 2}} \dfrac{1}{k} \cdot S_n = 0$.

369. Valoarea integralei $\displaystyle\int_{\frac{1}{2021}}^{2021} \frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ este: ✓ ?

A 0; B 1; C 2; D 3.

370. Fie $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\mathrm{tg}^2 x\,\mathrm{d}x$. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate? ✓ ?

A $I = \dfrac{\pi}{4} - \ln\sqrt{2}$;

B $I > \dfrac{\pi}{3}$;

C $I < \dfrac{\pi}{4}$;

D $8\pi < 16\ln 2 + \pi^2$.

371. Fie $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$, $n \in \mathbb{N}^*$. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate? ✓ ?

A $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 1$; B $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$; C $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n = 0$; D $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n > 2$.

372. Fie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$ și $I_n = \displaystyle\int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x$, $n \in \mathbb{N}$. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate? ✓ ?

A $I_{2022} < \mathrm{arctg}\,\mathrm{e}^{2023}$;

B $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$;

C $I_{2022} \geq f(2022)$;

D $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n = 0$.

373. Fie $I = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos^4 x \sin^2 x}\mathrm{d}x$. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate? ✓ ?

A $I = \dfrac{4}{3}(2\sqrt{3} - 1)$;

B $I = \dfrac{1}{6}$;

C $I \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;

D $I \in \mathbb{Q}$.

374. Valoarea integralei $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2+1}{e^x + x^2 + 2x + 3}\,\mathrm{d}x$ este: ✓ ?

A 1; B $\ln \dfrac{4e}{e+6}$; C $1-e^{-1}$; D $1-\ln(e+6)+2\ln 2$.

375. Fie $a=\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A $a=\dfrac{\pi}{4}-\ln\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; B $a=\dfrac{\pi}{4}+\ln\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; C $a=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\ln 2}{2}$; D $a=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\ln 2}{2}$.

376. Fie $L=\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \int_t^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x}+x}$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A $L=0$; B $L<\ln 3$; C $\ln 2<L$; D $L<\dfrac{3}{2}$.

377. Fie $L=\displaystyle\lim_{t\to\infty}\int_0^t \frac{x^4}{x^{10}+2x^5+2}\mathrm{d}x$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A $L\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$; B $L=\infty$; C $L<\dfrac{1}{5}$; D $\dfrac{1}{10}<L$.

378. Fie $a=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}x$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A $a\in\mathbb{Q}$; B $a\in\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{4}\right)$; C $\dfrac{4a+1}{\pi}\in\mathbb{N}^*$; D $a>1$.

379. Fie $I_n=\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^{2n}}\,\mathrm{d}x,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A $I_n\le\ln\sqrt{2},\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

B $I_{2024}\le\dfrac{1}{2025}$;

C $\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n\in[0,\infty)$;

D $\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n=1$.

380. Valoarea integralei $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{1+\sin 2x}\,\mathrm{d}x$ este: ✓ ?

A 0; B $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; C $\dfrac{\ln 2}{4}$; D $\dfrac{1}{2}$.

381. Fie $I=\displaystyle\int_0^{2a} \frac{(a-x)+(a-x)^3+\cdots+(a-x)^{2021}}{1+(a-x)^2+\cdots+(a-x)^{2022}}\,\mathrm{d}x$, unde $a\in(0,\infty)$ este fixat. ✓ ?
Valoarea lui I este:

A $\dfrac{a}{2}$; B 0; C $2a$; D $\dfrac{1}{2}$.

382. Valoarea integralei $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln\cos x\,\mathrm{d}x$ este: ✓ ?

A $\frac{\pi}{2}$; B 0; C $-\frac{\pi}{2}\ln 2$; D $\frac{\pi}{4}\ln 2$.

383. Fie $I = \int_{-a}^{a} \frac{x^{2024}(1-e^x)}{1+e^x}\,\mathrm{d}x, a \in \mathbb{R}$. Valoarea lui I este: ✓ ?

A $2a$; B 0; C e; D $-2a+2$.

384. Fie $I = \int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A $I \geq \frac{\pi^2}{4}$; B $I \leq 0$; C $I = \frac{\pi}{4}$; D $I = \frac{\pi^2}{2}$.

385. Fie $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}\,\mathrm{d}x$. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate? ✓ ?

A $I < 0$; B $I \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$; C $I = \frac{\pi}{4}$; D $I = 0$.

386. Fie $I_n = \int_0^1 \frac{1}{(x^2+1)^n}\,\mathrm{d}x, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Care afirmaţii sunt adevărate? ✓ ?

A $I_n = \frac{2^{-n+1}}{2n-2} + \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1}$;

B $I_n = \frac{2^{-n+1}}{2n-2} + \frac{2n-1}{2n-2} I_{n-1}$;

C $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = \frac{\pi}{2}$;

D $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$.

387. Fie $I = \int_0^1 \frac{\sqrt{x}\ln(1+\sqrt{1-x})}{x}\,\mathrm{d}x$. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate? ✓ ?

A $I < \sqrt{2}$; B $I = \frac{\pi}{2} - 1$; C $I < 1$; D $I = \pi - 2$.

388. Fie $L = \lim\limits_{a \nearrow 1} \int_0^a \frac{x^9}{\sqrt{1-x^4}}\,\mathrm{d}x$. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate? ✓ ?

A $L < \frac{\pi}{10}$; B $L = \frac{3\pi}{32}$; C $L \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$; D $L = 0$.

389. Fie $I = \int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}} \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)\mathrm{d}x$. Să se indice care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate? ✓ ?

A $I = 0$; B $I = \pi$; C $I = \frac{\pi}{2}$; D $I \in \left[\sqrt{2}, \sqrt{3}\right]$.

390. Fie $I = \int_{\frac{1}{2024}}^{2024} \frac{1}{(1+x^2)(1+x^{2024})}\,\mathrm{d}x$. Să se indice care dintre următoarele variante de răspuns sunt adevărate. ✓ ?

A $I = \dfrac{1}{2}\left(\text{arctg }(2024) - \text{arctg }\dfrac{1}{2024}\right)$;

B $I = \dfrac{1}{2} \cdot \text{arctg }\dfrac{2024^2 - 1}{1012}$;

C $\lim\limits_{a\to\infty} \displaystyle\int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{1}{(1+x^2)(1+x^{2024})}\mathrm{d}x = 0$;

D $\lim\limits_{a\to\infty} \displaystyle\int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{1}{(1+x^2)(1+x^{2024})}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$.

391. Fie $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{1+e^{\sin x}}\,\mathrm{d}x$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A $I > e$; B $I < 0$; C $I = \pi$; D $I = 2\pi$.

392. Fie $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\right)\mathrm{d}x$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A $I \geq 0$; B $I < 0$; C $I = \pi$; D $I = \dfrac{\pi}{2}$.

393. Care afirmații sunt adevărate, știind că $f : [1,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$? ✓ ?

A valoarea medie a funcţiei f este $2 \cdot \sqrt{2}\ln 2 - 4\sqrt{2} + 4$;

B valoarea medie a funcţiei f este $\ln 8 + 4\sqrt{2} - 4$;

C primitiva funcţiei f este descrescătoare;

D primitiva funcţiei f este crescătoare.

394. Se dă şirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^{2n+1} \cdot e^{x^2}\,\mathrm{d}x$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A $I_1 = \dfrac{1}{2}$;

B $I_{n+1} = \dfrac{e}{2} - (n+1)I_n$;

C $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 1$;

D $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n = \dfrac{e}{2}$.

395. Fie $I = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{e^x \cos x}{1+e^x}\,\mathrm{d}x$. Valoarea lui I este: ✓ ?

A $\dfrac{\pi}{2}$; B 1; C 0; D $\dfrac{1}{2}$.

396. Fie $I = \displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(x^5 - 2\ln\frac{1-x}{1+x}\right)\mathrm{d}x$. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate? ✓ ?

A $I = 1$; B $I = -1$; C $I = 0$; D $I \in \left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$.

397. Dacă $I = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$, unde $f(x) = \max\{\frac{1}{3^x}, 3^x\}$, $x \in [-1,1]$, verificaţi dacă: ✓ ?

A $I = 0$; B $I = \dfrac{4}{\ln 3}$; C $I = \dfrac{2}{\ln 4}$; D $I = \dfrac{3}{\ln 3}$.

Sume Riemann

398. Considerăm şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dat prin $a_n = \dfrac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{n^2-k^2}$ Valoarea limitei $\lim_{n\to\infty} a_n$ este: ✓ ?

A 0; B 1; C $\dfrac{\pi}{2}$; D $\dfrac{\pi}{4}$.

399. Valoarea $\lim_{n\to\infty} n\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{1}{n^2+2n+4}+\dfrac{1}{n^2+3n+9}+\cdots+\dfrac{1}{n^2+n\cdot n+n^2}\right)$ este: ✓ ?

A 0; B π; C $\dfrac{\pi}{\sqrt{3}}$; D $\dfrac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

400. Fie L limita şirului $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de termen general $a_n = \sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{2n+k}$. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate? ✓ ?

A $L > 0$; B $L = \ln\dfrac{3}{2}$; C $L = \ln 2$; D $L \le \dfrac{1}{2}$.

401. Valoarea limitei $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln\sqrt[n]{1+\dfrac{2k}{n}}$ este: ✓ ?

A $\dfrac{3}{2}\ln 3 - 1$; B $\dfrac{1}{2}(\ln 9 + 2)$; C $\ln 27$; D $\dfrac{1}{2}(\ln 3 - 2)$.

402. Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ şirul de termen general $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{ne^{k/n}+k}}$ şi fie ℓ limita şirului. Care dintre urmaţorele afirmaţii sunt adevaţrate? ✓ ?

A $\ell = 0$; B $\ell \ge \dfrac{1}{\sqrt{e+1}}$; C $\ell \le 1$; D $\ell = \sqrt{\pi}$.

403. Valoarea limitei $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+3^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+6^2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+(3n)^2}}\right)$ este: ✓ ?

A $\dfrac{1}{2}\ln(3+\sqrt{10})$; B $\dfrac{1}{3}\ln(1+\sqrt{8})$; C $\dfrac{1}{3}\ln(3+\sqrt{10})$; D $\dfrac{1}{2}\ln 3$.

404. Valoarea limitei $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{e^{\sqrt{2}\frac{k}{n}}}{n}$ este: ✓ ?

A $\frac{1}{2}(e^2 - e)$; B e^2; C $\frac{\sqrt{2}}{2}(e^2 - 1)$; D $\frac{1}{\sqrt{2}}(e^{\sqrt{2}} - 1)$.

405. Valoarea limitei $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\Big(n - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^2 + k^2}\Big)$ este: ✓ ?

A arctg 1; B $\frac{\pi}{3}$; C $\arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$; D $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}$.

406. Considerăm șirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, cu $a_n = \frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}}$, $p > 0$. Limita șirului este: ✓ ?

A 1; B $\frac{1}{p}$; C $\frac{1}{p+1}$; D 0.

407. Valoarea limitei $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{100i + 15n}{n^2 + 10in}$ este: ✓ ?

A $10 + \frac{1}{2}\ln 11$; B $\ln 5 + 6$; C 8; D $9 + \frac{1}{3}\ln 18$.

408. Notăm cu L limita șirului $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ având ca termen general ✓ ?

$$a_n = \frac{7}{n}\Big[1 + \sqrt{\frac{n}{n+7}} + \sqrt{\frac{n}{n+14}} + \ldots + \sqrt{\frac{n}{n+7(n-1)}}\Big].$$

Să se indice valoarea lui L.

A $\sqrt{2}$; B $2\sqrt{2}$; C $4\sqrt{2} - 2$; D $2\sqrt{2} - 2$.

409. Aria sub graficul funcției $y = \sqrt[4]{1 + x^3}$ între $x = 1$ și $x = 5$ este dată de limita, când $n \to \infty$, a sumei: ✓ ?

A $\frac{5}{n} \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} \sqrt[4]{4 + \left(\frac{5i}{n}\right)^3}$;

B $\frac{4}{n} \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} \sqrt[4]{1 + \left(1 + \frac{4i}{3}\right)^3}$;

C $\frac{5}{n} \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} \sqrt[4]{1 + \left(\frac{5i}{n}\right)^3}$;

D $\frac{4}{n^2} \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} \sqrt[4]{1 + \left(1 + \frac{4i}{3}\right)^3}$.

410. Fie funcția $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum\limits_{k=1}^{n} k \sin \frac{kx}{n}$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A $\int_0^{\pi} x^2 f(x)\mathrm{d}x \in \mathbb{Q}$;

B $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$;

C f admite primitive pe $(0, \infty)$;

D f nu este continuă pe $(0, \infty)$.

411. Valoarea $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{1}{2n^2+3n+1}+\dfrac{1}{2n^2+6n+4}+\cdots+\dfrac{1}{2n^2+3n\cdot n+n^2}\right)$ este: ✓ ?

A 0;

B $\ln\dfrac{4}{3}$;

C $\dfrac{\pi}{4}$;

D $\dfrac{\pi}{2}$.

412. Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ Șirul definit prin ✓ ?

$$x_n = \frac{\sin\dfrac{\pi}{n}+\sin\dfrac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\dfrac{(n-1)\pi}{n}}{n}.$$

Se notează cu $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

A $\ell = 1$;

B $\ell = 0$;

C $\ell = \dfrac{2}{\pi}$;

D $\ell = \dfrac{\pi}{2}$.

3

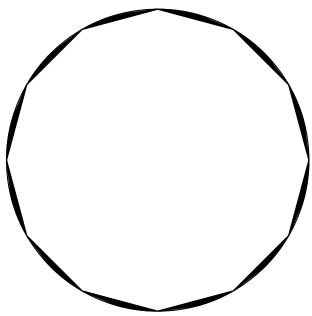
Geometrie

Geometrie sintetică

413. Cincizeci de cercuri concentrice sunt notate $C_1, C_2, ..., C_{50}$. Oricare ar fi $i \in [1, 50)$, tangenta la cercul C_i intersectează cercul C_{i+1} în exact 2 puncte aflate la o distanță de 8 unități. Având în vedere faptul că raza lui C_1 este egală cu 2, care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A Raza lui $C_{43} = 26$;
C Raza lui $C_{46} = 27$;
B Raza lui $C_{40} = 25$;
D Raza lui $C_{50} = 28$.

414. Poligonul din figură este un poligon cu 12 laturi egale și toate unghiurile interne egale și se numește dodecagon regulat. Având în vedere faptul că cercul din imagine intersectează poligonul în toate cele 12 vârfuri și are raza egală cu 1, care este aria suprafeței colorate cu negru? ✓ ?



✓ ?

A $\pi - 6$;
B $\pi - 3.1$;
C $\pi - 3$;
D $\pi - 3.2$.

415. Un triunghi are laturile egale cu 20, 11 și x. Având în vedere faptul că triunghiul nu este isoscel, și x este cea mai scurtă latura a triunghiului, x poate fi egal cu: ✓ ?

A 9; B 10; C 8; D 11.

416. Pentru un triunghi T, $f(T)$ este triunghiul format din mijloacele laturilor lui T iar ✓ ?

$$f^n(T) = \underbrace{f(f(\dots f}_{n \text{ ori}}(T)\dots)).$$

Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate?

A Dacă T este echilateral sau dreptunghic atunci $f(T)$ este echilateral sau dreptunghic;

B Centrele de greutate ale triunghiurilor T şi $f^n(T)$ coincid pentru orice $n \geq 1$;

C Centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor T şi $f^n(T)$ coincid pentru orice $n \geq 1$;

D Dacă T are vârfurile $(1,3)$, $(5,-4)$ şi $(-6,1)$, atunci centrul de greutate a lui $f(T)$ este $(0,0)$.

417. Se consideră dreptunghiul $ABCD$. Luăm punctele E şi F pe laturile consecutive AB, respectiv BC ale dreptunghiului astfel încât aria triunghiurilor ΔAED, ΔBFE şi ΔCDF să fie $x > 0$, $y > 0$, respectiv $z > 0$. Ştiind că $2\sqrt{xz} < x + y + z$, alegeţi fiecare afirmaţie corectă: ✓ ?

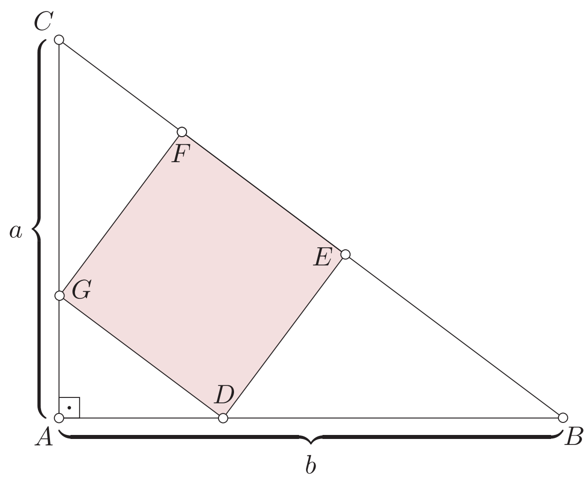
A Aria triunghiului ΔDEF este $\mathcal{A}[\Delta DEF] = \sqrt{(x+y+z)^2 - 4xz}$;

B Aria triunghiului ΔDEF este $\mathcal{A}[\Delta DEF] = \sqrt{2\left((x+y+z)^2 - 4xz\right)}$;

C Aria triunghiului ΔDEF este $\mathcal{A}[\Delta DEF] = \sqrt{3\left((x+y+z)^2 - 4xz\right)}$;

D Aria triunghiului ΔDEF este $\mathcal{A}[\Delta DEF] = 2\sqrt{(x+y+z)^2 - 4xz}$.

418. Considerând triunghiul dreptunghic ΔABC din figură şi pătratul $DEFG$ înscris în el, alegeţi fiecare afirmaţie corectă: ✓ ?



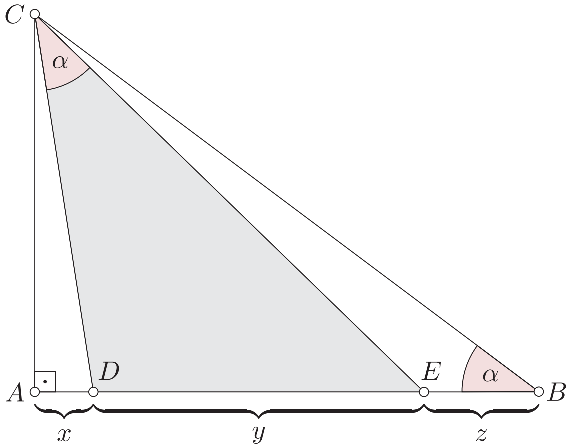
A Aria pătratului $DEFG$ este $\mathcal{A}[DEFG] = \dfrac{a^2b^2\left(a^2+b^2\right)}{\left(a^2+ab+b^2\right)^2}$;

B Aria pătratului $DEFG$ este $\mathcal{A}[DEFG] = \dfrac{ab\left(a^2+b^2\right)}{\left(a^2+ab+b^2\right)^2}$;

C Aria pătratului $DEFG$ este $\mathcal{A}[DEFG] = \dfrac{a^2b^2\left(a+b\right)}{\left(a^2+ab+b^2\right)^2}$;

D Aria pătratului $DEFG$ este $\mathcal{A}[DEFG] = \dfrac{a^2b^2\left(a^2+b^2\right)}{a^2+ab+b^2}$.

419. Considerăm triunghiul dreptunghic ABC cu $m(\hat{A}) = 90°$ și cu punctele interioare D şi E pe latura AB astfel încât $D \in (AE)$, $E \in DB$, $AD = x > 0$, $DE = y > 0$, $EB = z > 0$, $\widehat{ABC} = \widehat{DCE} = \alpha$ şi $x \in \left(0, \sqrt{y\,(y+z)}\right)$. Care afirmaţie este corectă: ✓ ?



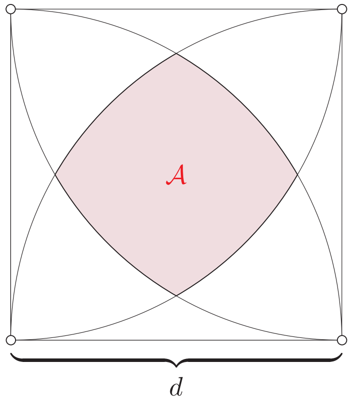
A Aria triunghiului ΔCDE este $\mathcal{A}[\Delta CDE] = \dfrac{y}{2} \cdot \sqrt{2\left(y^2+yz-x^2\right)}$;

B Aria triunghiului ΔCDE este $\mathcal{A}[\Delta CDE] = \dfrac{y}{2} \cdot \sqrt{y^2+yz-x^2}$;

C Aria triunghiului ΔCDE este $\mathcal{A}[\Delta CDE] = \dfrac{y}{2} \cdot \sqrt{3\left(y^2+yz-x^2\right)}$;

D Aria triunghiului ΔCDE este $\mathcal{A}[\Delta CDE] = y \cdot \sqrt{y^2+yz-x^2}$.

420. Figura ataşată a fost obţinută prin trasarea a 4 arce de cerc, centrate în fiecare vârf al unui pătrat, arcele fiind ale unor cercuri cu o raza egală cu lungimea laterală $d > 0$ a pătratului. Aria domeniului marcat este: ✓ ?



A $\mathcal{A} = \left(\frac{2\pi}{3} - \sqrt{3}\right) d^2$;

B $\mathcal{A} = \left(\frac{\pi}{3} - \sqrt{2} + \frac{3}{4}\right) d^2$;

C $\mathcal{A} = \left(\frac{\pi}{6} - \sqrt{3} + \frac{3}{2}\right) d^2$;

D $\mathcal{A} = \left(\frac{\pi}{3} - \sqrt{3} + 1\right) d^2$;

421. Fie a, b, c laturile triunghiului $\triangle ABC$ și $m(\hat{A}) = \frac{\pi}{3}$. Știind că $b = 2$ și $c = 1$, care este lungimea h_a a înălțimii din vârful A pe latura BC? ✓ ?

A 2;

B $\sqrt{3}$;

C 1;

D $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

422. Fie cercurile $\mathcal{C}(B; r_1)$ și $\mathcal{C}(C; r_2)$ care sunt tangente exterior unul altuia și amândouă tangente interior cercului $\mathcal{C}(D; r_1 + r_2)$. Fie acum cercul $\mathcal{C}(A; r_3)$ tangent exterior primelor două cercuri și interior cercului mare. Știind că $r_1 = 2$ și că $r_2 = 1$, care este lungimea razei r_3? ✓ ?

A $\frac{7}{9}$;

B $\frac{7}{7}$;

C $\frac{13}{11}$;

D $\frac{6}{7}$.

423. Fie triunghiul echilateral $\triangle ABC$ cu latura de lungime $l = 4\sqrt{3}$. Fie un punct P în interiorul triunghiului astfel încât lungimea perpendicularelor din P pe două laturi ale triunghiului sunt 1 și 3. Lungimea celei de a treia perpendiculare este: ✓ ?

A $\sqrt{3}$;

B 2;

C $\frac{3}{2}$;

D $\sqrt{2}$.

424. Fie triunghiul dreptunghic ABC cu $m(\hat{B}) = \frac{\pi}{2}$. Considerăm semicercul de rază r tangent catetelor AB și BC, a cărui diametru se află pe ipotenuza AC. Notăm cu p probabilitatea ca un punct ales la întâmplare de pe segmentul AC să se afle pe diametrul semicercului. Știind că $AB = 3$ și $BC = 4$, care dintre următoarele afirmații sunt corecte: ✓ ?

A $r = \frac{10}{7}$; B $p > \frac{2}{3}$; C $AC = 5$; D $r = \frac{15}{7}$.

425. Fie triunghiul ABC şi M, N mijloacele laturilor AB respectiv BC astfel încât $AN = BN$ şi $CM = AM$. Atunci triunghiul ABC este: ✓ ?

A dreptunghic; B oarecare; C isoscel; D degenerat.

426. Fie triunghiul ABC dreptunghic în A şi $BC = 5$. Care este aria maximă pe care o poate avea triunghiul ABC? ✓ ?

A $\frac{37}{2}$; B $\frac{25}{4}$; C $\frac{17}{4}$; D $\frac{19}{2}$.

427. Fie triunghiul $\triangle ABC$ ascuţitunghic şi lungimile laturilor sale $AB = c, AC = b, BC = a$, care îndeplinesc relaţia $3b^2 + 3c^2 = 2\sqrt{3}bc + 3a^2$. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate? ✓ ?

A $\operatorname{tg}(\angle A) = \frac{1}{\sqrt{3}}$;

B $\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{\sqrt{3}}{3}$;

C relaţia dată este adevărată pentru orice triunghi;

D relaţia dată este adevărată doar dacă triunghiul este echilateral.

428. Fie triunghiul $\triangle ABC$ dreptunghic în A cu $AC = 5, AB = 5\sqrt{3}$ şi D mijlocul laturii BC. Ştiind că relaţia $AD^2 + DB^2 + AD \cdot DB = AB^2$ este corectă, care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate? ✓ ?

A nu există triunghi care satisface toate condiţiile simultan;

B $\sin D = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

C $\triangle ADB$ este dreptunghic;

D raza cercului circumscris $\triangle ADB$ este egală cu 4.

429. Fie triunghiul oarecare $\triangle ABC$ cu AD şi AF trisectoarele unghiului A, adică $\angle BAD = \angle DAF = \angle FAC = \frac{\angle A}{3}$; $D, F \in [BC], m(\angle B) = \frac{2\pi}{3}$. Ştiind că relaţia $BD(BD - \sqrt{2}AD) = (AB - AD)(AB + AD)$ este corectă, care dintre următoarele afirmaţii **nu** sunt adevărate? ✓ ?

A $m(\angle C) = \frac{\pi}{6}$;

B $m(\angle A) = \frac{\pi}{4}$;

C $\cos(\angle BDA) = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

D $m(\angle A) = m(\angle BDA)$.

430. Fie triunghiul $\triangle ABC$ cu $m(\angle C) = 150°$. Să se indice care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate. ✓ ?

A lungimile laturilor $\triangle ABC$ sunt de forma: $BC = (m+1), AC = (m+2), AB = \sqrt{(m+1)(m+2)}$ cu $m \in (0, \infty)$;

B lungimile laturilor $\triangle ABC$ sunt de forma: $BC = (m+3), AC = (m+2), AB = \sqrt{(m+1)(m+2)}$ cu $m \in (6, \infty)$;

C lungimile laturilor $\triangle ABC$ nu pot fi de forma: $BC = m, AC = (m+2), AB = m^2 - 5$ cu $m \in \mathbb{R}$;

D nicio afirmație nu este adevărată.

431. Fie triunghiul $\triangle ABC$ în care $\cos C = \frac{1}{2}$. Ținând cont de faptul că două dintre laturi au lungimile de forma $BC = m^2 + 1$, $AC = m^2 - \frac{1}{2}$, unde $m \in (3, \infty)$, precizați care dintre următoarele afirmații sunt adevărate. ✓ ?

A lungimea lui AB este de forma: $m + \frac{3}{2}$;

B triunghiul $\triangle ABC$ nu poate fi echilateral;

C $AB^2 = -\frac{1}{2}m^2 + \frac{7}{4} + m^4$ cu $m \in (3, \infty)$;

D Niciuna dintre afirmaţiile de mai sus nu sunt adevărate.

432. Fie triunghiul $\triangle ABC$ în care are loc egalitatea $\sqrt{2}(1 - \frac{AC}{AB+AC}) - \frac{BC}{AB+AC} = \frac{AB-AC}{BC}$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A triunghiul $\triangle ABC$ este echilateral;

B $\sin B = \cos B$;

C $\operatorname{tg} B = \frac{1}{\sqrt{3}}$;

D niciuna dintre afirmațiile de mai sus nu este adevărată.

433. Fie triunghiul $\triangle ABC$ isoscel cu $AB = AC$. Știind că lungimile laturilor satisfac relația $\frac{(BC-AB)(BC+AC)}{2AC^2} = -2$, care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

B triunghiul este dreptunghic;

C $m(\angle A) = \frac{2\pi}{3}$;

D este imposibil ca triunghiul să fie isoscel.

434. Fie triunghiul $\triangle ABC$ cu lungimile laturilor $m^2+m+1, 2m+1, m^2-1$ cu $m \in (1, \infty)$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A triunghiul $\triangle ABC$ are un unghi egal cu $\frac{2\pi}{3}$ dacă și numai dacă $m = 5$;

B $\forall m \in (1, \infty)$ există un unghi al triunghiului care are măsura de $\frac{2\pi}{3}$;

C nu se poate afla măsura niciunui unghi al triunghiului;

D $\forall m \in (1, \infty)$ există un unghi al triunghiului care are măsura de $\frac{\pi}{3}$.

435. Se consideră triunghiul $\triangle ABC$ ascuțitunghic. Știind că $\operatorname{ctg}(\angle ABC) = \sqrt{6} - \sqrt{3} + 2 - \sqrt{2}$, care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A $m(\angle ABC) = 75°$;

B nu se poate stabili măsura unghiului ABC;

C $m(\angle ABC) = 37°30'$;

D $\operatorname{tg}(\angle ABC) = \sqrt{6} + \sqrt{3} - 2 - \sqrt{2}$.

436. Fie a, b, c măsurile unghiurilor unui triunghi. Care dintre următoarele afirmații **nu** sunt adevărate? ✓ ?

A $\sin \frac{a+b}{2} = \sin \frac{c}{2}$;

B $\sin \frac{a+c}{2} = \cos \frac{b}{2}$;

C $\sin \frac{a+b}{2} = \cos \frac{c}{2}$;

D $\frac{c}{2} = \arcsin\left(\sin \frac{a+b}{2}\right)$.

Operații cu vectori

437. Fie $ABCD$ un trapez $AB > CD$, $AB = 20$, $DC = 10$. Punctele M și N sunt mijloacele segmentelor AB, respectiv CD, iar O este intersecția dreptelor MN și AC; știind că $\overrightarrow{ON} = k \cdot \overrightarrow{NM}$, valoarea lui k este: ✓ ?

A $\frac{1}{2}$;

B $-\frac{1}{2}$;

C $\frac{1}{3}$;

D $-\frac{1}{3}$.

438. În patrulaterul $ABCD$, notăm cu M, N, P şi Q mijloacele laturilor AB, BC, CD şi respectiv DA. Atunci ✓ ?

A $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}$;

B $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{0}$;

C $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$;

D $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CA}$.

439. Fie M, N, P, Q mijloacele laturilor AB, BC, CD, și DA ale paralelogramului $ABCD$. Să se indice care dintre următoarele afirmații sunt adevărate. ✓ ?

A $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{0}$;

B $\overrightarrow{NM} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{0}$;

C $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{AC}$;

D $\overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{DB}$.

440. Considerăm paralelogramul $ABCD$ şi punctele M, N mijloacele laturilor AB, respectiv AD. Notăm cu O intersecţia diagonalelor paralelogramului şi cu G centrul de greutate al triunghiului MNC. Atunci ✓ ?

A $G \in BD$;

B $G = O$;

C $\overrightarrow{GN} + \overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$;

D $2\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MC}$.

441. Considerăm triunghiul neisoscel ABC în care notăm cu O, G, H centrul cercului circumscris, centrul de greutate, respectiv ortocentrul triunghiului. Stabiliţi care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate. ✓ ?

A $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB}$;

B $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{CO}$;

C $\overrightarrow{HG} = 2\overrightarrow{OG}$;

D $\overrightarrow{HO} = 3\overrightarrow{GO}$.

442. Fie M mijlocul diagonalei AC a patrulaterului oarecare $ABCD$. Notăm cu G_1, G_2, G centrele de greutate ale triunghiurilor ABD, BCD, respectiv BMD. Atunci ✓ ?

A $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{BD}$;

B G este mijlocul segmentului G_1G_2;

C $3\overrightarrow{CG_2} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}$;

D $2\overrightarrow{DG_1} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB}$.

443. Considerm̆ în plan punctele distincte necoliniare A, B, C, D şi punctele M, N astfel încât $2\overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{AB}$, $2\overrightarrow{AM} = 5\overrightarrow{AD}$ şi $\overrightarrow{AC} = 5\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AD}$. Din următoarele egalităţi, alegeţi pe cele adevărate. ✓ ?

A $\overrightarrow{AC} = \dfrac{10}{3}\overrightarrow{AM} + \dfrac{6}{5}\overrightarrow{AN}$;

B $\overrightarrow{AC} = \dfrac{5}{3}\overrightarrow{BN} + 3\overrightarrow{AD}$;

C $\overrightarrow{AC} = \dfrac{10}{3}\overrightarrow{AN} + \dfrac{6}{5}\overrightarrow{AM}$;

D $6\overrightarrow{AM} = \dfrac{25}{3}\overrightarrow{BN} + 15\overrightarrow{AD} - \dfrac{50}{3}\overrightarrow{AN}$.

444. Fie $ABCDEF$ un hexagon înscris într-un cerc de centru O cu proprietatea că vectorii $\overrightarrow{FC} + \overrightarrow{BE}$ şi $\overrightarrow{AD}$ nu sunt coliniari. Notăm cu $H_1, H_2, H_3, H_4, H_5, H_6$ ortocentrele triunghiurilor FAB, ABC, BCD, CDE, DEF, respectiv EFA. Stabiliţi care dintre afirmaţii sunt adevărate ✓ ?

A $H_1H_2H_3H_4$ este trapez;

B H_1H_4, H_2H_5, H_3H_6 sunt concurente;

C $H_1H_2H_4H_5$ este paralelogram;

D $H_2H_3H_5H_6$ este trapez.

445. Fie $ABCDEF$ un hexagon regulat înscris într-un cerc de centru O. Notăm cu M mijlocul segmentului AB şi cu I centrul cercului înscris triunghiului OMB. Care dintre următoarele relaţii pentru $\overrightarrow{OI}$ sunt adevărate? ✓ ?

A $\overrightarrow{OI} = \dfrac{2}{3+\sqrt{3}}\overrightarrow{OM} + \dfrac{1}{1+\sqrt{3}}\overrightarrow{OB}$;

B $\overrightarrow{OI} = \dfrac{2}{1+\sqrt{3}}\overrightarrow{OM} - \dfrac{1}{3+\sqrt{3}}\overrightarrow{OB}$;

C $\overrightarrow{OI} = \dfrac{2}{3+\sqrt{3}}\overrightarrow{OM} - \dfrac{1}{1+\sqrt{3}}\overrightarrow{OE}$;

D $\overrightarrow{OI} = \dfrac{1}{3+\sqrt{3}}\overrightarrow{OA} + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\overrightarrow{OB}$.

446. În exteriorul paralelogramului $ABCD$ construim triunghiurile DCF şi AED astfel încât $\Delta DCF \sim \Delta DCO$, respectiv $\Delta AED \sim \Delta DOA$, unde am notat cu O intersecţia diagonalelor AC şi BD. Stabiliţi care dintre următoarele relaţii sunt adevărate ✓ ?

A $\overrightarrow{EO} + \overrightarrow{FO} = \overrightarrow{DB}$;

B $\overrightarrow{FB} = 2\overrightarrow{FO} + \overrightarrow{ED}$;

C $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CO}$;

D $\overrightarrow{DO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DF})$.

447. În exteriorul pătratului $ABCD$ constrium pătratele $AMND, CDPQ$, respectiv $CRSB$. Alegeţi relaţiile vectoriale corecte ✓ ?

A $\overrightarrow{MP} - \overrightarrow{AR} = \overrightarrow{BD}$;

B $\overrightarrow{BP} + \overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AD}$;

C $\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{BC}$;

D $\overrightarrow{CR} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{NP}$.

448. În exteriorul triunghiului echilateral ABC se construiesc triunghiurile echilaterale ABD, BCE, respectiv CFA. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{DA}$;

B $\overrightarrow{FB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{FD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{FE}$;

C $\overrightarrow{FC} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BE}$;

D $\overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{BE}$.

449. În exteriorul unui cerc de centru O considerăm un punct A din care constrium tangentele la cerc înpunctele M, respectiv N. Admitem că în interiorul patrulaterului $AMON$ se poate înscrie un cerc tangent la laturile patrulaterului. Notăm cu I centrul acestui cerc. Ştiind că $m(\hat{A}) = 60°$ alegeţii expresiile vectoriale corecte ✓ ?

A $\overrightarrow{AI} = \dfrac{3}{1+\sqrt{3}}\overrightarrow{AO}$;

B $\overrightarrow{AI} = \dfrac{3}{3+\sqrt{3}}\overrightarrow{AO}$;

C $\overrightarrow{MI} = \dfrac{1+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}\overrightarrow{MA} + \dfrac{2}{3+\sqrt{3}}\overrightarrow{MN}$;

D $\overrightarrow{MI} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{3+\sqrt{3}}\overrightarrow{MA} + \dfrac{2}{3+\sqrt{3}}\overrightarrow{MN}$.

450. În exteriorul unui cerc de centru O considerăm un punct A din care constrium tangentele la cerc înpunctele M, respectiv N. Dacă patrulaterul $AMON$ este inscriptibil notăm cu O_1 centrul cercului în care este înscris. Determinaţi care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate ✓ ?

A $\overrightarrow{O_1O} + \overrightarrow{O_1A} = \overrightarrow{0}$;

B Există puncte A pentru care patrulaterul $AMON$ să nu fie inscriptibil;

C Dacă $m(\hat{A}) = 90°$, O_1 este pe cercul de centru O;

D Dacă $m(\hat{A}) = 60°$, O_1 este pe cercul de centru O.

451. Triunghiul ABC are lungimile laturilor $AB = 5, AC = 12$, respectiv $BC = 13$. Ştiind că punctele O, I, G, H sunt centrul cercului circumscris, centrul cercului înscris, centrul de greutate şi respectiv ortocentrul triunghiului ABC, stabiliţi care dintre afirmaţii sunt adevărate. ✓ ?

A $\overrightarrow{OI} = 5\overrightarrow{OC} + 12\overrightarrow{OB} + 13\overrightarrow{OA}$;

B $\overrightarrow{OI} = \frac{1}{30}\left(5\overrightarrow{OC} + 12\overrightarrow{OB} + 13\overrightarrow{OA}\right)$;

C $\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}$;

D $2\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

452. Notăm cu M, N, P, Q mijloacele laturilor AB, BC, CD și DA ale pătratului $ABCD$ şi cu O intersecţia segmentelor AC şi BD. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A $\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{ND} = \overrightarrow{NO} + 3\overrightarrow{QD}$;

B $\overrightarrow{QM} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{NC}$;

C $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BP} = 3\overrightarrow{MO}$;

D $\overrightarrow{NQ} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{QM}$.

Pentru rezolvarea următoarelor exerciţii se vor folosi următoarele rezultate teoretice. Pentru un poligon cu $n \geq 3$ vârfuri $A_1A_2 \ldots A_n$ definim centrul de greutate al poligonului ca fiind punctul din plan G cu proprietatea că $\overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{GA_2} + \cdots + \overrightarrow{GA_n} = \overrightarrow{0}$. Se poate demonstra că vectorul de poziţie al punctului G este $\overrightarrow{r_G} = \frac{1}{n}\left(\overrightarrow{r_{A_1}} + \cdots + \overrightarrow{r_{A_n}}\right)$. În plus, dacă polionul este regulat, centrul de greutate este centrul cercului în care poligonul este înscris.

453. Fie $A_1A_2 \ldots A_{60}$ un poligon regulat cu 60 de vârfuri. Notăm cu G_1, G_2, G_3, G_4 centrele de greutate ale poligoanelor $A_1A_3 \ldots A_{59}$, $A_2A_4 \ldots A_{60}$, $A_1A_2A_4$, respectiv $A_{31}A_{32}A_{34}$. Care dintre următoarele afirmații sunt corecte? ✓ ?

A $G_1 = G_2$;

B $G_1 \in G_3G_4$;

C $G_1 \neq G_2$;

D $G_2 \notin G_3G_4$.

454. Fie $ABCDE$ un pentagon înscris într-u cerc de centru O. Notăm cu H_1, H_2, G, M ortocentrul triunghiului ABC, ortocentrul triunghiului ADE, centrul de greutate al pentagonului, respectiv mijlocul segmentului H_1H_2. Să se indice care dintre următoarele variante de răspuns sunt adevărate. ✓ ?

A $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE}\right)$;

B $\overrightarrow{OH_1} + \overrightarrow{OH_2} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OG}$;

C $\overrightarrow{OH_1} + \overrightarrow{OH_2} = \overrightarrow{OA} + 5\overrightarrow{OG}$;

D $M = G$ dacă şi numai dacă $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{0}$.

455. În hexagonul $ABCDEF$ notăm cu M, N, P mijloacele segmentelor AD, BE, respectiv CF. Considerăm că punctele M, N, P sunt distincte două câte două. Mai notăm cu G_1, G_2 centrul de greutate al hexagonului, respectiv al triunghiului MNP. Stabiliţi care dintre următoarele afirmații sunt adevărate. ✓ ?

A $G_1 = G_2$ pentru orice hexagon $ABCDEF$;

B $G_1 = G_2$ dacă şi numai dacă $ABCDEF$ este un hexagon regulat;

C $G_1 \in MN$;

D Nicio afirmţie nu este adevărată.

456. Fie $ABCD$ un patrulater oarecare în care notăm cu M, N, P mijloacele segmentelor AB, CD, respectiv MN. Care dintre următoarele variante de răspuns sunt adevărate? ✓ ?

A $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = \overrightarrow{0}$;

B $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}$;

C P este centrul de greutate al patrulaterului;

D $\overrightarrow{BP} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}\right)$.

Coliniaritate vectori

457. Considerăm în plan punctele M, N și triunghiul ABC. Știind că $\overrightarrow{AM} = p\cdot\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ și $\overrightarrow{CN} = q \cdot \overrightarrow{CB}$. A, M, N sunt coliniare, dacă și numai dacă: ✓ ?

A $p - q = p \cdot q$; B $p + q = p \cdot q$; C $\frac{p}{q} = p + 1$; D $\frac{p}{q} = p - 1$.

458. Considerăm paralelogramul $ABCD$, M mijlocul laturii CD şi O intersecţia diagonalelor AC şi BD. Notăm cu G_1, G_2 centrele de greutate ae triunghiurilor AMB, respectiv AOB. Care dintre următoarele afirmații nu sunt adevărate? ✓ ?

A M, G_1, G_2 sunt coliniare;

B O aparţine segmentului MG_1;

C G_1, O, G_2 sunt coliniare;

D G_1 aparţine segmentului MO.

459. Pe laturile triunghiului ABC construim triunghiurile echilaterale BCA_1, CAB_1, ABC_1 care au centrele de greutate G_1, G_2, respectiv G_3. Dacă notăm cu G centrul de greutate al triunghiului ABC, iar punctele A, G, G_1 sunt coliniare, care dintre următoarele afirmații adevărate? ✓ ?

A Triunghiul ABC este echilateral dacă şi numai dacă A, G_1, A_1 sunt coliniare;

B Triunghiul ABC este isoscel în A;

C A, G_1, A_1 sunt coliniare;

D Dacă punctele B, G, G_2 sunt coliniare, atunci triunghiul ABC este echilateral.

460. În pentagonul $ABCDE$ notăm cu G, G_1, G_2, M centrul de greutate al pentagonului, centrul de greutate al triunghiului ABC, centrul de greutate al triunghiului ADE, respectiv mijlocul segmentului G_1G_2. Să se indice care dintre următoarele variante de răspuns sunt adevărate. ✓ ?

A A, M, G sunt coliniare;

B $G_1G_2 \parallel CD$ dacă şi numai dacă $CD \parallel BE$;

C $G_1G_2 \parallel BE$ dacă şi numai dacă $BC \parallel DE$;

D A, M, G sunt coliniare dacă şi numai dacă $BCDE$ este paralelogram.

461. Fie $ABCDEF$ un hexagon convex în care notăm cu G, G_1, G_2, M centrul de greutate al hexagonului, centrul de greutate al triunghiului ABC, centrul de greutate al triunghiului DEF, respectiv mijlocul segmentului G_1G_2. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A A, M, D sunt coliniare dacă şi numai dacă $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE}$;

B Dacă $ABCDEF$ este un hexagon regulat, A, G, D sunt coliniare;

C A, G, D sunt coliniare dacă şi numai dacă A, M, D sunt coliniare;

D A, M, D sunt coliniare dacă şi numai dacă $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{0}$.

462. În triunghiul ABC notăm cu O, G, H, centrul cercului circumscris, centrul de greutate, respectiv ortocentrul triunghiului. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A Vectorii $\overrightarrow{OH}$ şi $\overrightarrow{GO}$ sunt coliniari;

B Vectorii $\overrightarrow{HO}$ şi $\overrightarrow{GO}$ sunt coliniari dacă şi numai dacă $\triangle ABC$ este isoscel;

C Vectorii $\overrightarrow{OH}$ şi $\overrightarrow{GO}$ sunt coliniari dacă şi numai dacă $\triangle ABC$ este dreptunghic;

D Toate afirmaţiile anterioare sunt corecte.

463. În plan se aleg punctele A, B, C, D, oricare trei necoliniare, cu proprietatea că există numere reale α și β cu proprietatea că $\overrightarrow{AC} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AD}$. Ştiind că vectorii $\overrightarrow{AB}$ şi $2\overrightarrow{AC} + 5\overrightarrow{AD}$ sunt coliniari, care sunt două valori posibile pentru parametrii α şi β? ✓ ?

A $\alpha = 1,\ \beta = \frac{3}{2}$;

C $\alpha = -3,\ \beta = -\frac{5}{2}$;

B $\alpha = 3,\ \beta = \frac{7}{2}$;

D $\alpha = 1,\ \beta = -\frac{5}{2}$.

464. În trapezul $ABCD$ cu $AB \parallel CD$ notăm cu O, G_1, G_2 intersecţia diagonalelor AC şi BD, centrul de greutate al triunghiului ACD, respectiv centrul de greutate al triunghiului BCD. Dacă vectorii $\overrightarrow{OG_1}$ şi $\overrightarrow{OG_2}$ sunt coliniari, care este valoarea numărului real k cu proprietatea că $\overrightarrow{G_1O} = k\overrightarrow{G_2G_1}$? ✓ ?

A $k = 2$;

B $k = -2$;

C $k = -\frac{1}{2}$;

D $k = \frac{1}{2}$.

465. Pe laturile AD şi DC ale paralelogramului $ABCD$ construim în exterior paralelogramele $ADFE$ şi $CDFG$. Notăm cu O_1, O_2, O_3 centrele paralelogramelor $ABCD$, $ADFE$, respectiv $CDFG$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A $AO_1O_3O_2$ este paralelogram;

B $AO_1O_3O_2$ este trapez;

C Dreapta care trece prin O_1 şi prin mijlocul segmentului O_2O_3 este paralelă cu DF;

D Dreapta care trece prin O_1 şi prin mijlocul segmentului O_2O_3 este paralelă cu DF dacă şi numai dacă $\overrightarrow{BD}$ şi $\overrightarrow{DF}$ sunt coliniari.

466. Notăm cu B_1, C_1 mijloacele laturilor AC, respectiv AB ale triunghiului ABC. De asemenea, notăm cu G, G_1, G_2 centrele de greutate ale triunghiurilor ABC, AGB_1, respectiv AGC_1. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A G_1G_2BC este paralelogram;

B G_1G_2BC este trapez;

C $G_1G_2 \parallel B_1C_1$;

D $G_1G_2C_1B_1$ este paralelogram.

Vector poziție

467. Fie punctele $A(\alpha, 1)$, $B(1,1)$, $C(\beta, 0)$ şi $D(-1,0)$, unde α, β sunt numere reale. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A Avem o infinitate de perechi (α, β) pentru care $ABCD$ este paralelogram;

B Dacă $ABCD$ este paralelogram, atunci $\alpha + 2\beta = 0$;

C Avem o singură pereche (α, β) pentru care $ABCD$ este paralelogram;

D $ABCD$ nu este paralelogram pentru nicio pereche de numere (α, β).

468. Fie punctele $A(0,1)$, $B(1,0)$ şi $C\left(\alpha, \alpha^2\right)$. Pentru ce valori ale lui α punctele A, B şi C sunt coliniare? ✓ ?

A $\alpha = \dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}$; B $\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$; C $\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$; D $\alpha = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

469. Fie reperul cartezian XoY cu versorii $\overrightarrow{i}$, respectv $\overrightarrow{j}$ şi funcţia $\overrightarrow{v} : \mathbb{R} \to \mathcal{V}$, $\overrightarrow{v}(x) = x^2 \cdot \overrightarrow{i} + 3x^2 \cdot \overrightarrow{j}$. Locul geometric descris de vârful vectorului de poziţie al punctelor $\overrightarrow{v}(x)$ atunci când x parcurge pe $\mathbb{R}$ este: ✓ ?

A un cerc; B o dreaptă; C o semidreaptă; D o parabolă.

470. Fie triunghiul oarecare $\triangle ABC$ şi $\alpha \in (0, \infty)$. Considerăm punctele M, N, P pe $[AB], [BC]$ respectiv $[CA]$ astfel încât $\dfrac{AM}{MB} = \dfrac{BN}{NC} = \dfrac{CP}{PA} = \alpha$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A Triunghiurile ABC şi MNP au acelaşi ortocentru;

B Triunghiurile ABC şi MNP au acelaşi centru de greutate;

C Centrul cercului circumscris al triunghiului ABC şi al triunghiului MNP coincid;

D Nicio afirmaţie de mai sus nu este corectă.

471. Fie A şi B două puncte distincte în plan şi fie funcţia $\overrightarrow{v} : [0,1] \to \mathcal{V}$, $\overrightarrow{v}(t) = t \cdot \overrightarrow{r_A} + (1-t) \cdot \overrightarrow{r_B}$. Să se indice valoarea de adevăr a următoarelor afirmații: ✓ ?

A $\overrightarrow{v}$ este injectivă;

B $\overrightarrow{v}$ este surjectivă;

C $\overrightarrow{v}(t) = \overrightarrow{r_A} \Rightarrow t = 1$;

D $\overrightarrow{v}(t) = \overrightarrow{r_B} \Rightarrow t = 1$.

472. Fie A, B, C şi G puncte in plan cu $\overrightarrow{r_A} = 3\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{r_B} = -\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}$ şi $\overrightarrow{r_G} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$. Punctul C, astfel încât G să fie centrul de greutate al triunghiului ABC este dat prin vectorul de poziţie:

A $\overrightarrow{r_C} = -\overrightarrow{i}$;

B $\overrightarrow{r_C} = \overrightarrow{i}$;

C $\overrightarrow{r_C} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$;

D $\overrightarrow{r_C} = -\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$.

473. Fie $G_0 = A$ şi triunghiul ABC. Fie G_1 centrul său de greutate. Considerăm triunghiul G_1BC şi G_2 centrul său de greutate. Procedând inductiv obţinem un şir de triunghiuri $(G_nBC)_{n\in\mathbb{N}}$ astfel încât G_{n+1} este centrul de greutate al triunghiului G_nBC, $\forall n \in \mathbb{N}$. Care dintre următoarele variante de răspuns sunt adevărate?

A Toate punctele G_n se află pe aceeaşi dreaptă;

B $\lim\limits_{n\to\infty} G_n \in [BC]$;

C $\overrightarrow{r_{G_n}} = \frac{1}{3^n}\overrightarrow{r_A} + \frac{(3^n-1)^2}{4\cdot 3^n}(\overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{r_C})$;

D $\overrightarrow{r_{G_n}} = \frac{1}{3^n}\overrightarrow{r_A} + \frac{3^n-1}{2\cdot 3^n}(\overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{r_C})$.

474. Fie A, B şi C trei puncte coliniare astfel încât $\frac{AB}{AC} = \frac{1}{2}$, Dacă $\overrightarrow{r_A}, \overrightarrow{r_B}, \overrightarrow{r_C}$ sunt vectorii de poziţie ai punctelor A, B, C, care dintre relaţii este adevărată?

A $\overrightarrow{r_B} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{r_C})$;

B $\overrightarrow{r_B} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{r_A} - \overrightarrow{r_C})$;

C $\overrightarrow{r_B} = \frac{3}{2}\overrightarrow{r_C} - \frac{1}{2}\overrightarrow{r_A}$;

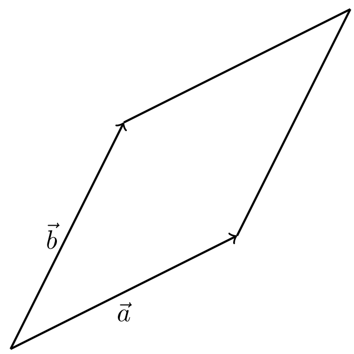
D $\overrightarrow{r_B} = \frac{3}{2}\overrightarrow{r_A} - \frac{1}{2}\overrightarrow{r_C}$.

475. Fie triunghiul ABC şi M, N, P puncte pe (AB), (BC), respectiv (CA). Numim triunghiul MNP *triunghi interior* dacă $\frac{AM}{MB} = \frac{BN}{NC} = \frac{CP}{PA}$. Presupunem că există un şir de triunghiuri (nedegenerate) $(A_nB_nC_n)_{n\in\mathbb{N}}$ astfel încât $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$ este *triunghi interior* triunghiului $A_nB_nC_n$ şi centrele cercurilor înscrise triunghiurilor $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$ şi $A_nB_nC_n$ coincid, $\forall n \in \mathbb{N}$. Atunci triunghiul $A_0B_0C_0$ este:

A dreptunghic; B oarecare; C echilateral; D obtuzunghic.

Produs scalar

476. Fie rombul din figură determinat de vectorii $\overrightarrow{a}$ și $\overrightarrow{b}$. Să se indice care dintre următoarele afirmații sunt **false**.



✓ ?

A $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$;

B $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$;

C $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 0$;

D Nicio afirmație nu este falsă.

477. Dacă A, B, C și M sunt puncte distincte într-un plan astfel încât $6\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} - 5\overrightarrow{BC}$, atunci: ✓ ?

A B, C, M sunt coliniare;

B B, C, M sunt necoliniare;

C $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BC} < 0$;

D $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BC} > 0$.

478. Dacă $A(-2,-1)$, $B(2,1)$ și $C(-1,2)$ sunt puncte într-un sistem de coordonate cartezian, atunci triunghiul ABC este: ✓ ?

A obtuzunghic; B isoscel; C dreptunghic; D echilateral.

479. Fie $A(2,1)$, $B(-1,-1)$ şi $C\left(2\alpha, \alpha^2 - 4\alpha + 4\right)$, unde $\alpha \in \mathbb{R}$. Valoarea lui α pentru care triunghiul ABC este dreptunghic în A este: ✓ ?

A $\alpha = -1$; B $\alpha = 1$; C $\alpha = 0$; D $\alpha = 2$.

480. Fie $A(3,0)$, $B(0,4)$, $C(\alpha, \beta + 4)$ şi $D(\alpha + 3, \beta)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Numărul de perechi (α, β) pentru care $ABCD$ este romb este: ✓ ?

A una; B două; C o infinitate; D niciuna.

481. Fie $\overrightarrow{a}$ și $\overrightarrow{b}$ vectori nenuli din plan astfel încât $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 0$. Fie $\overrightarrow{v} : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{V}$, $\overrightarrow{v}(\alpha, \beta) = \alpha \cdot \overrightarrow{a} + \beta \cdot \overrightarrow{b}$, unde prin $\mathcal{V}$ notăm mulțimea vectorilor din plan . Care dintre următoarele afrimații sunt corecte? ✓ ?

A Funcţia $\overrightarrow{v}$ este surjectivă;

B Funcţia $\overrightarrow{v}$ este injectivă;

C Funcţia $\overrightarrow{v}$ este inversabilă;

D Nicio afirmaţie de mai sus nu este corectă.

482. Fie $A(3,2)$, $B(0,2)$ şi $C(-2,0)$. Atunci măsura unghiului ABC este ✓ ?

A $\frac{\pi}{3}$; B $\frac{\pi}{2}$; C $\frac{2\pi}{3}$; D $\frac{3\pi}{4}$.

483. Fie dreapta $d : 3x - 2y + 6 = 0$, $M(5, 4)$ şi P proiecţia punctului M pe dreapta d. Atunci coordonatele lui P sunt: ✓ ?

A $P(2, 5)$; B $P(1, 4)$; C $P(2, 6)$; D $P(1, 5)$.

484. Fie triunghiul ABC şi $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{CA}$ astfel încât $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} \geq 0$ şi $\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c} \geq 0$. Atunci: ✓ ?

A $\triangle ABC$ este dreptunghic;
B $\triangle ABC$ este isoscel;
C $\triangle ABC$ este degenerat;
D $\triangle ABC$ este obtuzunghic.

485. Fie vectorii $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ şi $\overrightarrow{c}$ nenuli astfel încât $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ şi $|\overrightarrow{c}| = |\overrightarrow{a}| + |\overrightarrow{b}|$. Atunci $\overrightarrow{a}$ şi $\overrightarrow{c}$ sunt: ✓ ?

A perpendiculari; B coliniari; C opuși; D alt răspuns.

Coordonate

486. Într-un sistem de coordonate cartezian ortonormat xOy se dau punctele $A(-1, -2)$, $B(3, 1)$ şi $M(a, b)$. Triunghiul ABM este echilateral pentru: ✓ ?

A $a = \frac{2 - 3\sqrt{3}}{2}$, $b = \frac{-1 + 4\sqrt{3}}{2}$;
B $a = \frac{2 - 3\sqrt{3}}{2}$, $b = \frac{-1 - 4\sqrt{3}}{2}$;
C $a = \frac{2 + 3\sqrt{3}}{2}$, $b = \frac{-1 + 4\sqrt{3}}{2}$;
D $a = \frac{2 + 3\sqrt{3}}{2}$, $b = \frac{-1 - 4\sqrt{3}}{2}$.

487. Se dă un triunghi ABC cu vârfurile în punctele de coordonate $A(1, 0)$, $B(4, 3)$, $C(0, 5)$ şi punctele D, E, F situate pe laturile triunghiului, astfel încât $2\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{DC}$, $3\overrightarrow{CE} = 4\overrightarrow{EA}$, $2\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{FB}$. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate? ✓ ?

A $AD : 11x - 5y - 11 = 0$;
B $BE : x + 4y + 8 = 0$;
C $CF : 8x - 7y - 35 = 0$;
D AD, BE, CF sunt concurente.

488. Dacă $A(1, 3)$, $B(6, 4)$ și $C(\frac{15}{4}, \frac{15}{4})$ sunt puncte într-un sistem de coordonate cartezian cu originea în O, atunci: ✓ ?

A $[OC]$ este mediană în triunghiul AOB;
B OC este bisectoarea unghiului AOB;
C OC este perpendiculară pe AB;
D OC este mediatoarea segmentului $[AB]$.

489. Se consideră triunghiul ABC şi M, N, P mijloacele laturilor $[BC]$, $[CA]$ respectiv $[AB]$. Faţă de un reper cartezian ortonormat al planului său, vârfurile triunghiului ABC au coordonatele $A(-4, 1), B(-7, 4)$, $C(0, 5)$. Care dintre următoarele variante de răspuns sunt adevărate? ✓ ?

A Triunghiul ABC este dreptunghic şi $m(\widehat{A}) = 90°$;

B Triunghiul ABC şi triunghiul MNP au acelaşi centru de greutate;

C Triunghiul ABC şi triunghiul MNP au acelaşi ortocentru;

D Centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor ABC şi MNP coincid.

490. Un avion se află pe o pistă și dorește să decoleze. Pleacă dintr-un punct oarecare al pistei și accelerează până în punctul $A(0, 0)$ unde își începe desprinderea de la sol, urcând în linie dreaptă până în punctul $B(5\sqrt{3}, 5)$. Pe ruta sa, merge liniar și paralel cu axa Ox din punctul B până în punctul $C(10\sqrt{3}, 5)$, unde își începe aterizarea în linie dreaptă către punctul $D(5(1 + 2\sqrt{3}), 0)$. Notăm cu θ și γ unghiurile formate de traiectoria avionului la decolare și, respectiv, la aterizare cu sensul pozitiv al axei Ox. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A $\theta = \frac{\pi}{6}, \gamma = \frac{5\pi}{6}$;

B $\theta = \frac{\pi}{2}, \gamma = \frac{\pi}{2}$;

C $\theta = \frac{\pi}{6}, \gamma = \frac{3\pi}{4}$;

D $\theta = \frac{\pi}{4}, \gamma = \frac{3\pi}{4}$.

491. Fie $(C_n(A_n; r_n))_{n\in\mathbb{N}}$ şirul de cercuri $C_n(A_n; r_n)$ de rază $r_n > 0$ cu centrul A_n -, definit recurent astfel: $C_1(A_1; r_1)$ este cercul de rază $r_1 = 1$, cu centrul A_1 situat pe prima bisectoare, tangent axelor de coordonate; $C_2(A_2; r_2)$ este cercul de rază $r_2 < r_1$, cu centrul A_2 situat pe prima bisectoare, tangent cercului $C_1(A_1; r_1)$ şi axelor de coordonate; ş.a.m.d. Dacă cercul $C_n(A_n; r_n)$, $(n \in \mathbb{N})$ a fost construit, atunci $C_{n+1}(A_{n+1}; r_{n+1})$ este cercul de rază $r_{n+1} < r_n$, cu centrul A_{n+1} situat pe prima bisectoare, tangent cercului $C_n(A_n; r_n)$ şi axelor de coordonate. ✓ ?

Dacă s_n notează aria cercului $C_n(A_n; r_n)$, $n \in \mathbb{N}$, atunci:

$$\lim_{n\to\infty}(s_1 + s_2 + ... + s_n),$$

este:

A 2π;

B $\frac{8+\sqrt{2}}{8}\pi$;

C $\pi + \frac{\sqrt{2}}{8}\pi$;

D 3π.

492. Andrei și-a creat propriul joc pe care l-a denumit "Labirintul". Acesta funcționează după următoarea regulă: jucătorul, la fiecare pas, aflându-se în punctul de coordonate (x, y), se mută la punctul $(x + y, -y)$. Știind că pornește din punctul de coordonate $(2, 2)$, care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A La pasul 162, jucătorul este plasat pe dreapta de ecuație $x + 2y = 0$;

B La pasul 2025, jucătorul se află în punctul de coordonate $(2, 2)$;

C La pasul 163, jucătorul este plasat pe dreapta de ecuație $x + y = 0$;

D Niciuna dintre afirmații nu este adevărată.

493. Fie triunghiul ABC cu vârfurile în punctele de coordonate $A(1,2)$, $B(-4,-1)$ şi $C(2,-3)$, atunci coordonatele centrului său de greutate (notat G) sunt: ✓ ?

A $G\left(-\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)$; B $G\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)$; C $G(-1,-1)$; D $G\left(-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$.

494. Fie triunghiul ABC cu vârfurile în punctele de coordonate $A(1,5)$, $B(1,1)$ şi $C(3,1)$ şi fie punctele M, N, P pe $[AB]$, $[BC]$ respectiv $[CA]$ astfel încât $MBNP$ este pătrat. Alegeţi afirmaţiile adevărate ✓ ?

A lungimea laturii lui $MBNP$ este $\frac{7}{3}$;

B lungimea laturii lui $MBNP$ este $\frac{10}{3}$;

C lungimea laturii lui $MBNP$ este $\frac{4}{3}$;

D Nu există pătrat $MBNP$ cu proprietăţile cerute.

495. Fie triunghiul ABC cu vârfurile în punctele de coordonate $A(0,2)$, $B(-1,1)$ şi $C(2,-1)$. Atunci coordonatele ortocentrului triunghiului ABC (notat H) sunt: ✓ ?

A $H\left(\frac{2}{5},\frac{7}{5}\right)$; B $H\left(-\frac{2}{5},-\frac{7}{5}\right)$; C $H\left(\frac{2}{5},-\frac{7}{5}\right)$; D $H\left(-\frac{2}{5},\frac{7}{5}\right)$.

496. Fie triunghiul ABC cu vârfurile în punctele de coordonate $A(-1,-3)$, $B(0,1)$ şi $C(2,0)$. Coordonatele centrului cercului circumscris triunghiului ABC (notat O) sunt: ✓ ?

A $O\left(\frac{1}{6},\frac{7}{6}\right)$; B $O\left(\frac{1}{6},-\frac{7}{6}\right)$; C $O\left(-\frac{1}{3},-\frac{7}{3}\right)$; D $O\left(-\frac{1}{3},\frac{7}{3}\right)$.

497. Fie triunghiul ABC cu vârfurile în punctele de coordonate $A(2,1)$, $B(-2,-1)$ şi $C(2,-1)$. Atunci coordonatele centrului cercului înscris triunghiului ABC (notat I) sunt: ✓ ?

A $I\left(-1+\sqrt{5},2-\sqrt{5}\right)$;

C $I\left(1+\sqrt{5},2+\sqrt{5}\right)$;

B $I\left(1+\sqrt{5},2-\sqrt{5}\right)$;

D $I\left(-1+\sqrt{5},2+\sqrt{5}\right)$.

498. Fie punctele A, B şi C şi dreptele $AB: x-2y+4=0$, $BC: 2x+y-2=0$ și $CA: x+3y+4=0$. Atunci: ✓ ?

A $A(-3,1)$, $B(1,2)$, $C(0,-2)$;

C $A(-4,0)$, $B(0,2)$, $C(-1,-2)$;

B $A(-4,0)$, $B(1,-1)$, $C(2,-2)$;

D $A(-4,0)$, $B(0,2)$, $C(2,-2)$.

499. Fie cercul de centru $C(0,1)$, raza $R=2$ şi punctul $A(4,2)$. Fie $M(x,y)$ pe cerc astfel încât dreapta AM este tangentă la cerc. Atunci: ✓ ?

A $M\left(\dfrac{16+2\sqrt{13}}{17}, \dfrac{21+8\sqrt{13}}{17}\right)$;

C $M\left(\dfrac{16-2\sqrt{13}}{17}, \dfrac{21-8\sqrt{13}}{17}\right)$;

B $M\left(\dfrac{16+2\sqrt{13}}{17}, \dfrac{21-8\sqrt{13}}{17}\right)$;

D $M\left(\dfrac{16-2\sqrt{13}}{17}, \dfrac{21+8\sqrt{13}}{17}\right)$.

500. Fie punctul $M(x,y)$ şi cercurile $\mathcal{C}_1$ de centru $O(0,0)$ şi rază $R=1$ şi $\mathcal{C}_2$ de centru M şi rază $R=1$. Locul geometric al punctelor M pentru care cercurile $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$ sunt tangente este: ✓ ?

A o dreaptă; B o parabolă; C un cerc; D o elipsă.

501. Fie punctele $A(-1,2)$, $B(2,1)$ şi $M(x,y)$. Locul geometric al punctelor M pentru care triunghiul AMB este dreptunghic în M este: ✓ ?

A o parabolă; B un cerc; C o dreaptă; D o elipsă.

502. Fie punctele $A(1,-3)$, $B_\alpha(-2,\alpha)$, $C_\beta(0,\beta)$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ şi $M(\alpha,\beta)$. Locul geometric al punctelor M pentru care triunghiurile $AB_\alpha C_\beta$ au acelaşi centru de greutate este ✓ ?

A un cerc; B o dreaptă; C o elipsă; D o parabolă.

503. Fie $A(1,2)$, $B(-1,0)$ şi $C(x_C,y_C)$. Numărul de puncte C pentru care aria triunghiului ABC este 2 este: ✓ ?

A unul singur; B o infinitate; C două; D niciunul.

504. Fie segmentul [AB] cu $A\left(2,\dfrac{7}{2}\right)$, $B(x_B,y_B)$ şi punctul $C(1,2)$ care aparține segmentului (AB). Știind că $\dfrac{AC}{CB}=\dfrac{AB}{AC}$, care este valoarea $(x_B+x_A)^2-y_B$? ✓ ?

A 1;

C $\dfrac{49}{4}+\dfrac{5\sqrt{5}-6}{1+\sqrt{5}}$;

B $\dfrac{49}{4}+\dfrac{5\sqrt{5}-6}{1+\sqrt{5}}+\dfrac{6-2\sqrt{5}}{6+2\sqrt{5}}$;

D $\dfrac{2}{3}$.

505. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-5,-1)$, $B(2,2)$ și $C(-4,5)$. Știind că punctul P este ortocentrul triunghiului ABC, care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A P se află pe dreapta de ecuație $y=-\dfrac{7}{3}x-\dfrac{13}{3}$;

B $A_{\triangle PAB}=71$;

C simetricul punctului P față de dreapta BC are coordonatele $\left(\dfrac{1}{13},\dfrac{119}{13}\right)$;

D P este centrul de greutate al $\triangle ABC$.

506. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4,2), B(-2,6)$ și $C(8,-2)$ și G ✓ ? centrul de greutate al triunghiului $\triangle ABC$. Știind că distanța de la G la dreapta de ecuație $y = mx + 2$ este egală cu 2, iar m¿0, care este valoarea calcului $8m$?

A 6; B 14; C 3; D 2.

507. În sistemul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,4), B(2,-3), C(-3,4)$ și $D(x_D, y_D)$. ✓ ? Știind că triunghiul format din centrul de greutate al triunghiului ABC, origine și D este un triunghi isoscel și dreptunghic în O, $5\frac{y_D}{x_D} + 2$ este egal cu?

A 3; B 2; C 4; D 1.

Ecuația dreptei

508. Centrul de greutate G al unui triunghi ABC are coordonatele $G(6,7)$, iar ecuațiile ✓ ? a două dintre laturile sale sunt $BC : 2x - y + 1 = 0$, respectiv $AC : 5x - 7y + 16 = 0$. Atunci ecuația celei de-a treia laturi a triunghiului este:

A $AB : 8x + 13y + 49 = 0$;
C $AB : 8x - 13y + 49 = 0$;
B $AB : 8x - 13y - 49 = 0$;
D $AB : 8x + 13y - 49 = 0$.

509. Să se indice care dintre următoarele drepte trec prin punctul $A(-1,-1)$ și formează ✓ ? cu dreapta de ecuație $x + 2y + 5 = 0$ un unghi de $45°$.

A $3x - y + 2 = 0$;
C $x + 3y + 4 = 0$;
B $x - 3y - 2 = 0$;
D $3x + y + 4 = 0$.

510. Un paralelogram $ABCD$ are centrul în punctul $M(2,3)$, iar ecuațiile a două dintre ✓ ? laturile sale sunt $AB : y = 2x$, respectiv $AD : y = 3x - 1$. Care dintre următoarele afirmații nu sunt adevărate?

A Punctul $N(4,7)$ este mijlocul segmentului $[BC]$;
B Punctul $P(1,0)$ este mijlocul segmentului $[CD]$;
C Diagonala BD are ecuația $x + y - 5 = 0$;
D Diagonala AC are ecuația $x - y + 1 = 0$.

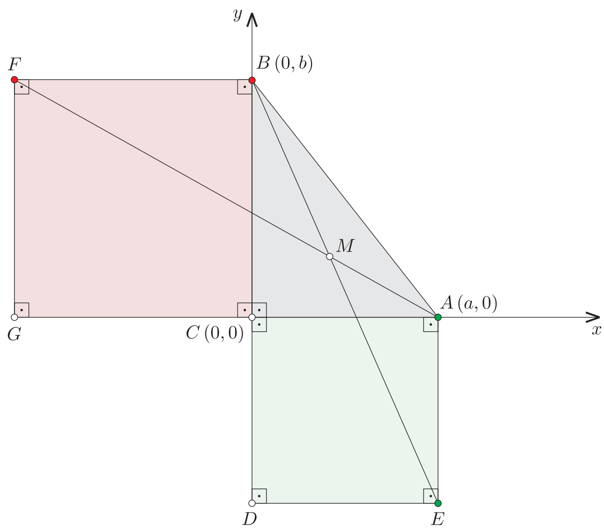
511. În reperul cartezian xOy se dau dreptele de ecuaţii $x + 2y - 3 = 0$, $2x - 3y + 1 = 0$. ✓ ? Dreapta care trece prin punctul comun al dreptelor date şi prin originea sistemului de coordonate are ecuaţia:

A $y = -2x$; B $y = -x$; C $y = x$; D $y = 2x$.

512. Considerăm ecuaţiile dreptelor $d_1 : x = 1$ şi $d_2 : y = 1$ într-un plan cu un sistem de coordonate carteziene cu originea în O. Oricare ar fi A, B, C puncte în plan astfel încât O, A, B, C sunt vârfurile unui pătrat având una dintre diagonale $[AB]$ cu $A \in d_1$ şi $B \in d_2$, avem: ✓ ?

- A $C \in d$, unde $d : x - y = 0$;
- B Distanţa dintre A şi B este cel puţin egală cu $\sqrt{2}$;
- C $C \in d$, unde $d : x + y = 2$;
- D Aria pătratului determinat de O, A, B, C este cel puţin egală cu 1.

513. Vârfurile unui triunghi dreptunghic ABC_Δ sunt date de punctele $A(a, 0)$, $B(0, b)$ şi $C(0, 0)$, unde $a, b > 0$ şi $a \neq b$. Desenând pătrate pe catete, obţinem figura ataşată. Alegeţi fiecare afirmaţie corectă: ✓ ?



- A Înălţimea din vârful C al triunghiului ABC_Δ are ecuaţia $ax - by = 0$;
- B Segmentele AF şi BE se intersectează în punctul $M\left(\dfrac{ab^2}{a^2+ab+b^2}, \dfrac{a^2b}{a^2+ab+b^2}\right)$;
- C Înălţimea din vârful C al triunghiului ABC_Δ trece prin intersecţia segmentelor AF şi BE;
- D Aria triunghiului AMC_Δ este $\mathcal{A} = \dfrac{a^2b^2}{2(a^2+ab+b^2)}$.

514. Fie dreapta d_1 de ecuație $x + y - 4 = 0$. Dreapta d este mediatoarea segmentului format de intersecțiile dreptei d_1 cu axele Ox și Oy. Considerăm punctul A, un punct variabil pe dreapta d, și punctul B proiecția sa pe dreapta de ecuație $y = 3x$. În acest caz, mijlocul segmentului AB aparține dreptei de ecuație: ✓ ?

A $y = \frac{2}{3}x$; B $y = \frac{11}{7}x$; C $y - \frac{2}{3}x = 0$. D $x - \frac{7}{11}y = 0$;

515. Fie sistemul de inecuații $\begin{cases} -7x + 3y \leq -2 \\ x + 2y \leq 10 \\ -5x + 7y \geq -16 \end{cases}$. Aria mulțimii punctelor din plan a căror coordonate verifică sistemul este: ✓ ?

A 13; B 9; C 17; D 15.

516. Fie dreapta d_1 de ecuație $y = 5x - 2$ și d dreapta mediatoare a segmentului format de intersecțiile dreptei d_1 cu axele Ox și Oy, intersecția acestora notându-se cu M. Știind că dreapta d se intersectează cu dreapta de ecuație $y = \frac{5}{2}x - 4$ în punctul A și dreapta d_1 se intersectează cu aceeași dreaptă în punctul B', care este aria triunghiului MAB'? ✓ ?

A $\frac{3075}{189}$; B $\frac{2075}{189}$; C 2075; D 2200.

517. Se consideră dreapta $d : 4x + \sqrt{3}y + 5\sqrt{2} = 0$. Numim puncte `super` acele puncte de pe dreapta d a căror distanță până la origine este un număr natural. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A nu există puncte `super` în cadranul III;

B există 2 puncte `super` în cadranul III;

C există 3 puncte `super` în cadranul III;

D există 5 puncte `super` în cadranul III.

518. Fie P mulțimea tuturor punctelor din plan. Pentru o dreaptă oarecare de ecuație $d : ax + by + c = 0, a > 0$, definim funcția ✓ ?

$$f_d : P \to \{-1, 0, 1\}, f_d(M(x, y)) = \begin{cases} -1 & \text{, dacă } ax + by + c < 0 \\ 0 & \text{, dacă } ax + by + c = 0 \\ 1 & \text{, dacă } ax + by + c > 0 \end{cases}$$

Fie punctele $A(1, 3), B(2, 4), C(3, -1)$. Care dintre următoarele afirmații sunt corecte?

A $f_{AB}(G)f_{BC}(G)f_{CA}(G) > 0$, unde G este centrul de greutate al ΔABC;

B $f_{AB}(C) + f_{BC}(A) = 0$;

C $f_{AB}(X) = 0$, $\forall X \in P$ cu proprietatea că $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât $X((1 - \alpha)x_a + \alpha x_b, (1 - \alpha)y_a + \alpha y_b)$;

D $M(x_M, y_M) \in \text{int}ABC \iff f_{AB}(M)f_{AC}(M)f_{BC}(M) < 0$.

519. Ecuația locului geometric al punctelor din plan egal depărtate de punctul $O(0, 0)$ și de dreapta $d : x = 1$ este: ✓ ?

A $x = \dfrac{y^2-1}{2}$; B $y = x^2 - 1$; C $x = \dfrac{y^2-1}{-2}$; D $y = \dfrac{x^2+1}{2}$.

520. Ecuația $x^2 + 4xy - 5y^2 = 0$ reprezintă: ✓ ?

A originea planului $O(0,0)$;

B reuniunea a două drepte paralele;

C reuniunea a două drepte concurente în $O(0,0)$;

D ecuația unei drepte.

521. Fie punctele $A(3,4)$ și $B(-1,7)$. Locul geometric al punctelor M din plan, ce satisfac ecuația $MA^2 - MB^2 = 4$ este: ✓ ?

A punctul de coordonate $\left(0, \dfrac{29}{6}\right)$;

B o dreaptă paralelă cu dreapta AB;

C un cerc;

D o dreaptă perpendiculară pe dreapta AB.

Paralelism. Perpendicularitate

522. Într-un reper cartezian ortonormat se dau punctele $A(6,0)$, $B(0,4)$ și $C(1,5)$. Dreapta AC intersectează axa Oy în punctul E, iar dreapta BC intersectează axa Ox în punctul F. Fie M, N şi P mijloacele segmentelor AB, OC şi respectiv EF. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate? ✓ ?

A $AC \perp BC$;

B $P(3,-2)$;

C $MN : x + 5y - 13 = 0$;

D M, N, P sunt coliniare.

523. Se dă dreapta de ecuaţie $d : y = \dfrac{4}{3}x + 1$. Care dintre următoarele drepte d' este paralelă cu dreapta dată şi se află la distanţa 3 de aceasta? ✓ ?

A $d' : 3y = 4x + 18$;

B $d' : 3y = 4x + 12$;

C $d' : 3y = 4x - 12$;

D $d' : 3y = 4x - 18$.

524. Se dă un tringhi ABC cu vârfurile $A(1,0)$, $C(3,-2)$ şi $G(2,1)$ centrul de greutate al triunghiului. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate? ✓ ?

A $B(2,5)$;

B Aria triunghiului ABC este egală cu 12;

C Distanţa de la punctul B la latura AC este $3\sqrt{2}$;

D Mediana din vârful B este perpendiculară pe axa Ox.

525. Fie dreptele d_1 şi d_2 de ecuaţii: $x - 3y + 1 = 0$ şi $3x + y + 2 = 0$, a un număr real şi P punctul de coordonate $(0, a)$. Punctul P este egal depărtat de dreptele d_1 şi d_2, dacă a ia valoarea: ✓ ?

A $-\frac{1}{4}$; B 0; C $\frac{1}{4}$; D $\frac{3}{2}$.

526. Considerăm ecuaţia dreptei $d : x - y = 1$ şi punctele $A(-1, 0)$ şi $B(1, 2)$. Oricare ar fi $M \in d$, notăm cu s_M suma lungimilor segmentelor $[AM]$ şi $[BM]$. Atunci: ✓ ?

A $\forall M \in d : s_M \geq \sqrt{2} + 2$;
C $\forall M \in d : s_M \geq \sqrt{2} + \sqrt{10}$;
B $\forall M \in d : s_M \leq \sqrt{2} + 4$;
D $\exists M \in d$ astfel încât $s_M = \sqrt{2} + 2$.

527. Fie $A(1, a)$, $B(b, 1)$, $C(-1, c)$ și $D(d, -1)$ puncte într-un sistem de coordonate cartezian astfel încât $a, d \in (0, 1)$ și $b, c \in (-1, 0)$. Dacă S este aria patrulaterului $ABCD$, atunci: ✓ ?

A $S \in [2, 4)$; B $S \in (2, 4)$; C $S \in (4, 3\sqrt{2}]$; D $S \in (4, 3\sqrt{2})$.

528. Se consideră triunghiul ABC şi M, N, P mijloacele laturilor sale $[BC]$, $[CA]$ respectiv $[AB]$. Faţă de un reper cartezian ortonormat al planului său, vârfurile triunghiului ABC au coordonatele $A(-4, 1), B(-7, 4)$, $C(0, 5)$. ✓ ?

A Triunghiul ABC este dreptunghic şi $m(\widehat{A}) = 90°$;
B Triunghiul ABC şi triunghiul MNP au acelaşi centru de greutat;
C Triunghiul ABC şi triunghiul MNP au acelaşi ortocentru;
D Centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor ABC şi MNP coincid.

529. Se consideră triunghiul ABC şi D, E, F mijloacele laturilor sale $[BC]$, $[CA]$ respectiv $[AB]$. Faţă de un reper cartezian ortonormat al planului său, vârfurile triunghiului ABC au coordonatele $A(-2, -1), B(2, 3), C(4, 0)$. ✓ ?

A $|AB|^2 = |CA|^2 + |CB|^2$ sau $|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2$ sau $|CA|^2 = |BA|^2 + |BC|^2$;
B Aria triunghiului DEF este jumătate din produsul lungimilor a două dintre laturile sale;
C $|EF| \cdot \text{dist}(A, BC) = |FD| \cdot \text{dist}(B, CA) = |DE| \cdot \text{dist}(C, AB) = 10$;
D $\mathcal{A}_{\Delta AFE} = \mathcal{A}_{\Delta FBD} = \mathcal{A}_{\Delta EDC} = \mathcal{A}_{\Delta DEF} = \frac{5}{2}$.

530. Relativ la un reper cartezian ortonormat al planului, se consideră punctele $A(7, 5)$, $B(9, 1)$. Mediatoarea segmentului $[AB]$ este $d : x - 2y = 2$. Notăm cu $\mathcal{C}$ mulţimea tuturor cercurilor având centrul pe dreapta d, şi care trec prin A şi B. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate? ✓ ?

A Există în $\mathcal{C}$ un cerc cu aria interioară egală cu π.
B Există în $\mathcal{C}$ un cerc cu aria interioară egală cu 17.
C Există în $\mathcal{C}$ un cerc care intersectează fiecare axă de coordonate în exact un punct.
D Pentru punctul $D(3, 3)$, cercul circumscris triunghiului ABD se află în $\mathcal{C}$.

531. Perpendiculara din origine pe dreapta d intersectează această dreaptă în punctul $P(3, 6)$. Ecuația dreptei d este: ✓ ?

A $3x+4y-7=0$; B $2x-y+7=0$; C $2x+4y-3=0$; D $x+2y-15=0$.

532. Ecuația $12x^2-12y^2-10xy-x+34y-20=0$ reprezintă: ✓ ?

A un punct din plan;

B reuniunea a două drepte perpendiculare;

C reuniunea a două drepte paralele;

D o dreaptă.

Concurența dreptelor

533. Specificaţi care dintre următoarele condiţii implică faptul că dreptele: $d_1: ax+by+c=0$, $d_2: bx+cy+a=0$ şi $d_3: cx+ay+b=0$ sunt concurente, a,b,c fiind numere reale nenule şi distincte două câte două: ✓ ?

A $a+b+c=0$;

B $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$;

C $a^3+b^3+c^3=3abc$;

D $a^2+b^2+c^2=2(ab+bc+ca)$.

534. Fie dreptele $d_1: 2x-3y+1=0$, $d_2: -x-4y+5=0$ și $d_3: 7x-6y+\alpha=0, \alpha\in\mathbb{R}$. Pentru ce valoare a lui α cele trei drepte sunt concurente? ✓ ?

A 1; B 3; C -1; D altă variantă.

4

Trigonometrie

Aplicații geometrice

535. Dacă r și R sunt razele cercului înscris, respectiv cercului circumscris, unui triunghi care are lungimile laturilor 3, 4 și 5, atunci: ✓ ?

$\boxed{\text{A}}$ $2R = 5r$; $\boxed{\text{B}}$ $2Rr = 5$; $\boxed{\text{C}}$ $R + r = Rr$; $\boxed{\text{D}}$ $r < R < 2r$.

536. Dacă x este lungimea laturii unui pătrat care are vârfurile pe laturile unui triunghi cu lungimile 3, 4 și 5. Să se indice care dintre următoarele afirmații sunt adevărate. ✓ ?

$\boxed{\text{A}}$ $x \in \left\{\frac{50}{27}, \frac{35}{16}, \frac{60}{37}\right\}$; $\boxed{\text{C}}$ $x \in \left\{\frac{12}{7}, 2, \frac{60}{37}\right\}$;

$\boxed{\text{B}}$ $x \in \left\{\frac{13}{7}, 2, \frac{15}{7}\right\}$; $\boxed{\text{D}}$ $x \in \left\{\frac{12}{7}, \frac{60}{37}\right\}$.

537. Fie ABC un triunghi nedegenerat astfel încât lungimea segmentului $[BC]$ este $\sqrt{3}$, măsura unghiului $\widehat{B}$ este $60°$ şi lungimea razei cercului circumscris $\triangle ABC$ este 1. Care dintre următoarele variante de răspuns sunt adevărate? ✓ ?

$\boxed{\text{A}}$ aria $\triangle ABC$ este $\frac{3\sqrt{3}}{2}$;

$\boxed{\text{B}}$ perimetrul $\triangle ABC$ este $3\sqrt{3}$;

$\boxed{\text{C}}$ $\triangle ABC$ este echilateral;

$\boxed{\text{D}}$ lungimea razei cercului înscris $\triangle ABC$ este $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

538. Fie triunghiul ABC, ale cărui laturi au lungimile $BC = 6$, $CA = 10$, $AB = 8$. Fie I centrul cercului înscris în triunghiul ABC şi fie r raza cercului înscris. Să se indice care dintre următoarele afirmații sunt adevărate. ✓ ?

A Triunghiul este ascuţitunghic;

B Lungimea înălţimii din A este 4;

C $\mathcal{A}[\Delta BIC] = 6$;

D $\dfrac{\mathcal{A}[\Delta AIB]}{\mathcal{A}[\Delta AIC]} = \dfrac{3}{5}$.

539. Ştiind că unghiurile triunghiului ΔABC formează în ordinea alfabetică o progresie aritmetică cu raţia $r \in \left(0, \dfrac{\pi}{3}\right)$ fixată arbitrar, ce este valoarea expresiei trigonometrice ✓ ?

$$\frac{a}{c} \cdot \sin(2\gamma) + \frac{c}{a} \cdot \sin(2\alpha),$$

unde $a > 0$ şi $c > 0$ denotă lungimea laturii opuse ungiurilor $\alpha = \widehat{BAC} = \dfrac{\pi}{3} - r$, respectiv $\gamma = \widehat{ACB}$?

A $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

B $\dfrac{1}{2}$;

C $\dfrac{2\sqrt{3}}{2}$;

D $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

540. În triunghiul MNP avem $m(\hat{M}) = \dfrac{\pi}{3}$ și $\sin N + \cos N = \sin P + \cos P$. Atunci, triunghiul MNP este: ✓ ?

A dreptunghic;

B echilateral;

C dreptunghic isoscel;

D nu există un astfel de triunghi.

541. Se consideră punctul $P\left(\dfrac{1}{5}, \dfrac{2\sqrt{6}}{5}\right)$. Știind că punctul P' este simetricul său față de dreapta $y = 3x + 1$, care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A $P \in$ află pe cercul trigonometric;

B P' nu se află pe cercul trigonometric;

C P nu se află pe cercul trigonometric;

D $x_{P'} < 2$.

542. Punctul $M\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ situat pe cercul trigonometric se rotește în sens orar în jurul originii cu $90°$. Fie $x_{M'}$ și $y_{M'}$ coordonatele sale după exact o rotire. Valoarea expresiei $x_{M'} \cdot y_{M'}$ este: ✓ ?

A $-\dfrac{\sqrt{3}}{4}$;

B $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$;

C $-\dfrac{1}{4}$;

D $\dfrac{1}{4}$.

543. Fie triunghiul ABC cu laturile a, b, c. Știind că unghiurile A, B, C sunt în progresie aritmetică, $a+b+c = 3\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{6}$ și $\sin A+\sin B+\sin C = \dfrac{1}{4}(a+b+c)$, valoarea lui $\cos C$ este: ✓ ?

A 1; B $\frac{\sqrt{3}}{2}$; C $\frac{\sqrt{2}}{2}$; D $\frac{1}{2}$.

544. Fie triunghiul ABC cu $\operatorname{tg} A = 3$ și $\operatorname{tg} B = 2$. Atunci $\sin C$ este egal cu: ✓ ?

A 1; B $\frac{\sqrt{2}}{2}$; C 0; D $\frac{1}{2}$.

545. Fie triunghiul ABC în care are loc relația $\sin A \sin B = \cos^2 \frac{C}{2}$. Fie a, b, c lungimile laturilor triunghiului. Să se indice care dintre următoarele afirmații sunt adevărate. ✓ ?

A $a = b$; B $a^2 + b^2 = c^2$; C $a = b = c$; D $2c = a + b$.

546. Fie un șir de triunghiuri $(\triangle A_n B_n C_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Știind că $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{r_n}{R_n} = \frac{1}{2^n}$, unde r_n și R_n sunt raza cercului înscris, respectiv circumscris triunghiului $A_nB_nC_n$, care dintre următoarele afirmații sunt corecte: ✓ ?

A $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n \sin\frac{A_n}{2} \sin\frac{B_n}{2} \sin\frac{C_n}{2} = \infty$;

B $\lim\limits_{n\to\infty} \sin\frac{A_n}{2} \sin\frac{B_n}{2} \sin\frac{C_n}{2} = 1$;

C $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n \sin\frac{A_n}{2} \sin\frac{B_n}{2} \sin\frac{C_n}{2} \in \mathbb{Q}$;

D $\lim\limits_{n\to\infty} \sin\frac{A_n}{2} \sin\frac{B_n}{2} \sin\frac{C_n}{2} = 0$.

547. Fie triunghiul $\triangle ABC$ cu laturile a, b, c. Dacă $a^2 + b^2 = xc^2$, atunci mulțimea valorilor lui x este: ✓ ?

A $[1, \infty)$; B $\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$; C $\{1\}$; D $(0, \infty)$.

548. Dacă în triunghiul ABC are loc relația $\frac{\sin A + \sin C}{\sin B} = \operatorname{ctg}\frac{B}{2}$, atunci: ✓ ?

A $\triangle ABC$ isoscel;

B $\triangle ABC$ dreptunghic în A sau C;

C $\triangle ABC$ dreptunghic în B;

D niciuna dintre variantele anterioare.

549. În triunghiul ABC are loc relația $a\cos B + b\cos C + c\cos A = p$, unde a, b, c sunt lungimile laturilor triunghiului, A, B, C sunt unghiurile, iar p este semiperimetrul. Triunghiul ABC este: ✓ ?

A degenerat; B dreptunghic; C oarecare; D isoscel.

550. Fie triunghiul ABC în care $\sin^2 A + \sin^2 B = \sin^2 C$. Care dintre următoarele afimații sunt adevărate? ✓ ?

A Triunghiul ABC este isoscel;

B Triunghiul ABC este obtuzunghic;

C Triunghiul ABC este dreptunghic;

D Triunghiul ABC este echilateral.

Calcul de arii și puncte

551. În triunghiul ABC considerăm M, N, P mijloacele laturilor BC, AC, respectiv AB. Fie Q centrul de greutate al triunghiului MNP și K mijlocul segmentului MP. Să se indice care dintre următoarele variante de răspuns sunt adevărate. ✓ ?

A punctele B, K, Q sunt coliniare;

B $\mathcal{A}[PMCN] = \dfrac{\mathcal{A}[\Delta ABC]}{2}$;

C $\dfrac{\mathcal{A}[\Delta PMN]}{\mathcal{A}[\Delta ABC]} = \dfrac{1}{3}$;

D $\dfrac{KQ}{BN} = \dfrac{1}{4}$;

552. Notăm cu H ortocentrul triunghiului ABC și cu D piciorul înălțimii duse din vârful A pe latura BC. Care dintre următoarele afirmații nu sunt adevărate? ✓ ?

A D este ortocentrul triunghiului BHC;

B C este ortocentrul triunghiului BDA;

C A este ortocentrul triunghiului BHC;

D dacă $D = C$, atunci punctele A, H și B sunt coliniare.

553. Pe un cerc de centru O și rază $R > 0$ se iau 12 puncte echidistante $A_1, A_2, ..., A_{12}$, în această ordine. Să se indice care dintre următoarele variante de răspuns sunt adevărate. ✓ ?

A $\mathcal{A}[A_9A_8A_{12}A_{11}] = \dfrac{R^2}{2}$;

B $d(A_1, A_6A_7) = R \cdot \dfrac{4+\sqrt{2}}{2}$;

C $\mathcal{A}[A_9A_8A_{12}A_{11}] = \dfrac{R^2(\sqrt{3}-1)}{2}$;

D $d(A_1, A_6A_7) = R \cdot \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$.

554. Fie triunghiul ABC cu lungimile laturilor a, b, c. Știind că produsul bc este constant, în care dintre următoarele cazuri ABC are aria maximă? ✓ ?

A ABC isoscel;

B ABC echilateral;

C ABC dreptunghic;

D ABC degenerat.

555. Fie triunghiul ABC dreptunghic în A. Dacă $BC = 6$ și $\operatorname{tg} C = \dfrac{1}{2}$, atunci aria lui ABC este: ✓ ?

A 7;

B $\dfrac{36}{5}$;

C 6;

D $\dfrac{34}{5}$.

556. Fie triunghiul ascuțitunghic ABC și fie H ortocentrul triunghiului. Știind că $BC = 6$ și $\cos A = \dfrac{4}{5}$, lungimea lui AH este: ✓ ?

A 7; B $\dfrac{9}{2}$; C 4; D 8.

557. Fie triunghiul ABC înscris într-un cerc de rază $R = 2$. Știind că $m(\hat{A}) = \dfrac{5\pi}{12}$ și $m(\hat{B}) = \dfrac{\pi}{4}$, aria triunghiului ABC este: ✓ ?

A $\sqrt{3}+\sqrt{2}$; B $3+\sqrt{3}$; C $1+\sqrt{5}$; D 6.

Formule și ecuații trigonometrice

558. Fie ecuația $\cos 2t = \sin t$ dată pe intervalul $[0, 2\pi]$. Să se indice care dintre următoarele afirmații sunt adevărate. ✓ ?

A Ecuația nu are nici o soluție;

B Ecuația are două soluții;

C Ecuația are trei soluții;

D Ecuația are patru soluții;

559. Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2\cos^4 x + 11\sin^2 x - 6$. Valoarea minimă a funcției este: ✓ ?

A $\dfrac{80}{8}$ B $\dfrac{81}{8}$ C $-\dfrac{81}{8}$ D $-\dfrac{80}{8}$

560. Fie $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ și $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^*$ astfel încât $\log_{\sin^{2e} x} \cos x + \log_{\cos^{2e} x} \sin x = \dfrac{5}{4e} \Rightarrow \sin^\alpha x = \cos^\beta x$. Să se indice care dintre următoarele variante reprezintă perechile (α, β), pentru orice x soluție a ecuației. ✓ ?

A $(2, 1)$; B $(1, 2)$; C $(1, 3)$; D $(0, 0)$.

561. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate pentru orice $x \in \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$? ✓ ?

A $\sin 2x < 0$;

B $2\sin x \leq \sin x + \cos x$;

C $\sin 2x - 2\sin x \leq 0$;

D $\sin 2x + 2\sin x \leq 0$.

562. Numărul de soluții pentru care $\operatorname{tg} x = \sin x$, pentru $x \in [0, 2\pi]$ este: ✓ ?

A 0; B 1; C 2; D 3.

563. Dacă $\sin A + \sin^2 A = \dfrac{3}{2}$ şi ✓ ?

$$a \cdot \cos^8 A + b \cdot \cos^6 A + c \cdot \cos^4 A + d \cdot \cos^2 A + e = 0,$$

atunci care dintre următoarele afirmații pot fi adevărate?

A $\dfrac{b}{a}+\dfrac{d}{c}-8e=-\dfrac{21}{8}$;

B $\dfrac{b}{a}+\dfrac{d}{c}-8e=-\dfrac{17}{10}$;

C $\dfrac{a+b+2c}{16e-4d}=\dfrac{10}{21}$;

D $\dfrac{a+b+2c}{16e-4d}=\dfrac{3}{20}$.

564. Fie numerele $x, y \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, astfel încât $(\sin x + 3\cos y)^2 + (\cos x - 3\sin y)^2 = 10$. ✓ ?
Stabiliți care dintre următoarele afirmații pot fi adevărate.

A $x = 2y$;

B $\sin(x-2y) = 0$;

C $\sin(x-y) = 0$;

D $x = y$.

565. Pe intervalul $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, ecuația $\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \sin 7x = 0$ are: ✓ ?

A 0 soluții; B o soluție; C 2 soluții; D 3 soluții.

566. Considerăm ecuația $-\sin 4x - \sin 2x = \cos^2 x + \sin^2 3x$. Stabiliți care dintre următoarele afirmații sunt adevărate. ✓ ?

A $-\dfrac{\pi}{4}$ este o soluție a ecuației;

B Nu există soluții în intervalul $\left[\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{2}\right]$;

C Soluțiile ecuației verifică $\cos 8x = 1$;

D În intervalul $[0, 2\pi]$ există 6 soluții ale ecuației.

567. Fie x, y astfel încât $\cos^7 x + \sin^{14} x = 1$. Atunci expresia $\sin x + \cos x$ ia toate valorile din mulțimea: ✓ ?

A $\{0\}$;

B $\left\{-1, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}, 1\right\}$;

C $\left\{-1, -\dfrac{1}{2}, 0, \dfrac{1}{2}, 1\right\}$;

D $\{-1, 1\}$.

568. Fie $x \in \left(\dfrac{83\pi}{10}, \dfrac{42\pi}{5}\right)$ cu proprietatea că $\sin 5x = -\dfrac{15}{17}$, care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A $\cos 5x = \dfrac{8}{17}$;

B $\cos 5x \in \left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}\right)$;

C $\operatorname{tg} x < 0$;

D $\cos 10x = -\dfrac{161}{289}$.

569. Fie $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ astfel încât $\sin x < \cos x$. Dacă se cunoaște $\sin 2x = m$, care dintre următoarele variante de răspuns sunt adevărate? ✓ ?

A $\cos x = \sqrt{\dfrac{2-m^2}{2}}$;

B $\operatorname{tg} x = \dfrac{1+\sqrt{1-m^2}}{m}$;

C $\sin x = \dfrac{1+\sqrt{1-m^2}}{2m}$;

D $\sin^2 x = \dfrac{1-\sqrt{1-m^2}}{2}$.

570. Fie x o soluție a ecuației $3\cos^2 2x - 4\cos 2x = 0$. Care dintre următoarele afirmații au loc? ✓ ?

A $|\sin x| = |\cos x|$;

B $\dfrac{x}{\pi} \in \mathbb{Z}$;

C $x \in \left\{ \dfrac{(2k+1)\pi}{4} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}$;

D $|\sin x| < \dfrac{1}{2}$.

571. Fie ecuația $\sin x - \cos x + \sqrt{3}(\sin x + \cos x) = 1 + \sqrt{3}$ și α o soluție a acesteia. Atunci $\sin\alpha$ poate lua valoarea: ✓ ?

A $\dfrac{1}{2}$;

B -1;

C $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

D 1.

572. Care din următoarele mulțimi conțin soluții ale ecuației $\sin^2(2x) + \sin^2(3x) = \sin^2 x + \sin^2(4x)$? ✓ ?

A $\left\{ \dfrac{(3k+2)\pi}{5} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}$;

B $\left\{ \dfrac{(4k+1)\pi}{10} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}$;

C $\{ k\pi \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$;

D $\left\{ \dfrac{k\pi}{2} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

573. Soluțiile ecuației $(1 - \cos 2x) \cdot \mathrm{ctg}x = 5\sin x - 2\mathrm{tg}x$ care se află în intervalul $[0, 10\pi]$ au suma: ✓ ?

A 55π;

B $55\pi + \dfrac{\pi}{3}$;

C $105\pi - \dfrac{\pi}{3}$;

D 105π.

574. Dacă $x, y \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ astfel încât $\sin(x+y) \leq \sqrt{\sin 2x \sin 2y}$, atunci care dintre următoarele afirmații pot fi adevărate? ✓ ?

A $x = y$;

B $x - y = \dfrac{\pi}{4}$;

C $x = 2y$ sau $y = 2x$;

D $\sin x + \sin y > \sqrt{3}$.

575. Numărul soluțiilor ecuației $\sin x \cdot \sin 5x + \cos 6x = \mathrm{ctg}x$, care se găsesc în intervalul $[-2\pi, 2\pi]$ este: ✓ ?

A 4;

B 15;

C 24;

D 9.

576. Pentru $a, b \notin \left\{ k\pi + \dfrac{\pi}{2} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \{ k\pi \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$, expresia $E(a,b) = 4 \cdot \dfrac{\sin(a+b) \cdot \cos(a-b)}{\sin 2a \cdot \sin 2b}$ este egală cu: ✓ ?

A $\mathrm{tg}a - \mathrm{tg}b + \mathrm{ctg}a - \mathrm{ctg}b$;

B $\mathrm{tg}a + \mathrm{tg}b + \mathrm{ctg}a + \mathrm{ctg}b$;

C $-\mathrm{tg}a + \mathrm{tg}b - \mathrm{ctg}a + \mathrm{ctg}b$;

D $\mathrm{tg}a + \mathrm{tg}b - \mathrm{ctg}a - \mathrm{ctg}b$;

577. Dacă $\sin a$ și $\cos 3b$ sunt soluțiile ecuației $2x^2 - (2+\sqrt{3})x + \sqrt{3} = 0$, atunci pot avea loc următoarele: ✓ ?

A $a = b$;

B $a \in \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}$;

C $b \in \left\{ \frac{\pi}{3} + k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}$;

D $a = 3b$.

578. Soluțiile ecuației $\mathrm{tg}x \cdot (1 + \mathrm{tg}x) = 10 - 8 \cdot \mathrm{ctg}x$ aparțin următoarelor mulțimi: ✓ ?

A $\{\frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$;

B $\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$;

C $\{-\mathrm{arctg}4 + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$;

D $\{\mathrm{arctg}2 + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

579. Se consideră inecuația $\sin 4x < \frac{\sqrt{3}}{2}$. Să se indice care dintre afirmaţiile următoare sunt adevărate. ✓ ?

A $\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}$, unde $k \in \mathbb{Z}$;

B $\frac{k\pi}{2} - \frac{7\pi}{24} < x < \frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{2}$, unde $k \in \mathbb{Z}$;

C x poate lua valoarea 1;

D x poate lua valoarea $\frac{3\pi}{8}$.

580. Care dintre următoarele egalități sunt adevărate? ✓ ?

A $\mathrm{tg}\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

B $\arcsin(\sin 7) = 2\pi - 7$;

C $\mathrm{tg}\left(2\mathrm{arctg}\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{3}$;

D $\arccos(\sin 4) = 4 - \pi$.

581. Valoarea expresiei $\sin\left(2\arcsin\frac{3}{5}\right)$ este: ✓ ?

A $\frac{24}{25}$; B $\frac{4}{5}$; C $2\frac{3}{5}$; D $-\frac{4}{25}$.

582. Dacă $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, atunci care dintre următoarele egalități sunt adevărate? ✓ ?

A $\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1-\sin x} = \sin\frac{x}{2}$;

B $\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1-\sin x} = 2\sin\frac{x}{2}$;

C $\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1-\sin x} = \cos\frac{x}{2}$;

D $\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1-\sin x} = 2\cos\frac{x}{2}$.

583. Valoarea minimă a expresiei $\frac{12 + 48x^2\sin^2 x}{x \cdot \sin x}$, pentru $0 < x < \pi$ este mai mică decât: ✓ ?

A 48; B 12; C 64; D 72.

Problemele **584.** și **585.** se referă la expresia $r\sin x + t\cos x,\ x, r, t \in \mathbb{R}$.

584. Care este valoarea maximă a expresiei? ✓ ?

A 1; B $\sqrt{rt}$; C $2\sqrt{r^4+t^4}$; D $\sqrt{r^2+t^2}$.

585. Pentru $x = \dfrac{\pi}{3}$, în care caz se obține valoarea maximă a expresiei? ✓ ?

A $r = \sqrt{3}t$; B $rt = 1$; C $r = t + 1$; D $r = \dfrac{\sqrt{3}}{3}t$.

586. Fie expresia $S = 16\cos 6^\circ \cdot \cos 42^\circ \cdot \cos 66^\circ \cdot \cos 78^\circ$. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate? ✓ ?

A $S = -1$; B $S = 1$; C $S = 4$; D $S = 8$.

587. Știind că $\sin x + \cos y = 1$ și $\cos 2x - \cos 2y = 1$, care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A $x = (-1)^m \dfrac{\pi}{6} + m\pi, m \in \mathbb{Z}$;

B $x = (-1)^m \dfrac{\pi}{3} + m\pi, m \in \mathbb{Z}$;

C $y = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$;

D niciuna dintre afirmații nu este adevărată.

Reducere la primul cadran

588. Fie S = $\text{tg}\,(1^\circ) \cdot \text{tg}\,(2^\circ) \cdot \text{tg}\,(3^\circ) \cdot \ldots \cdot \text{tg}\,(89^\circ)$. S este egal cu: ✓ ?

A 0; B 1; C $\dfrac{1}{2}$; D $\dfrac{1}{4}$;

589. Care dinte următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A $\sin\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

B $\sin\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

C $\cos\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

D $\cos\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

590. Care dinte următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A $\sin(2) < 0$; B $\sin(2) > 0$; C $\sin(4) < 0$; D $\sin(6) < 0$.

591. Care dinte următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A $\sin\left(\frac{13\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$;

B $\sin\left(\frac{13\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

C $\sin\left(\frac{7\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

D $\sin\left(\frac{7\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$.

592. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A $\cos\left(\frac{11\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

B $\cos\left(\frac{11\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

C $\cos\left(\frac{5\pi}{2}\right) = 0$;

D $\cos\left(\frac{5\pi}{2}\right) = 1$.

593. Știind că $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ și $\sin x = \frac{2}{3}$, care dintre afirmațiile următoare sunt adevărate? ✓ ?

A $\sin(\pi - x) = \frac{2}{3}$;

B $\sin(\pi - x) = -\frac{2}{3}$;

C $\sin(\pi + x) = \frac{2}{3}$;

D $\sin(2\pi - x) = -\frac{2}{3}$.

594. Fie $x \in \left(0, \frac{2\pi}{3}\right)$. Atunci punctele A, B, C de pe cercul trigonometric, extremitățile arcelor de lungimi x, $x + \frac{\pi}{3}$, $x + \frac{2\pi}{3}$, sunt vârfurile unui triunghi: ✓ ?

A isoscel;

B echilateral;

C dreptunghic;

D nu se poate determina.

595. Pentru $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, se dă ecuația: $|\sin x + \cos x| = |\sin x| + |\cos x|$. Soluția ecuației este: ✓ ?

A $x \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right]$; B $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$; C $x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$; D $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

596. Știind că x aparține intervalului $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ și $\sin x = -\frac{3}{4}$, care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A $\sin(x - \pi) = \frac{3}{4}$;

B $\sin(x - \pi) = \frac{-3}{4}$;

C $\sin(2\pi - x) = \frac{3}{4}$;

D $\sin(2\pi + x) = \frac{3}{4}$.

597. Care dintre următoarele afirmații sunt corecte? ✓ ?

A $\cos(240^\circ) = -\dfrac{1}{2}$;

B $\cos(240^\circ) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

C $\cos(240^\circ) = \dfrac{1}{2}$;

D $\cos(240^\circ) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

598. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A $\sin\dfrac{11\pi}{7} > 0$; B $\sin\dfrac{2\pi}{9} > 0$; C $\sin\dfrac{5\pi}{8} > 0$; D $\sin\dfrac{5\pi}{8} < 0$.

599. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A $\cos(5) > 0$; B $\cos(5) < 0$; C $\cos(\sqrt{8}) > 0$; D $\cos(\sqrt{8}) < 0$.

600. Pentru $\sin x = \dfrac{3}{5}$, $x \in \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$, care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A $\sin 2x = -\dfrac{24}{25}$; B $\sin 2x = \dfrac{24}{25}$; C $\operatorname{tg} x = -\dfrac{3}{4}$; D $\operatorname{tg} x = \dfrac{3}{4}$.

601. Dacă $\cos x = -\dfrac{1}{5}$ și $x \in \left(\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right)$, atunci: ✓ ?

A $\sin x = \dfrac{\sqrt{24}}{5}$;

B $\sin x = -\dfrac{\sqrt{24}}{5}$;

C $\sin 2x = -\dfrac{2\sqrt{24}}{25}$;

D $\sin 2x = \dfrac{2\sqrt{24}}{25}$.

602. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A $\operatorname{tg}\dfrac{13\pi}{6} = \sqrt{3}$;

B $\operatorname{tg}\dfrac{13\pi}{6} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$;

C $\cos\dfrac{13\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

D $\cos\dfrac{13\pi}{6} = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

603. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A $\cos 169^\circ < 0$; B $\cos 169^\circ > 0$; C $\cos 220^\circ < 0$; D $\cos 324^\circ > 0$.

604. Care sunt funcțiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care satisfac proprietatea ✓ ?

$$2f(x) + 7f(\pi - x) = 8\sin x \ ?$$

A $f(x) = \dfrac{8}{9}\sin x$;

B $f(x) = \dfrac{4}{3}\sin x$;

C $f(x) = -\dfrac{8}{9}\sin x$;

D $f(x) = \dfrac{4}{3}\cos x$.

605. Care sunt funcțiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care satisfac proprietatea: ✓ ?

$$5f(x) + f(2\pi - x) = 8\cos x \ ?$$

A $f(x) = -\frac{2}{3}\cos x$;
B $f(x) = \frac{2}{3}\cos x$;
C $f(x) = -\frac{4}{3}\cos x$;
D $f(x) = \frac{4}{3}\cos x$.

606. Care sunt funcțiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care satisfac proprietatea: ✓ ?

$$f(2\pi + x) + 4f(2\pi - x) = 5\cos x\ ?$$

A $f(x) = \cos x$;
B $f(x) = \frac{1}{5}\cos x$;
C $f(x) = -\frac{1}{5}\cos x$;
D $f(x) = \frac{1}{15}\cos x$.

607. Fie $T > 0$ mai mic număr pentru care $\cos(3x) = \cos(3x + T), \forall x \in \mathbb{R}$. Atunci T este: ✓ ?

A $\frac{\pi}{3}$; B $\frac{2\pi}{3}$; C π; D 2π.

608. Se consideră expresia $E(x) = \cos x + \sin(2x)$. Atunci cel mai mic număr $T > 0$ pentru care $E(x) = E(x + T), \forall x \in \mathbb{R}$ este: ✓ ?

A $\frac{\pi}{2}$; B π; C 2π; D 4π.

Sume si produse trigonometrice

609. Fie a, b astfel încât $a = b + \frac{\pi}{2}$ și $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$. Care este rezultatul calculului ✓ ?

$$S = \sum_{k=0}^{n} \sin(a+k)\cos(b+k) - \sum_{k=0}^{n} \sin(b+k)\cos(a+k)\ ?$$

A 0; B $\frac{\pi}{2}$; C n; D $n+1$.

610. Dacă x_1 şi x_2 sunt soluțiile ecuației $\sin x + \cos x = \sqrt{\frac{3}{2}}$ în intervalul $[0, \pi]$ și se știe că $x_1 > x_2$, atunci valoarea raportului $\frac{x_1}{x_2}$ este: ✓ ?

A 5; B 2; C 6; D 4.

611. Dacă $S_n = \sin(x)\cos((n-1)x) + \sin(2x)\cos((n-2)x) + \cdots + \sin((n-1)x)\cos(x)$, atunci: ✓ ?

A $S_n = \frac{n-1}{2}\sin(nx)$;
B $S_n = \frac{n}{2}\sin(nx)$;
C $S_n = \frac{n-1}{2}\sin((n-1)x)$;
D $S_n = \frac{n-1}{4}\sin(nx)$.

612. Valoarea expresiei $\prod_{k=41}^{49} \operatorname{ctg}(k^\circ)$ este: ✓ ?

A 1; B 0; C $\frac{1}{2}$; D $\frac{1}{4}$.

613. Valoarea expresiei $16\sin(10^\circ)\sin(30^\circ)\sin(50^\circ)\sin(70^\circ)$ este: ✓ ?

A 1; B $\frac{1}{2}$; C $\frac{1}{4}$; D $\frac{1}{8}$.

614. Care este rezultatul produsului ✓ ?

$$\sin(-100^\circ)\cdot\sin(-99^\circ)\cdot\ldots\cdot\sin(99^\circ)\cdot\sin(100^\circ)\ ?$$

A 0; C -1;
B 1; D Nu este definit.

615. Care este rezultatul sumei ✓ ?

$$\operatorname{tg}(1^\circ)+\operatorname{tg}(2^\circ)+\operatorname{tg}(3^\circ)+\ldots+\operatorname{tg}(89^\circ)+\operatorname{tg}(91^\circ)+\ldots+\operatorname{tg}(179^\circ)\ ?$$

A 1; B 0; C $\frac{\sqrt{2}}{2}$; D $\frac{1}{8}$.

616. Fie $P=\operatorname{tg}(1^\circ)\cdot\operatorname{tg}(2^\circ)\cdot\operatorname{tg}(3^\circ)\cdot\ldots\cdot\operatorname{tg}(89^\circ)$. Valoarea lui P este: ✓ ?

A 1; B 0; C $\frac{\sqrt{2}}{2}$; D $\frac{1}{8}$.

617. Care este rezultatul sumei: ✓ ?

$$\sin^4\left(\frac{\pi}{8}\right)+\sin^4\left(\frac{3\pi}{8}\right)+\sin^4\left(\frac{5\pi}{8}\right)+\sin^4\left(\frac{7\pi}{8}\right)\ ?$$

A $\frac{3}{2}$; B $\frac{3}{4}$; C 0; D 3.

618. Care este rezultatul sumei ✓ ?

$$S=\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\ldots+\sin nx\ ?$$

A $S=\dfrac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$ B $S=\dfrac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin x}$

C $S = \dfrac{\sin\left(\dfrac{nx}{2}\right) \cdot \sin\left(\dfrac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)}$

D $S = \dfrac{\sin\left(\dfrac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{(n+1)x}{2}\right)}$

619. Valoarea expresiei $16\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 60^\circ \cos 80^\circ$ este: ✓ ?

A 1; B 0; C $\frac{1}{2}$; D 4.

620. Valoarea expresiei $S = \sin 1^\circ + \sin 2^\circ + \sin 3^\circ + \cdots + \sin 360^\circ$ este: ✓ ?

A 1; B 0; C $\frac{1}{2}$; D -1.

621. Valoarea expresiei $\dfrac{1}{\sin 10^\circ} - \dfrac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ}$ este: ✓ ?

A 2; B 4; C $\frac{1}{\sqrt{3}}$; D -4.

622. Expresia $\cos x + \sin x$ se poate simplifica în forma: ✓ ?

A $\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$;

B $\sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$;

C $\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$;

D $\sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

623. Care este valoarea expresiei ✓ ?

$$\sin^3\left(\frac{x}{3}\right) + 3\sin^3\left(\frac{x}{9}\right) + 3^2\sin^3\left(\frac{x}{27}\right) + \cdots + 3^{n-1}\sin^3\left(\frac{x}{3^n}\right) \ ?$$

A $\frac{1}{4}\left(3^n \sin\left(\frac{x}{3^n}\right) - \sin x\right)$;

B $\frac{1}{4}\left(3^n \sin\left(\frac{x}{3^{n-1}}\right) - \sin x\right)$;

C $\frac{1}{8}\left(3^n \sin\left(\frac{x}{3^n}\right) - \sin x\right)$;

D $\frac{1}{4}\left(3^(n-1) \sin\left(\frac{x}{3^n}\right) - \sin x\right)$.

624. Expresia $\cos x - \sqrt{3}\sin x$ se poate simplifica în forma: ✓ ?

A $2\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$; B $2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$; C $2\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$; D $2\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$.

625. Valoarea expresiei $\cos\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{4} \cdot \ldots \cdot \cos\left(\frac{x}{2^n}\right)$ este: ✓ ?

A $\dfrac{\sin x}{2^n \sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}$;

B $\dfrac{\cos x}{2^n \cos\left(\frac{x}{2^n}\right)}$;

C $\dfrac{\sin x}{2^{n-1} \sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}$;

D $\dfrac{\sin x}{2^n \sin\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right)}$.

626. Valoarea expresiei $\cos x \cdot \cos 2x \cdot \ldots \cdot \cos\left(2^{n-1}x\right)$ este: ✓ ?

A $\dfrac{\sin(2^n x)}{2^n \sin x}$; B $\dfrac{\sin(2^{n-1} x)}{2^n \sin x}$; C $\dfrac{\sin(2^n x)}{2^{n-1} \sin x}$; D $\dfrac{\sin(2^{n-1} x)}{2^{n-1} \sin x}$.

627. Numărul soluţiilor ecuaţiei trigonometrice ✓ ?

$$\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x \cdot \cos 8x = \frac{1}{16 \sin x}$$

din $[-2\pi, 2\pi]$ este:

A 8; B 12; C 16; D 32.

628. Fie ecuaţia $\cos^2 x + \cos^2 2x = 1$. Suma soluţiilor distincte ale ecuaţiei în $[0,\, \pi]$ este: ✓ ?

A $\dfrac{\pi}{2}$; B π; C $\dfrac{3\pi}{2}$; D 2π.

Partea

II

Teste

5

Admitere

Admitere nivel licență, sesiunea septembrie 2024

629. Dacă $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ✓ ?

$$f(x) = 3^{x+1} - 9^x,$$

atunci valoarea expresiei $f(\log_3 4)$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 4; $\boxed{\text{B}}$ -4; $\boxed{\text{C}}$ -11; $\boxed{\text{D}}$ -3.

630. În paralelogramul $ABCD$ avem $AB = 2$, $AD = 1$ și $\widehat{C} = 60°$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

$\boxed{\text{A}}$ $BC = 1$; $\boxed{\text{B}}$ $CD = 1$; $\boxed{\text{C}}$ $AC = \sqrt{3}$; $\boxed{\text{D}}$ $BD = \sqrt{3}$.

631. Valoarea limitei $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}\left(\sqrt{n+2^n} - \sqrt{n}\right)$ este: ✓ ?

$\boxed{\text{A}}$ 0; $\boxed{\text{B}}$ 2; $\boxed{\text{C}}$ 1; $\boxed{\text{D}}$ $+\infty$.

632. Fie A o mulțime cu n elemente. Dacă numărul submulțimilor lui A cu 2 elemente este 21, atunci: ✓ ?

$\boxed{\text{A}}$ $n \in (2, 6]$;

$\boxed{\text{B}}$ $n \in (6, 10]$;

$\boxed{\text{C}}$ $n \in (10, 14]$;

$\boxed{\text{D}}$ nu există astfel de valori ale lui n.

633. Fie S mulțimea soluțiilor reale ale ecuației ✓ ?

$$4^x - 2^x \cdot 3^{x+1} = 4 \cdot 9^x.$$

Care dintre următoarele afirmații sunt corecte?

$\boxed{\text{A}}$ S are exact două elemente;

$\boxed{\text{B}}$ S are exact un element;

$\boxed{\text{C}}$ $\dfrac{2}{1 - \log_2 3} \in S$;

$\boxed{\text{D}}$ $\dfrac{2}{1 + \log_2 3} \in S$.

634. În triunghiul ABC avem $E \in (AB)$, $EB = 3 \cdot EA$, $F \in (AC)$ și $FC = 2 \cdot FA$. Știind că punctele A, E și F au coordonatele $A(1,3)$, $E(3,6)$ și $F(4,18)$, coordonatele centrului de greutate G al triunghiului ABC sunt: ✓ ?

A $G\left(\frac{31}{6}, \frac{89}{6}\right)$; B $G\left(\frac{20}{3}, 22\right)$; C $G\left(\frac{61}{18}, \frac{73}{6}\right)$; D $G\left(\frac{50}{9}, 22\right)$.

635. Punctele $D(2,1)$, $E(-2,5)$ și $F(1,4)$ sunt mijloacele laturilor AB, BC respectiv AC în triunghiul ABC. Aria triunghiului ABC este: ✓ ?

A 2; B 4; C 8; D 16.

636. Valoarea integralei $\int_0^{\pi/3} \frac{\cos x}{1 + 4\sin^2 x} \, dx$ este: ✓ ?

A $\frac{\pi}{6}$; B $\frac{\pi}{3}$; C $\frac{\pi}{12}$; D $\frac{\pi}{2}$.

637. Se consideră numărul real a, funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = \frac{x^2 + ax + 1}{\sqrt{x^2 + 1}}$ și punctele $A(0,1)$ și $B(2,7)$. Valoarea lui a pentru care dreapta AB este tangentă la graficul lui f în punctul A este: ✓ ?

A 5; B 3; C 0; D -3.

638. În paralelogramul $ABCD$ avem $A(2,1)$, $B(4,3)$ și $C(7,2)$. Ecuația dreptei BD este: ✓ ?

A $x - y - 1 = 0$; B $x + 3y - 13 = 0$; C $x - 5y + 3 = 0$; D $3x + y = 15$.

639. Fie $\alpha \in (\pi, 2\pi)$ cu $\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{1}{2}$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A $\sin(\alpha) = -\frac{\sqrt{5}}{5}$;

B $\cos(\alpha) = \frac{-2\sqrt{5}}{5}$;

C $\sin(2\alpha) = -\frac{4}{5}$;

D $\cos(2\alpha) = \frac{3}{5}$.

640. Fie $ABCD$ un pătrat cu latura 1. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$;

B $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 1$;

C $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

D $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DB} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

641. Numerele întregi $b_1, b_2, \ldots, b_{10}$ sunt în progresie geometrică cu rația $q = 2$ și $S = b_1 + b_2 + \cdots + b_{10}$. Care dintre următoarele afirmații sunt corecte? ✓ ?

A S este divizibil cu 11;

B Dacă S este pătrat perfect, atunci b_1 este divizibil cu 31;

C Dacă b_1 este număr impar, atunci S este număr par;

D Dacă b_1 este număr impar, atunci S este număr impar.

642. Fie a un parametru real și considerăm sistemul de ecuații: ✓ ?

$$\begin{cases} x + 3y - z = 1 \\ -x - 2y + z = a \\ x + ay + 2z = -2 \end{cases}.$$

Care dintre următoarele afirmații sunt corecte?

A Există $a \in \mathbb{R}$ pentru care determinantul matricii sistemului este 0.

B Pentru orice $a \in \mathbb{R}$ sistemul admite soluție unică.

C Dacă $a = 1$, atunci $x + y + 2z = 1$.

D Pentru orice $a \in \mathbb{R}$ avem $x + y + 2z < 0$.

643. În grupul de permutări S_4 considerăm elementele ✓ ?

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{și} \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dacă $x \in S_4$ este o permutare astfel încât $x\sigma = \tau$, atunci

A x nu este unic determinat;

B x este unic determinat;

C $x^2 = \tau$;

D $x^2 = \sigma$.

644. Fie funcțiile $f, g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite prin $f(x) = |x|$ și $g(x) = x$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A Funcția $f + g$ este continuă pe $\mathbb{R}$.

B Funcția $f + g$ este strict monotonă pe $\mathbb{R}$.

C Funcția f este derivabilă pe $\mathbb{R}$.

D Funcția $f \cdot g$ este derivabilă în punctul 0.

645. Fie $a, b \in \mathbb{R}$ și fie $f \colon D \to \mathbb{R}$ funcția definită prin $f(x) = \dfrac{x}{ax^2 + bx + 8}$, unde $D \subseteq \mathbb{R}$ este domeniul maxim de definiție al lui f. Dacă $x = -2$ este punct de extrem local al lui f, iar dreapta de ecuație $x = 2$ este asimptotă verticală pentru graficul lui f, atunci valoarea sumei $a + b$ este: ✓ ?

A -6;

B -10;

C 10;

D -2.

646. Fie $m \in \mathbb{R}$ un parametru, iar $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcția definită prin $f(x) = (x^2 + mx)\mathrm{e}^{-x}$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A Graficul funcției f are asimptotă spre $+\infty$.

B Dacă $m = 2024$, atunci funcția f are un punct de maxim global.

C Oricare ar fi $m \in \mathbb{R}$, funcția f are exact două puncte de extrem local.

D Există $m \in \mathbb{R}$ pentru care funcția f să aibă exact un punct de extrem local.

647. Fie $\overrightarrow{i}$ și $\overrightarrow{j}$ versorii unui sistem cartezian. Dacă vectorii $\overrightarrow{u} = (p+5)\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}$ și $\overrightarrow{v} = 4\overrightarrow{i} + 10\overrightarrow{j}$ sunt perpendiculari, atunci parametrul $p \in \mathbb{R}$ poate să fie: ✓ ?

A -10; B $-\dfrac{21}{5}$; C 0; D $\dfrac{29}{5}$.

648. În triunghiul ABC avem $A(1,0)$, $B\left(5, \dfrac{4\sqrt{3}}{3}\right)$ și $\widehat{A} = 60°$. Ecuația dreptei AC poate să fie: ✓ ?

A $3y + \sqrt{3}x = \sqrt{3}$;

B $3y - \sqrt{3}x = -\sqrt{3}$;

C $y - \sqrt{3}x = -\sqrt{3}$;

D $x = 1$.

649. Pentru orice matrice $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ notăm cu $\mathrm{Tr}(X)$ suma elementelor de pe diagonala principală a matricei X. Dacă ✓ ?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ -4 & -3 & -2 \end{pmatrix},$$

atunci valoarea expresiei $\mathrm{Tr}(A^3) + \det(A^3)$ este

A -1; B 1; C 0; D 2.

650. Dacă x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului ✓ ?

$$f = X^3 + X^2 + 10X + 2,$$

atunci valoarea expresiei $\dfrac{x_1}{x_2 + x_3} + \dfrac{x_2}{x_1 + x_3} + \dfrac{x_3}{x_1 + x_2}$ este egală cu:

A 0; B $\dfrac{13}{8}$; C $\dfrac{13}{7}$; D $-\dfrac{13}{8}$.

651. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcția definită prin $f(x) = \dfrac{x^2}{1 + \mathrm{e}^x}$. Aria mulțimii plane cuprinse între graficul lui f, axa Ox și dreptele de ecuații $x = -1$ și $x = 1$ este: ✓ ?

A 0; B $\dfrac{2}{3}$; C $\dfrac{1}{3}$; D $\dfrac{1}{6}$.

652. Valoarea limitei $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \cos \dfrac{1}{x}\right)^{1/\ln x}$ este: ✓ ?

$\boxed{\text{A}}$ e; $\boxed{\text{B}}$ $\frac{1}{e}$; $\boxed{\text{C}}$ $\frac{1}{e^2}$; $\boxed{\text{D}}$ $\frac{1}{\sqrt{e}}$.

Admitere nivel licență, sesiunea iulie 2024

653. Dacă $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ✓ ?

$$f(x) = 4^x - 2^{x+1},$$

atunci valoarea expresiei $f(\log_2 3)$ este

A -1; B 2; C 3; D 5.

654. Valoarea limitei $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x}\left(\sqrt{x+3} - \sqrt{x+1}\right)$ este: ✓ ?

A 0; B $\frac{1}{2}$; C 2; D 1.

655. În paralelogramul $ABCD$ avem $AB = 1$, $AD = 2$ și $\widehat{B} = 60°$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A $CD = 2$; B $BC = 2$; C $AC = \sqrt{3}$; D $BD = \sqrt{3}$.

656. Fie A o mulțime cu n elemente. Dacă numărul submulțimilor lui A cu $(n-2)$ elemente este 10, atunci ✓ ?

A $n \in (2, 6]$;
B $n \in (6, 10]$;
C $n \in (10, 14]$;
D nu există astfel de valori ale lui n.

657. Fie S mulțimea soluțiilor reale ale ecuației ✓ ?

$$4^x - 2^x \cdot 5^{x+1} = 6 \cdot 25^x.$$

Care dintre următoarele afirmații sunt corecte?

A S are exact două elemente;
B S are exact un element;
C $\dfrac{1+\log_2 3}{1+\log_2 5} \in S$;
D $\dfrac{1+\log_2 3}{1-\log_2 5} \in S$.

658. În triunghiul ABC avem $E \in (AB)$, $EB = 2 \cdot EA$, $F \in (AC)$ și $FA = 3 \cdot FC$. Știind că punctele A, E și F au coordonatele $A(1,3)$, $E(3,6)$ și $F(4,18)$, coordonatele centrului de greutate G al triunghiului ABC sunt: ✓ ?

A $G\left(\frac{13}{3}, \frac{38}{3}\right)$; B $G\left(\frac{23}{9}, 10\right)$; C $G\left(\frac{47}{9}, \frac{70}{3}\right)$; D $G(7, 26)$.

659. În triunghiul ABC punctele $D(1,5)$, $E(-4,4)$ și $F(6,2)$ sunt mijloacele laturilor AB, BC respectiv AC. Aria triunghiul ABC este: ✓ ?

A 10; B 20; C 40; D 80.

660. Valoarea integralei $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$ este: ✓ ?

A $\frac{\pi}{4}$; B $\frac{\pi}{2}$; C 1; D π.

661. Se consideră numărul real a, funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definită prin $f(x)=1+x+axe^{-x^2}$ și punctele $A(0,1)$ și $B(-1,3)$. Valoarea lui a pentru care dreapta AB este tangentă la graficul lui f în punctul A este: ✓ ?

A -5; B -3; C 0; D 3.

662. În paralelogramul $ABCD$ avem $A(-2,1)$, $B(2,3)$ și $C(5,3)$. Ecuația dreptei BD este: ✓ ?

A $2x-y-1=0$; B $x-2y+4=0$; C $2x+y-1=0$; D $x+2y+4=0$.

663. Fie $\alpha\in(\pi,2\pi)$ cu $\cos(\alpha)=-\frac{1}{4}$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A $\sin(\alpha)=-\frac{\sqrt{15}}{4}$;

B $\sin(2\alpha)=-\frac{\sqrt{15}}{8}$;

C $\cos(2\alpha)=-\frac{7}{8}$;

D $\mathrm{tg}(\alpha)=-\sqrt{15}$.

664. Fie $\vec{i}$ și $\vec{j}$ versorii unui sistem cartezian. Dacă vectorii $\vec{u}=2\vec{i}+(p-1)\vec{j}$ și $\vec{v}=8\vec{i}-3\vec{j}$ sunt paraleli, atunci parametrul $p\in\mathbb{R}$ poate să fie: ✓ ?

A $\frac{1}{4}$; B $\frac{7}{4}$; C $\frac{19}{3}$; D 6.

665. Numerele întregi b_1,b_2,b_3,b_4,b_5 sunt în progresie geometrică cu rația $q=3$ și $S=b_1+b_2+b_3+b_4+b_5$. Care dintre următoarele afirmații sunt corecte? ✓ ?

A S este divizibil cu 11.

B S este pătrat perfect dacă și numai dacă b_1 este pătrat perfect.

C Dacă b_1 este număr impar, atunci S este număr par.

D Dacă b_1 este număr impar, atunci S este număr impar.

666. Fie a un parametru real și considerăm sistemul de ecuații: ✓ ?

$$\begin{cases} x+\ \ y-z=a \\ x+2y-z=0. \\ x+ay+z=1 \end{cases}$$

Care dintre următoarele afirmații sunt corecte?

A Pentru orice $a \in \mathbb{R}$ determinantul matricei sistemului este nenul.

B Există $a \in \mathbb{R}$ pentru care sistemul are cel puțin două soluții.

C Dacă $a = 1$, atunci $x + y + z = 1$.

D Există $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $x + y + z = 0$.

667. În grupul de permutări S_4 considerăm elementele ✓ ?

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{și} \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Dacă $x \in S_4$ este o permutare astfel încât $\sigma x = \tau$, atunci

A x nu este unic determinat;

B x este unic determinat;

C $x^2 = \sigma$;

D x^2 este permutarea identică.

668. Fie $a, b \in \mathbb{R}$ și fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcția definită prin ✓ ?

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(ax)}{x}, & \text{dacă } x < 0 \\ \mathrm{e}^{bx} + 2\sin x, & \text{dacă } x \geq 0. \end{cases}$$

Dacă f este derivabilă pe $\mathbb{R}$, atunci valoarea sumei $a + b$ este:

A 1;

B 0;

C -2;

D -1.

669. Fiind dat un număr real a, se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = \dfrac{x^2 + ax}{\sqrt{x^2 + 1}}$. Mulțimea valorilor lui a pentru care f are un punct de extrem local situat la distanța 1 față de axa Oy este: ✓ ?

A $\{-3,\ 3\}$;

B $\{-3\}$;

C $\{3\}$;

D mulțimea vidă.

670. Fie $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ funcția definită prin $f(x) = \displaystyle\int_{-\pi}^{x} t \sin t \,\mathrm{d}t$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A $x = 0$ este punct de extrem local pentru f;

B f este strict crescătoare pe $[-\pi, \pi]$;

C f este strict descrescătoare pe $[-\pi, \pi]$;

D $x = 0$ este punct de inflexiune pentru f.

671. Fie $ABCDEF$ un hexagon regulat cu latura 1. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -\frac{1}{2}$;

B $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = -\frac{1}{2}$;

C $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DE} = -\frac{1}{2}$;

D $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EF} = -\frac{1}{2}$.

672. În pătratul $ABCD$ avem $A(1,0)$ și $B(5,2)$. Ecuația dreptei CD poate să fie: ✓ ?

A $x-2y-11=0$; B $x-2y-1=0$; C $x-2y+9=0$; D $x+2y-1=0$.

673. Pentru orice matrice $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ notăm cu $\mathrm{Tr}(X)$ suma elementelor de pe diagonala principală a matricei X. Dacă ✓ ?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

atunci valoarea expresiei $\det(A^2) - \mathrm{Tr}(A^2)$ este

A 21; B 22; C 23; D 24.

674. Dacă x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului ✓ ?

$$f = X^3 + X^2 + 6X + 2$$

atunci valoarea expresiei $\dfrac{x_2+x_3}{x_1} + \dfrac{x_1+x_3}{x_2} + \dfrac{x_1+x_2}{x_3}$ este egală cu

A 1; B 0; C i; D $-i$.

675. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcția definită prin $f(x) = \dfrac{\cos x}{1+\mathrm{e}^x}$. Aria mulțimii plane cuprinse între graficul lui f, axa Ox și dreptele de ecuații $x = -\dfrac{\pi}{2}$ și $x = \dfrac{\pi}{2}$ este: ✓ ?

A 0; B $\frac{1}{2}$; C 1; D 2.

676. Valoarea limitei $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}{n^n}}$ este: ✓ ?

A e; B $\frac{4}{\mathrm{e}}$; C $\frac{1}{\mathrm{e}}$; D $\frac{2}{\mathrm{e}}$.

Admitere nivel licență, sesiunea septembrie 2023

677. Dacă $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + x + 1$, și $g(x) = 2x + 1$, atunci $g(f(1))$ este egală cu ✓ ?

A 6; B 7; C 8; D 9.

678. Dacă rădăcinile ecuației de gradul doi cu parametrul $m \in \mathbb{R}$ ✓ ?

$$x^2 - mx + m = 0$$

nu sunt numere reale, atunci

A $m \in (-\infty, -4]$;
B $m \in (-4, 0]$;
C $m \in (0, 4)$;
D nu există astfel de $m \in \mathbb{R}$.

679. Valoarea limitei $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2 + 2n} - n\right)$ este: ✓ ?

A $\frac{1}{2}$; B 1; C 2; D $+\infty$.

680. Vârfurile triunghiului ABC sunt $A(-2, -1)$, $B(-1, 2)$ şi $C(6, -3)$. Mediana care aparţine vârfului B, are lungimea ✓ ?

A 4; B $2\sqrt{3}$; C $3\sqrt{2}$; D 5.

681. Considerăm vectorii $\vec{x} = 2\vec{i} + a\vec{j}$ şi $\vec{y} = b\vec{i} + 3\vec{j}$, unde $a, b \in \mathbb{R}$ şi vectorii unitari $\vec{i}$ şi $\vec{j}$ sunt perpendiculari. Care dintre următoarele enunţuri implică coliniaritatea vectorilor $\vec{x}$ şi $\vec{y}$? ✓ ?

A $a = 1,\ b = 6$;
B $a \cdot b = 6$;
C $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$;
D $\vec{x} \cdot \vec{y} = \sqrt{a^2 + 4} \cdot \sqrt{b^2 + 9}$.

682. Valoarea expresiei $a = \sqrt{2 + \sqrt{3}} - \sqrt{2 - \sqrt{3}}$ este egală cu: ✓ ?

A $\sqrt{3}$; B $\sqrt{2}$; C $2(\sqrt{3} - \sqrt{2})$; D 2.

683. Fie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ✓ ?

$$f(x) = \begin{cases} |x|^3, & x < 0 \\ 2x^2, & x \geq 0 \end{cases}$$

Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

A $f(-2) = f(2)$;
B f este injectivă;
C f este surjectivă;
D $\mathrm{Im} f = [0, \infty)$.

684. Se consideră dreapta $d : x - 2y = 0$ şi punctele $M(3,4)$, $O(0,0)$. Coordonatele punctului N de pe dreapta d, pentru care triunghiul MNO este dreptunghic în N, pot fi: ✓ ?

$\boxed{A}$ $N(4,2)$; $\boxed{B}$ $N(6,3)$; $\boxed{C}$ $N(5,\frac{5}{2})$; $\boxed{D}$ $N(2\sqrt{5},2\sqrt{5})$.

Problemele **685.** și **686.** se referă la funcția $f : [0,2\pi] \to \mathbb{R},\ f(x) = 3\cos x + \cos(2x)$.

685. $f(\pi)$ este: ✓ ?

$\boxed{A}$ -3; $\boxed{B}$ -2; $\boxed{C}$ 2; $\boxed{D}$ 3.

686. Numărul soluţiilor ecuaţiei $f(x) = 1$ este: ✓ ?

$\boxed{A}$ 0; $\boxed{B}$ 1; $\boxed{C}$ 2; $\boxed{D}$ 4.

687. Valoarea limitei $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\ln(\sin x)}{(\pi-2x)^2}$ este: ✓ ?

$\boxed{A}$ $+\infty$; $\boxed{B}$ $-\dfrac{1}{4}$; $\boxed{C}$ $\dfrac{1}{8}$; $\boxed{D}$ $-\dfrac{1}{8}$.

688. Fie S mulțimea soluțiilor ecuației ✓ ?

$$\overline{z}z^2 = 2 + 2i,$$

unde z este număr complex. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

$\boxed{A}$ $1 + i \in S$;

$\boxed{B}$ Dacă $w \in S$, atunci $|w| = \sqrt{2}$;

$\boxed{C}$ Dacă $w \in S$, atunci $\overline{w} \in S$;

$\boxed{D}$ Numărul elementelor în S este 2.

689. Fie a un parametru real și considerăm sistemul de ecuații ✓ ?

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ -x + ay + az = 0. \\ x - y + az = 0 \end{cases}$$

Care dintre următoarele afirmații sunt corecte?

$\boxed{A}$ Sistemul este compatibil pentru orice valoare a lui a;

$\boxed{B}$ Există $a \in \mathbb{R}$ pentru care sistemul este incompatibil;

$\boxed{C}$ Există un singur număr a pentru care determinantul matricei sistemului este 0;

$\boxed{D}$ z ia aceeaşi valoare pentru orice a pentru care sistemul este compatibil.

690. În triunghiul ascuţitunghic ABC cunoaştem laturile $a = BC = 2$, $b = AC = \sqrt{6}$ şi raza cercului circumscris triunghiului $R = \sqrt{2}$. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate? ✓ ?

A $A = 45°$; B $B = 30°$; C $B = 60°$; D $C = 75°$.

691. Dreapta care trece prin $C(3,-1)$ şi faţă de care punctele $A(2,3)$ şi $B(6,1)$ sunt egal depărtate poate avea ecuaţia: ✓ ?

A $4x + y - 11 = 0$;

B $x + 2y - 1 = 0$;

C $x - 4y = 7$;

D $3x - y - 10 = 0$.

692. Fie triunghiul ABC şi D un punct pe latura BC astfel încât AD să fie bisectoarea unghiului BAC. Dacă laturile triunghiului au lungimile $BC = 4, CA = 5, AB = 6$, atunci care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate? ✓ ?

A $\overrightarrow{BD} = \frac{5}{6}\overrightarrow{DC}$;

B $\overrightarrow{BD} = \frac{6}{5}\overrightarrow{DC}$;

C $\overrightarrow{AD} = \frac{5}{11}\overrightarrow{AB} + \frac{6}{11}\overrightarrow{AC}$;

D $\overrightarrow{AD} = \frac{6}{11}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{11}\overrightarrow{AC}$.

693. Valoarea integralei $\int_0^{\pi/3} \sin x \cdot \ln(\cos x)\,dx$ este: ✓ ?

A $\ln\sqrt{2} - \frac{1}{2}$; B $\ln 2 - \frac{1}{2}$; C $\ln\sqrt{3} - \frac{1}{2}$; D $\ln\sqrt{2} + \frac{1}{2}$.

694. Fie S mulțimea numerelor de patru cifre. Numărul elementelor din S divizibile cu 3 este ✓ ?

A 2999; B 3000; C 3001; D 3333.

695. Pe mulțimea $G = (0, +\infty)$, se dă operația $x * y = x + y + |x - y|$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A operația ”$*$” este comutativă;

B $1 * (2 * 3) = (1 * 2) * 3$;

C $x * y \geq 1$ pentru orice $x, y \in G$;

D operația ”$*$” admite element neutru.

Problemele **696. 697. 698.** și **699.**funcţia $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = -x\ln x$.

696. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate? ✓ ?

A f are limită laterală finită în punctul $x_0 = 0$;

B f este strict crescătoare pe intervalul $(0, 1]$;

C f este strict descrescătoare pe intervalul $[1, \infty)$;

D f este concavă.

697. Numărul soluţiilor ecuaţiei $f(x) = \frac{1}{3}$ este: ✓ ?

A 3; B 2; C 1; D 0.

698. Dacă d este tangenta la graficul lui f care trece prin punctul $(0,1)$, iar m este panta dreptei d, care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate? ✓ ?

A $m \in [-2,0]$;

B $m \in (-\infty,-2]$;

C d trece prin punctul $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$;

D d trece prin punctul $\left(\frac{1}{\mathrm{e}},\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$.

699. Cel mai mic număr real a pentru care inegalitatea $f(x) \leq a - x$ are loc oricare ar fi $x \in (0,\infty)$ este: ✓ ?

A $\frac{1}{\mathrm{e}}$;

B $\frac{2}{\mathrm{e}}$;

C 2;

D 1.

700. Fie $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă cu proprietatea că ✓ ?

$$6 + f(x) = 2f(-x) + 3x^2 \left(\int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t\right) \quad \text{oricare ar fi } x \in [-1,1].$$

Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate?

A $\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 6$;

B $\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 4$;

C $f\left(\frac{1}{2}\right) = 3$;

D $f(-1) = -6$.

Admitere nivel licență, sesiunea iulie 2023

701. Dacă $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 3x - 2$, atunci $f(f(1))$ este egală cu: ✓ ?

A 6; B 7; C 8; D 9.

702. Dacă rădăcinile ecuației de gradul doi cu parametrul $m \in \mathbb{R}$ ✓ ?

$$x^2 - (m+1)x + m = 0$$

coincid, atunci

A $m \in (-\infty, -2)$;
C $m \in (2, +\infty)$;
B $m \in [-2, 2]$;
D nu există astfel de $m \in \mathbb{R}$.

703. Panta unei drepte paralele cu dreapta $d : x - 3y + 4 = 0$ este ✓ ?

A -3; B $-\dfrac{1}{3}$; C $\dfrac{1}{3}$; D 3.

704. Considerăm vectorii $\vec{u} = a\vec{i} + \vec{j}$ şi $\vec{v} = b\vec{i} - 3\vec{j}$, unde $a, b \in \mathbb{R}$ şi vectorii unitari $\vec{i}$ şi $\vec{j}$ sunt perpendiculari. Care dintre următoarele enunţuri implică perpendicularitatea vectorilor $\vec{u}$ şi $\vec{v}$? ✓ ?

A $a = -2,\ b = -\frac{3}{2}$;
C $3a + b = 0$;
B $a \cdot b = 3$;
D $a = 1,\ b = -3$.

705. Valoarea expresiei $a = \sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}}$ este egală cu: ✓ ?

A $\sqrt{6}$; B $2\sqrt{2}$; C $2\sqrt{3}$; D $\sqrt{3} + \sqrt{2}$.

706. Valoarea limitei $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n+1}{2n-1}\right)^n$ este: ✓ ?

A $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$; B e; C e^2; D e^{-2}.

707. Fie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ✓ ?

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & x < 0 \\ -x^2, & x \geq 0. \end{cases}$$

Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

A $f(-1) = f(1)$;
C f este surjectivă;
B f este injectivă;
D $\mathrm{Im} f = (-\infty, 0]$.

708. Se ştie că aria triunghiului MNP este 10, unde $M(-2,1)$, $N(2,5)$, iar punctul P se află pe axa Ox. Coordonatele punctului P pot fi ✓ ?

A $P(-8,0)$; B $P(-2,0)$; C $P(2,0)$; D $P(8,0)$.

Problemele **709.** și **710.** se referă la funcţia $f:[0,\pi]\to\mathbb{R},\ f(x)=\sin x+\cos(2x)$.

709. $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ este ✓ ?

A $\frac{\sqrt{3}}{2}$; B $\frac{\sqrt{3}}{2}+1$; C $\frac{\sqrt{2}}{2}$; D $\frac{\sqrt{2}}{2}+1$.

710. Numărul soluţiilor ecuaţiei $f(x)=1$ este ✓ ?

A 1; B 2; C 3; D 4.

711. Valoarea limitei $\lim\limits_{x\to+\infty} x\cdot\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} x\right)$ este: ✓ ?

A 0; B -1; C 1; D $+\infty$.

712. Fie S mulțimea soluțiilor ecuației ✓ ?

$$x^{\frac{1}{1+\log_4 x}}=4x^4.$$

Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

A S are exact un element;

B S are exact două elemente;

C Există un singur $a\in S$ astfel încât $a<1$;

D Există un singur $a\in S$ astfel încât $a\geq 1$.

713. Dacă $X,Y\in\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_7)$ astfel încât ✓ ?

$$\begin{cases} X+\hat{2}Y=\begin{pmatrix}\hat{2} & \hat{3}\\ \hat{4} & \hat{1}\end{pmatrix}\\ \hat{2}X-Y=\begin{pmatrix}\hat{5} & \hat{1}\\ \hat{2} & \hat{6}\end{pmatrix}\end{cases},$$

atunci $\det X\cdot\det Y$ este egal cu

A $\hat{0}$; B $\hat{1}$; C $\hat{2}$; D $\hat{4}$.

714. Se consideră paralelogramul $ABCD$ şi punctele $M\in AB$, $N\in AC$ astfel încât $\overrightarrow{AM}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{AN}=m\overrightarrow{AC}$, unde $m\in\mathbb{R}^*$. Punctele D,N şi M sunt coliniare dacă ✓ ?

[A] $m = \frac{1}{2}$; [B] $m = \frac{3}{5}$; [C] $m = \frac{2}{3}$; [D] $m = \frac{4}{7}$.

715. Notăm cu $\mathcal{C}_t$ cercul centrat în punctul $M(t, 0)$, care trece prin punctele $A(1, 1)$ şi $B(1, -1)$. Raza cercului $\mathcal{C}_t$ se notează cu r_t. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate? ✓ ?

[A] Pentru $t = 0$ avem $r_t = \sqrt{2}$.

[B] Pentru orice $t \in (0, 4)$, avem $r_t \in (\sqrt{2}, \sqrt{10})$.

[C] Există t astfel încât $r_t = \frac{1}{2}$.

[D] Pentru $t = 2$ triunghiul AMB este dreptunghic.

716. În triunghiul ABC, $m(\hat{A}) = 45°$, $AB = c$, $AC = \frac{2\sqrt{2}\,c}{3}$ şi $BC = a$. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate? ✓ ?

[A] $\sin B = \frac{2c}{3a}$; [B] $\cos B = \frac{c}{3a}$; [C] $\mathrm{tg}B = 2$; [D] $\mathrm{tg}B = \sqrt{2}$.

717. Valoarea integralei $\int\limits_1^4 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{5-x}}$ este: ✓ ?

[A] 1; [B] 2; [C] -1; [D] -2.

718. Dacă S este mulțimea numerelor pare de patru cifre, atunci numărul elementelor din S este ✓ ?

[A] 4500; [B] 4499; [C] 4501; [D] 5000.

719. Pe mulțimea $G = (0, +\infty)$ se dă operația $x * y = \frac{|x-y|}{x+y}$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

[A] operația ”$*$” este comutativă;

[B] $1 * (2 * 3) = (1 * 2) * 3$;

[C] $x * y < 1$ pentru orice $x, y \in G$;

[D] operația ”$*$” admite element neutru.

Problemele **720. 721. 722.** și **723.** se referă la funcţia $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \ln^2 x, & \text{dacă } x \in (0, +\infty) \\ 0, & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$$

.

720. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate? ✓ ?

A f este continuă în punctul $x_0 = 0$;

B f este discontinuă în punctul $x_0 = 0$;

C f este strict descrescătoare pe intervalul $[0, 1]$;

D f este strict crescătoare pe intervalul $[1, +\infty)$.

721. Numărul punctelor de extrem local ale lui f este: ✓ ?

A 0; B 1; C 2; D 3.

722. Numărul punctelor de inflexiune ale graficului lui f este: ✓ ?

A 0; B 1; C 2; D 3.

723. Dacă d este tangenta la graficul lui f în punctul de abscisă e, iar m este panta dreptei d, care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate? ✓ ?

A $m = 4\mathrm{e}$;

B d intersectează axa Ox în punctul de abscisă $\frac{3\mathrm{e}}{4}$;

C $m = 2\mathrm{e}$;

D d intersectează axa Oy în punctul de ordonată $-4\mathrm{e}^2$.

724. Valoarea integralei $\displaystyle\int_{-\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)}\,\mathrm{d}x$ este: ✓ ?

A $\frac{\pi}{6}$; B $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\ln\sqrt{3}$; C $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\ln 3$; D $\frac{\pi}{3}$.

Admitere nivel licență, sesiunea septembrie 2022

725. Valoarea limitei $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-3n+1}{n^2+3n+2}\right)^{n/3}$ este: ✓ ?

A e^2; B $e-2$; C $\dfrac{1}{e}$; D e^{-2}.

726. Valoarea limitei $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-\operatorname{arctg} x}{x^2}$ este: ✓ ?

A 0; B $\dfrac{1}{2}$; C 1; D $\dfrac{3}{2}$.

727. Ecuaţia tangentei la graficul funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{3x}+2x+1$ în punctul de abscisă $x=0$ este: ✓ ?

A $5x-y+2=0$; B $5x+y-2=0$; C $x-5y+2=0$; D $x+5y-2=0$.

728. În reperul cartezian xOy se consideră punctul $M(1,-1)$. Ecuaţia dreptei ce trece prin punctul M şi are panta 3 este: ✓ ?

A $3x-y+4=0$; C $3x+y+4=0$;
B $3x-y-4=0$; D $-3x+y-4=0$.

729. Dacă măsura unghiului A este cuprinsă între $540°$ şi $720°$, iar $\cos A=-\dfrac{7}{25}$, atunci care dintre următoarele afirmaţii sunt corecte? ✓ ?

A $\sin\dfrac{A}{2}=-\dfrac{4}{5}$; B $\cos\dfrac{A}{2}=\dfrac{3}{5}$; C $\sin\dfrac{A}{2}=\dfrac{4}{5}$; D $\cos\dfrac{A}{2}=-\dfrac{3}{5}$.

730. Considerăm vectorii $\vec{u}=\vec{i}-(a+2)\vec{j}$ şi $\vec{v}=a\vec{i}-3\vec{j}$, unde $\vec{i}$ şi $\vec{j}$ sunt versorii axelor de coordonate Ox respectiv Oy în sistemul cartezian xOy. Dacă vectorii $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ sunt coliniari, atunci valoarea parametrului $a\in\mathbb{R}$ poate fi: ✓ ?

A $a=-3$; B $a=1$; C $a=-1$; D $a=3$.

731. Suma coeficienților puterilor impare ale lui x din dezvoltarea binomului $(1+x)^{1011}$ este: ✓ ?

A 2^{2022}; B 2^{505}; C 2^{1010}; D 2^{1011}.

732. Dacă $1+5+9+\ldots+x=496$, unde termenii care se însumează în membrul stâng sunt în progresie aritmetică, atunci: ✓ ?

A $x = 21$; B $x = 41$; C $x = 61$; D $x = 81$.

733. Numărul complex $(1-i)^{2022}$ este egal cu: ✓ ?

A 2^{1011}; B -2^{1011}; C $-2^{1011}i$; D $2^{1011}i$.

734. Valoarea integralei $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin^2 x + 1}}\,\mathrm{d}x$ este ✓ ?

A 0; B $\dfrac{\pi}{2}$; C $\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$; D $1+\sqrt{2}$.

735. Funcţia $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = x + \sqrt{x^2+2x}$, are ca asimptotă spre $+\infty$ dreapta de ecuaţie ✓ ?

A $y = -1$; B $y = 2x+1$; C $y = 0$; D $y = 2x+2$.

736. Valoarea limitei $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} + 2\mathrm{e}^{\frac{2}{n}} + \ldots + n\mathrm{e}^{\frac{n}{n}}\right)$ este: ✓ ?

A 1; B e; C $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$; D $\mathrm{e}-1$.

737. Fie $ABCD$ un paralelogram. Considerăm punctele E şi F astfel încât $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{AF} = 3\,\overrightarrow{AD}$. Care dintre următoarele relaţii sunt adevărate? ✓ ?

A $\overrightarrow{FE} = 3\,\overrightarrow{CE}$; B $\overrightarrow{FE} = 2\,\overrightarrow{CE}$; C $\overrightarrow{FC} = 2\,\overrightarrow{CE}$; D $\overrightarrow{FC} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{CE}$.

738. Fie ABC un triunghi oarecare cu proprietatea că $a > b > c$, unde am notat $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. ✓ ?

Care dintre următoarele relaţii sunt adevărate?

A $\dfrac{\sin(A-B)}{\sin(A+B)} = \dfrac{a-b}{a+b}$;

B $\dfrac{\sin(A-B)}{\sin(A+B)} = \dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$;

C $\dfrac{\sin(A-B)}{\sin(A+B)} = \dfrac{a^2-b^2}{c^2}$;

D $\dfrac{\sin(A-B)}{\sin(A+B)} = \dfrac{a-b}{c}$.

739. Într-un triunghi ABC ştim că măsurile unghiurilor $\widehat{A}, \widehat{B}$ şi $\widehat{C}$ (în această ordine), sunt în progresie aritmetică, iar, dacă notăm cu a, b, c lungimile laturilor opuse acestor unghiuri, avem $3a^2 = 2b^2$. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate? ✓ ?

A $\widehat{A} = 45°$; B $\widehat{C} = 75°$; C $\widehat{C} = 45°$; D $\widehat{A} = 60°$.

740. Fie în $\mathbb{R}$ ecuaţia $2\sqrt[3]{(x^2+a)^2} - 3\sqrt[3]{x^2+a} - 2 = 0$, unde $a \in \mathbb{R}$. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate? ✓ ?

A Dacă $a = 8$, atunci $x = 0$ este o soluţie a ecuaţiei;

B Ecuaţia are soluţii pentru orice $a \leq -\frac{1}{8}$;

C Ecuaţia are soluţii pentru orice $a \geq -8$;

D Ecuaţia are soluţii pentru orice $a \leq 8$.

741. Fie sistemul de ecuaţii: ✓ ?

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 1 \\ x + ay + z = 2, \\ -4x + y \quad = 3 \end{cases}$$

unde $a \in \mathbb{R}$. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate?

A Sistemul este compatibil determinat pentru orice $a > 0$;

B Când sistemul este compatibil determinat, soluţia sa nu depinde de a;

C Există o valoare a pentru care sistemul este compatibil nedeterminat;

D Există o valoare a pentru care sistemul este incompatibil.

742. Un grup de 11 copii vrea să joace fotbal. Pentru aceasta, copiii aleg un arbitru dintre ei, apoi dintre ceilalţi formează 2 echipe denumite X şi Y, fiecare având câte 5 jucători. În câte moduri pot face acest lucru? ✓ ?

A 462; B 2310; C 2772; D 5082.

743. Fie $m \in \mathbb{R}$ un parametru, iar $f\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$ funcţia definită prin $f(x) = x^2 - 2\ln x + m$. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate? ✓ ?

A Funcţia f are exact un punct de maxim global.

B Dacă $m = -2022$, atunci ecuaţia $f(x) = 0$ are exact două soluţii reale.

C Există $m \in \mathbb{R}$ astfel încât f este injectivă.

D Există $m \in \mathbb{R}$ minim cu proprietatea că $f(x) \geq 0$ oricare ar fi $x \in (0, \infty)$.

744. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcţia definită prin $f(x) = ax^3 + bx + c$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$. Se ştie că tabelul de variaţie al lui f este cel prezentat mai jos. ✓ ?

x	$-\infty$			-1			1			$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\nearrow$	10	$\searrow$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$\nearrow$	$+\infty$

✓ ?

Atunci valoarea sumei $|a| + |b| + |c|$ este

A 11; B 13; C 20; D 14.

745. Valoarea limitei $\lim\limits_{x \searrow 0} \dfrac{\int_0^{x^2} \ln\left(1 - \sqrt{t}\right) \mathrm{d}t}{x^3}$ este: ✓ ?

A 0; B $-\frac{1}{3}$; C $-\frac{2}{3}$; D $-\infty$.

746. Fie $ABCDEF$ un hexagon regulat, iar a şi b două numere reale astfel încât $\overrightarrow{AD} = a\overrightarrow{BE} + b\overrightarrow{CF}$. Atunci numărul $b - 2a$ este egal cu: ✓ ?

A -3; B 3; C -1; D 1.

747. Considerăm triunghiul ABC cu vârfurile $A(1,3)$, $B(-1,-5)$ şi $C(2,1)$. Fie D punctul situat pe segmentul BC astfel încât $\frac{BD}{DC} = 2$. Notăm cu d distanţa de la punctul D la înălţimea din vârful B al triunghiului ABC. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate? ✓ ?

A Coordonatele punctului D sunt $(1,-1)$;

B Coordonatele punctului D sunt $(0,-3)$;

C $d = \frac{6\sqrt{5}}{5}$;

D $d = \frac{3\sqrt{5}}{5}$.

748. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin ✓ ?

$$f(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 4 \\ 2 & x & 2 \\ 2 & 2 & x \end{vmatrix}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ştiind că $x = 2$ este o soluţie a ecuaţiei $f(x) = 0$, care dintre numerele următoare sunt de asemenea soluţii ale acestei ecuaţii?

A $-1-\sqrt{11}$; B $-1+\sqrt{11}$; C $1-\sqrt{13}$; D $1+\sqrt{13}$.

749. Considerăm în $\mathbb{R}$ ecuaţia ✓ ?

$$\left[\frac{x+2}{3}\right] = \frac{x+1}{4},$$

unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a. Dacă notăm cu S mulţimea soluţiilor acestei ecuaţii, care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate?

A $S = [-9, 3]$;

B $S = \{-9, -5, -1, 3\}$;

C $S = [-5, 3]$;

D $S = \{-5, -1, 3\}$.

750. Pe mulţimea $\mathbb{Z}$ a numerelor întregi definim legea de compoziţie $x * y = xy - x - y + 2$. Ştiind că legea este asociativă, care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate? ✓ ?

A $(1 * 2) * 4 = 8$;

B Operaţia admite element neutru;

C Există exact două elemente simetrizabile în $(\mathbb{Z}, *)$;

D $(\mathbb{Z}, *)$ este grup.

751. Pe mulţimea $\mathbb{R}$ a numerelor reale definim operaţiile: $x \perp y = x + y - 1$, $x * y = x+y-xy$. Ştiind că $(\mathbb{R}, \perp, *)$ este corp şi funcţia $f : (\mathbb{R}, +, \cdot) \to (\mathbb{R}, \perp, *)$, $f(x) = ax+b$ este izomorfism de corpuri, unde $a, b \in \mathbb{R}$, care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate? ✓ ?

A $a = b = 1$; B $a = -1, b = 1$; C $a = 1, b = -1$; D $a = 0, b = 1$.

752. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$, fie $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}x$. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate? ✓ ?

A Şirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este monoton;

B $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$;

C $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n = 0$;

D $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{I_n}{I_{n+1}} = 1$.

753. Într-un paralelogram lungimile laturilor sunt egale cu 5, respectiv 3, iar produsul diagonalelor este 32. Notăm cu α măsura unghiului ascuţit al paralelogramului. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate? ✓ ?

A Suma pătratelor lungimilor diagonalelor este 68.

B $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{33}}{15}$.

C Suma pătratelor lungimilor diagonalelor este 34.

D $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{33}}{20}$.

754. Considerăm dreapta (d) $ax + by + c = 0$ $(abc \neq 0)$ şi punctele ✓ ?

$$M_1\left(\frac{b-c}{a}, 0\right),\ M_2\left(-\frac{b+c}{a}, 0\right), N\left(0, -\frac{c}{b}\right).$$

Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate?

A Punctul de intersecţie al dreptei d cu axa Ox este mijlocul segmentului $[M_1M_2]$;

B Dreapta d este paralelă cu axa Ox;

C Punctul de intersecţie al dreptei d cu axa Oy este N;

D Aria triunghiului M_1M_2N este $\left|\dfrac{c}{a}\right|$.

Admitere nivel licență, sesiunea iulie 2022

755. Valoarea limitei $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2+n-2}{2n^2+3n+1}\right)^{n+2}$ este: ✓ ?

A e; B $\mathrm{e}-1$; C $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$; D e^{-2}.

756. Valoarea limitei $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{x^2}-\cos x}{x^2}$ este: ✓ ?

A 0; B $\dfrac{1}{2}$; C 1; D $\dfrac{3}{2}$.

757. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ funcţia definită prin $f(x)=(x+1)\mathrm{e}^x$ şi punctul $P(0,f(0))$. Notăm cu d dreapta tangentă la graficul lui f în punctul P. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate? ✓ ?

A d are ecuaţia $y=2x+1$;
C d are ecuaţia $y=2x-1$;
B d conţine punctul $Q(3,7)$;
D d conţine punctul $S(-3,-4)$.

758. În trapezul $ABCD$ avem $m(\widehat{A})=m(\widehat{D})=90°$, $AB\parallel CD$ şi AC perpendicular pe BD. Care dintre următoarele relaţii sunt adevărate? ✓ ?

A $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=0$; B $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0$; C $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{DC}=0$; D $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$.

759. În reperul cartezian xOy se consideră punctul $M(1,1)$. Ecuaţia dreptei ce trece prin punctul M şi are panta 2 este: ✓ ?

A $2x-y-1=0$; B $2x+y-1=0$; C $2x+y+1=0$; D $2x-y+1=0$.

760. Dacă măsura unghiului A este cuprinsă între $450°$ şi $540°$, iar $\cos A=-\dfrac{7}{25}$, atunci care dintre următoarele afirmaţii sunt corecte? ✓ ?

A $\sin\dfrac{A}{2}=-\dfrac{4}{5}$; B $\cos\dfrac{A}{2}=-\dfrac{3}{5}$; C $\sin\dfrac{A}{2}=-\dfrac{3}{5}$; D $\cos\dfrac{A}{2}=-\dfrac{4}{5}$.

761. Partea imaginară a numărului $(1+i)^{2022}$ este egală cu: ✓ ?

A 0; B 2^{1011}; C -2^{1011}; D 2^{2022}.

762. Mulţimea soluţiilor reale ale inecuaţiei ✓ ?

$$\log_9(5x+3)>\frac{1}{2}\log_3(x-1)$$

este:

A $(-1,+\infty)$; B $\left(-\frac{3}{5},+\infty\right)$; C $(1,+\infty)$; D $(2,+\infty)$.

763. Suma primilor 8 termeni ai unei progresii aritmetice este egală cu 64, în timp ce suma primilor 19 termeni este egală cu 361. Care dintre următoarele afirmaţii este adevărată? ✓ ?

A raţia este 2; C raţia este 4;
B primul termen este 1; D primul termen este -8.

764. Valoarea integralei $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x}\,dx$ este: ✓ ?

A $\dfrac{\pi}{4}$; B $\dfrac{\pi}{2}$; C $\ln 2$; D $\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$.

765. Funcţia $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, definită prin $f(x)=x-\sqrt{x^2+2x}$, are ca asimptotă spre $+\infty$ dreapta de ecuaţie ✓ ?

A $y=-2$; B $y=2x-1$; C $y=-1$; D $y=2x+1$.

766. Valoarea limitei $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}+2^2\mathrm{e}^{\frac{2}{n}}+\ldots+n^2\mathrm{e}^{\frac{n}{n}}\right)$ este ✓ ?

A 1; B $\mathrm{e}-2$; C e^2; D $\mathrm{e}-1$.

767. Considerăm vectorii $\overrightarrow{u}=a\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}$ şi $\overrightarrow{v}=2\overrightarrow{i}+(a+1)\overrightarrow{j}$, unde $\overrightarrow{i}$ şi $\overrightarrow{j}$ sunt versorii axelor de coordonate Ox respectiv Oy în sistemul cartezian xOy. Dacă vectorii $\overrightarrow{u}$ şi $\overrightarrow{v}$ sunt coliniari, atunci valoarea parametrului $a\in\mathbb{R}$ poate fi: ✓ ?

A $a=-2$; B $a=1$; C $a=-1$; D $a=2$.

768. Care dintre următoarele relaţii sunt adevărate? ✓ ?

A $\dfrac{1}{\sin^2 15^\circ}+\dfrac{1}{\cos^2 15^\circ}=8\sqrt{3}$; C $\dfrac{1}{\sin^2 15^\circ}+\dfrac{1}{\cos^2 15^\circ}=16$;
B $\dfrac{1}{\sin^2 15^\circ}-\dfrac{1}{\cos^2 15^\circ}=8\sqrt{3}$; D $\dfrac{1}{\sin^2 15^\circ}-\dfrac{1}{\cos^2 15^\circ}=16$.

769. Dacă în triunghiul ascuţitunghic ABC are loc relaţia $BC=2AC\sin\dfrac{A}{2}$, atunci: ✓ ?

A $AB=\dfrac{AC}{2}$; B $AB=AC$; C $AB=\sqrt{2}AC$; D $AB=2AC$.

770. Suma soluțiilor reale ale ecuației $\sqrt{x^2+x+3}+\sqrt{x^2+x-1}=2$ este: ✓ ?

A 0; B 1; C 2; D -1.

771. Fie sistemul de ecuaţii: ✓ ?

$$\left\{ \quad 2x + y - 3z = 4 \quad x \quad\quad - \quad z = 5 - 3x - y + az = -9 \right.$$

unde $a \in \mathbb{R}$. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate?

A Sistemul este compatibil determinat pentru orice $a < 0$;

B Când sistemul este compatibil determinat, soluţia sa depinde de a;

C Există o valoare a pentru care sistemul este compatibil nedeterminat;

D Există o valoare a pentru care sistemul este incompatibil.

772. În câte moduri pot fi așezate 5 persoane într-o mașină cu 7 locuri, dacă numai 3 dintre ele au permis de conducere și la volan este aşezată o persoană cu permis? ✓ ?

A 120; B 1080; C 2520; D 5040.

773. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcţia definită prin $f(x) = |x|(e^x - 1)$. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate? ✓ ?

A Funcţia f nu este derivabilă în 0;

C Funcţia f este injectivă;

B Funcţia f este continuă în 0;

D Funcţia f este surjectivă.

774. Fie $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ funcţia definită prin $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-1}$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$. Se ştie că tabelul de variaţie al lui f este cel prezentat mai jos. ✓ ?

x	$-\infty$			0			1			2			$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\nearrow$	-5	$\searrow$	$\searrow$	$-\infty \mid +\infty$	$\searrow$	$\searrow$	7	$\nearrow$	$\nearrow$	$+\infty$

✓ ?

Atunci valoarea sumei $|a| + |b| + |c|$ este

A 7; B 5; C 10; D 8.

775. Valoarea limitei $\lim\limits_{x \searrow 0} \dfrac{\int_0^{x^2} \sin\sqrt{t}\,\mathrm{d}t}{x^3}$ este: ✓ ?

A 0; B $\dfrac{1}{3}$; C $\dfrac{2}{3}$; D $+\infty$.

776. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4, 4)$, $B(7, 0)$ şi $C(-1, -8)$. Fie D piciorul bisectoarei interioare a unghiului A în triunghiul ABC. Atunci suma dintre abscisa şi ordonata punctului D este: ✓ ?

A $\frac{36}{17}$; B 2; C $\frac{23}{9}$; D $\frac{32}{19}$.

777. În paralelogramul $ABCD$ notăm $AB = a$, $AD = b$, $BD = d_1$, $AC = d_2$, $m\left(\widehat{DAB}\right) = \alpha$. Dacă $\alpha \neq 90°$, atunci care dintre următoarele relaţii sunt adevărate? ✓ ?

A $d_1^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$;

B $d_2^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$;

C $d_1^2 + d_2^2 = a^2 + b^2$;

D $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$.

778. Fie $x_n = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \cdot \ldots \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$ pentru fiecare $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate? ✓ ?

A $x_{n+1} < x_n$ pentru fiecare $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$;

B $\frac{\sqrt{2}}{2} < x_n < 1$ pentru orice $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$;

C $x_2 = \sqrt{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}$;

D $2^n x_n \sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) = 1$ pentru fiecare $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

779. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin ✓ ?

$$f(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 3 \\ -2 & x & 2 \\ 2 & 2 & x \end{vmatrix}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ştiind că $x = -2$ este o soluţie a ecuaţiei $f(x) = 0$, care dintre numerele următoare sunt de asemenea soluţii ale acestei ecuaţii?

A $1 - \sqrt{5}$; B $1 + \sqrt{5}$; C $1 - \sqrt{7}$; D $1 + \sqrt{7}$.

780. Considerăm în $\mathbb{R}$ ecuaţia ✓ ?

$$\left[\frac{x+1}{2}\right] = \frac{x+1}{3},$$

unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a. Dacă notăm cu S mulţimea soluţiilor acestei ecuaţii, care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate?

A $S = \left(-3, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 3\right)$;

B $S = \{-1, 2\}$;

C $S = \left[-2, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 2\right]$;

D $S = \{-4, -1, 2\}$.

781. Pe mulţimea $\mathbb{R}$ a numerelor reale definim legea de compoziţie $x*y = xy-2x-2y+6$. Ştiind că legea este asociativă, care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate? ✓ ?

A $1 * (2 * 3) = 2$;

B Submulţimea $[0, +\infty)$ este parte stabilă în raport cu $*$;

C existā $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $a * x = a$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$;

D $(\mathbb{R}, *)$ este grup.

782. Considerăm inelul $(R,+,\cdot)$, unde $R = \{a + bi\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C}$. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate? ✓ ?

A $(R,+,\cdot)$ are cel puţin 3 elemente inversabile;

B Suma elementelor inversabile ale lui $(R,+,\cdot)$ este 0;

C $(R,+,\cdot)$ are cel puţin un element inversabil care nu este număr real;

D $(R,+,\cdot)$ este un corp.

783. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$, fie $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n e^x dx$. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate? ✓ ?

A $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 1$;

B $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$;

C $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n = +\infty$;

D $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n > 2$.

784. Considerăm triunghiul dreptunghic ABC $(m(\widehat{C}) = 90°)$ iar a, b şi c lungimile catetelor şi respectiv a ipotenuzei acestui triunghi. Considerăm, de asemenea, punctele $E(-1,0)$, $F(1,0)$, $M(\frac{b-c}{a}, 0)$ şi dreapta (d) $ax + by + c = 0$. Notăm prin $\mathrm{dist}(X, d)$ distanţa de la punctul oarecare X la dreapta d. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate? ✓ ?

A Punctele $E(-1,0)$, $F(1,0)$ aparţin dreptei d;

B $\mathrm{dist}(M,d) = \dfrac{b}{c}$;

C Punctul $M\left(\dfrac{b-c}{a}, 0\right)$ aparţine dreptei d;

D $\mathrm{dist}(E,d) \cdot \mathrm{dist}(F,d) = \dfrac{b^2}{c^2}$.

Admitere nivel licență, sesiunea septembrie 2021

785. Fie ecuaţia $x^2 + ax + 3 = 0$ cu soluţiile pozitive x_1 şi x_2 astfel încât $x_1^2, x_2, 1$ sunt în progresie geometrică (în această ordine). Atunci valoarea lui $a \in \mathbb{R}$ poate fi: ✓ ?

A $2\sqrt{3}$; B $-2\sqrt{3}$; C $\sqrt{3}$; D $-\sqrt{3}$.

786. Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ şirul de termen general $x_n = \dfrac{1}{4^n} C_{2n}^n$. Să se indice care dintre afirmaţiile următoare sunt adevărate. ✓ ?

A Şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător.

B Şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este strict descrescător.

C Şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este mărginit.

D Şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

787. Valoarea limitei $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}\right)^{\sqrt{x}}$ este: ✓ ?

A 1; B e^2; C $\dfrac{1}{e^2}$; D 0.

788. Valoarea limitei $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\sin x}{e^x + e^{-x} - 2}$ este: ✓ ?

A 1; B 2; C $\dfrac{1}{2}$; D 0.

789. Se consideră vectorii $\vec{u} = a\vec{i} + 3\vec{j}$ şi $\vec{v} = 2\vec{i} + b\vec{j}$, unde vectorii unitari $\vec{i}$ şi $\vec{j}$ sunt perpendiculari. Să se indice care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate. ✓ ?

A Pentru $a = -1$ şi $b = -6$ vectorii $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ sunt coliniari.

B Vectorii $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ au aceeeaşi lungime doar dacă $a = 2$ şi $b = 3$.

C Există o infinitate de numere reale a, b pentru care vectorii $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ au aceeaşi lungime.

D Vectorii $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ sunt perpendiculari, dacă $2a = 3b$.

790. Fie hexagonul regulat $ABCDEF$. Notăm $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$ şi $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{v}$. Să se indice care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate. ✓ ?

A $\overrightarrow{AC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$.

B $\overrightarrow{AC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{u} + \frac{1}{2}\overrightarrow{v}$.

C $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{u} + \frac{3}{2}\overrightarrow{v}$.

D $\overrightarrow{AC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{u} - \frac{1}{2}\overrightarrow{v}$.

791. Dacă S este mulţimea soluţiilor ecuaţiei $\dfrac{2\lg(x+3)}{\lg(5x+11)} = 1$, atunci: ✓ ?

A $S \subseteq [-2, 0]$; B $S \subseteq [-2, 1]$; C $S \subseteq [0, 1]$; D $S \subseteq [-2, -1]$.

792. Considerăm în $\mathbb{R}$ ecuaţia ✓ ?

$$\sqrt{x + 3 - 4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x + 8 - 6\sqrt{x-1}} = 1.$$

Mulţimea soluţiilor ecuaţiei este:

A $S = [3, 12]$; B $S = [1, \infty)$; C $S = [5, 10]$; D $S = \{4, 11\}$.

793. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. În planul xOy considerăm o mulţime $\mathcal{M}$ formată din n puncte distincte diferite de O. Numărul tuturor triunghiurilor care au două vârfuri în mulţimea $\mathcal{M}$ şi un vârf în punctul O este: ✓ ?

A A_n^2; B 2^n; C C_{n+1}^3; D cel mult C_n^2.

794. Considerăm sistemul de ecuaţii ✓ ?

$$\begin{cases} (a-1)x + 2y + 3z = 1 \\ x + 2y + 3z = 1, \\ x + 2y + (a+1)z = 1 \end{cases}$$

unde a este parametru real. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate?

A Există mai multe valori ale lui a pentru care determinantul sistemului este 0.

B Există o singură valoare a lui a pentru care sistemul este compatibil.

C Există mai multe valori ale lui a pentru care sistemul este compatibil.

D Dacă sistemul este compatibil, atunci admite o unică soluţie.

795. Dacă $\sin x = a$ şi $x \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$, atunci: ✓ ?

A $\sin 2x = 2a$;

B $\sin 2x = 2a\sqrt{1-a^2}$;

C $\sin 2x = -2a\sqrt{1-a^2}$;

D $\cos 2x = 1 - 2a^2$.

796. Dacă $A(-2, -1)$, $B(2, 1)$ și $C(-1, 2)$ sunt puncte într-un sistem de coordonate carteziene, atunci triunghiul ABC este: ✓ ?

A obtuzunghic; B isoscel; C dreptunghic; D echilateral.

797. Într-un reper cartezian se consideră dreptele ✓ ?

$$d_1 : (m-1)x + (3m-7)y - 5 = 0 \text{ şi } d_2 : (m-2)x + (2m-5)y = 0,$$

unde m este un parametru real. Să se indice care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate.

A Dreptele sunt paralele pentru $m = 3$.

B Există o valoare a parametrului m pentru care dreptele coincid.

C Dreptele sunt perpendiculare pentru o singură valoare a lui m.

D Dreptele nu sunt perpendiculare pentru nicio valoare a lui m.

798. Într-un reper cartezian xOy se consideră punctele $A(0,1)$ şi $H(3,2)$, unde H este ortocentrul triunghiului ABC. Panta dreptei BC este egală cu: ✓ ?

A 3; B -3; C $\frac{1}{3}$; D $-\frac{1}{3}$.

799. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = (x+2)e^{1/x}$. Ecuaţia asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul lui f este: ✓ ?

A $y = x$; B $y = x + 1$; C $y = x + 2$; D $y = x + 3$.

800. Fie $a \in \mathbb{R}$ şi fie funcţia $f : (-1,1) \to \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = \dfrac{x+a}{\sqrt{1-x^2}}$. Valoarea lui a pentru care tangenta la graficul lui f în punctul de abscisă 0 trece prin punctul $(-2,5)$ este: ✓ ?

A 9; B 7; C -5; D 5.

801. Valoarea integralei $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{3-\cos 2x}\,dx$ este: ✓ ?

A $\ln 2$; B $\frac{1}{4}\ln 2$; C $\frac{1}{2}\ln 2$; D $\frac{1}{2}$.

802. Valoarea integralei $\displaystyle\int_1^{e^2} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$ este: ✓ ?

A 4; B $4e$; C $8e - 4$; D $2e + 2$.

803. În corpul $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$ sistemul de ecuaţii ✓ ?

$$\begin{cases} x + \widehat{2}y = \widehat{3} \\ \widehat{2}x + \widehat{4}y = \widehat{2} \end{cases}$$

A nu are soluţii;

B are soluţie unică;

C are exact cinci soluţii distincte;

D are exact zece soluţii distincte.

804. Considerăm funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - [x] - \frac{1}{2}$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x. Stabiliţi valoarea de adevăr a următoarelor afirmaţii. ✓ ?

A Graficul funcţiei f intersectează axa Oy în cel puţin 2 puncte.

B Graficul funcţiei f nu intersectează axa Ox.

C Graficul funcţiei f intersectează axa Ox într-o infinitate de puncte.

D Graficul funcţiei f nu intersectează axa Oy.

805. Considerăm ecuaţia matriceală $X^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ în $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate? ✓ ?

A Ecuaţia are soluţie unică.

B Ecuaţia are exact două soluţii.

C Ecuaţia are mai mult de două soluţii.

D Suma tuturor soluţiilor ecuaţiei este O_2.

806. Punctele $A(0,2)$, $B(2,1)$ sunt vârfuri ale paralelogramului $ABCD$ şi $G(2,0)$ este centrul de greutate al triunghiului ABD. Să se indice care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate. ✓ ?

A Aria triunghiului ABD este egală cu 3.

B Aria triunghiului ABD este egală cu 6.

C Aria paralelogramului $ABCD$ este egală cu 6.

D Aria paralelogramului $ABCD$ este egală cu 12.

807. Numerele reale a şi b satisfac egalitatea $(\cos\ a + \cos\ b)^2 + (\sin\ a + \sin\ b)^2 = 2\cos^2 \frac{a-b}{2}$. Să se indice care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate. ✓ ?

A $a - b \in \{2k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$;

B $a - b \in \{(2k+1)\pi | k \in \mathbb{Z}\}$;

C $a - b \in \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi \middle| k \in \mathbb{Z} \right\}$;

D $a - b \in \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \middle| k \in \mathbb{Z} \right\}$.

808. Folosind notaţiile obişnuite în triunghiul ABC avem $b = 5$, $c = 7$ şi $m(\widehat{B}) = 45°$. Să se indice care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate. ✓ ?

A Există un singur triunghi ABC cu aceste date;

B Există două triunghiuri ABC cu aceste date;

C $\sin A \in \left\{ \frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right\}$;

D $a \in \{2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, 4\sqrt{2}\}$.

809. Mulţimea valorilor parametrului real m pentru care funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln\left(1 + x^2\right) - mx$ este crescătoare pe $\mathbb{R}$ este: ✓ ?

A $(0, \infty)$;

B $(-\infty, -1]$;

C $[-1, 1]$;

D $[-1, \infty)$.

810. Pentru o matrice $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ notăm $\operatorname{tr}(X) = x + t$, suma elementelor de pe diagonala principală a lui X. Pentru matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ limita $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\operatorname{tr}(A^n)}{\det(A^n)}$ este egală cu: ✓ ?

[A] 0; [B] 2; [C] 1; [D] $+\infty$.

811. Fie a un parametru real şi considerăm legea de compoziţie ✓ ?

$$x * y = xy + ax + ay + 1$$

pe $\mathbb{R}$. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate?

[A] Dacă $*$ admite element neutru, atunci a este unic determinat;

[B] Există mai multe valori ale lui a pentru care $*$ admite element neutru;

[C] Dacă e este element neutru pentru $*$, atunci $e = \frac{1}{a}$;

[D] Dacă e este element neutru pentru $*$, atunci $e = -\frac{1}{a}$.

812. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} - x^2$. Să se indice care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate. ✓ ?

[A] $f'(0) = f''(0) = 0$;

[B] 0 nu este punct de extrem local al funcţiei f;

[C] Funcţia f' este strict monotonă;

[D] 0 este punct de extrem global al funcţiei f''.

813. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$ se notează $I_n = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \big(\ln x\big)^n \mathrm{d}x$. Să se indice care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate. ✓ ?

[A] $I_{n+1} + (n+1)I_n = \mathrm{e}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*$;

[B] $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$;

[C] $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n = \mathrm{e}$;

[D] $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n = 1$.

814. Diagonalele unui pătrat $\mathcal{P}_\alpha$ de latură α se află pe axele de coordonate ale unui sistem de coordonate carteziene ($\alpha \in (0, \infty)$). Fie N_α numărul de puncte din interiorul pătratului $\mathcal{P}_\alpha$ având coordonate numere întregi. Să se indice care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate. ✓ ?

[A] Pentru $\alpha = 3$ avem $N_3 = 5$;

[B] Pentru $\alpha = 3$ avem $N_3 = 13$;

[C] Există α astfel încât $N_\alpha = 41$;

[D] Există α astfel încât $N_\alpha = 67$.

Admitere nivel licență, sesiunea iulie 2021

815. Într-un reper cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,1), B(1,3), C(3,2)$. Ecuaţia dreptei OG, unde G este centrul de greutate al triunghiului ABC, este: ✓ ?

A $y = -2x$; B $y = -\dfrac{x}{2}$; C $y = 2x$; D $y = \dfrac{x}{2}$.

816. Relativ la un reper cartezian considerăm vectorul $\vec{v}_t(t, t^2)$ cu $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Să se indice care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate. ✓ ?

A Pentru $t = 2$ vectorul $\vec{v}$ este perpendicular pe vectorul $\vec{a}(-1, \frac{1}{2})$;

B Există t astfel încât $\vec{v}$ să fie coliniar cu vectorul $\vec{b}(17, 19)$;

C Există t astfel încât $\vec{v}$ să fie coliniar cu vectorul $\vec{c}(-1, -1)$;

D Există t astfel încât $\vec{v}$ să fie coliniar cu vectorul $\vec{d}(0, 1)$.

817. Dacă $(-4, 0)$ şi $(1, -1)$ sunt două vârfuri ale unui triunghi de arie 4, atunci cel de-al treilea vârf se poate afla pe dreapta: ✓ ?

A $x + 5y = 0$; B $x + 5y + 8 = 0$; C $x + 5y - 4 = 0$; D $x + 5y + 12 = 0$.

818. Dacă dreapta de ecuaţie $ax + cy - 2b = 0$, cu $a, b, c > 0$, formează un triunghi de arie 2 cu axele de coordonate, atunci: ✓ ?

A a, b, c sunt în progresie geometrică;

B $a, -b, c$ sunt în progresie geometrică;

C $a, 2b, c$ sunt în progresie geometrică;

D $a, -2b, c$ sunt în progresie geometrică.

819. Considerăm funcţia ✓ ?

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \left|\dfrac{1}{2}x - 3\right|, & \text{dacă } x \in (-\infty, -2] \\ x + 3, & \text{dacă } x \in (-2, 1) \\ 3 - 2x, & \text{dacă } x \in [1, \infty). \end{cases}$$

Folosind eventual graficul funcţiei, stabiliţi care din următoarele afirmaţii sunt adevărate.

A f este surjectivă, dar nu este injectivă;

B f este bijectivă;

C f este injectivă, dar nu este surjectivă;

D f nu este nici surjectivă, nici injectivă.

820. Fie familia de funcţii de gradul al doilea $f_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_m(x) = mx^2 - (2m + 1)x + m + 1, \forall x \in \mathbb{R}$, unde $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Valoarea lui $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ pentru care vârful parabolei asociate funcţiei f_m se găseşte pe dreapta de ecuaţie $2x + 3y + 6 = 0$ este: ✓ ?

A $\frac{1}{16}$; B $-\frac{1}{32}$; C $-\frac{1}{24}$; D $-\frac{5}{32}$.

821. Considerăm sistemul de ecuaţii ✓ ?

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 2, \\ x + y + z = 4 \end{cases}$$

unde a este parametru real. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate?

A Determinantul sistemului nu depinde de parametrul a;

B Pentru $a < 0$ sistemul este compatibil determinat;

C Pentru $a = 1$ sistemul este compatibil nedeterminat;

D Pentru $a = 1$ sistemul este incompatibil.

822. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$, unde $a \in \mathbb{R}$. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate? ✓ ?

A Există $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $A^2 = O_2$.

B Există $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $A^2 = I_2$.

C Există $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $A^2 = A$.

D Există $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $A^2 = \big(bbbb\big)$.

823. Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ şirul de termen general $x_n = \dfrac{3^n}{(n+1)!}$. Să se indice care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate. ✓ ?

A Şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este descrescător.

B $0 < x_n < 1$ pentru orice $n \geq 1$.

C $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = 0$.

D $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

824. Fiind dat $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, valoarea limitei $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x$ este ✓ ?

A e^{-2a}; B 1; C e^{2a}; D ∞.

825. Fie $L = \lim\limits_{a\to\infty} \displaystyle\int_0^a xe^{-x}dx$. Să se indice care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate. ✓ ?

A $L = \infty$. B $L = 1$. C $L < e$. D L nu există.

826. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin ✓ ?

$$f(x) = \begin{cases} x^4 + ax + 1, & \text{dacă } x < 1 \\ b + \ln x, & \text{dacă } x \geq 1. \end{cases}$$

Valorile parametrilor reali a şi b pentru care f este derivabilă pe $\mathbb{R}$ sunt:

A $a = 3,\ b = 1.$

B $a = -3,\ b = 1.$

C $a = -3,\ b = -1.$

D $a = 1,\ b = 3.$

827. Dacă r și R sunt razele cercului înscris, respectiv cercului circumscris, unui triunghi care are lungimile laturilor 3, 4 și 5, atunci raportul $\dfrac{r}{R}$ este: ✓ ?

A $\dfrac{2}{5}$; B $\dfrac{5}{2}$; C $\dfrac{4}{5}$; D $\dfrac{1}{5}$.

828. Se consideră triunghiul ABC şi punctele M, N, P astfel încât M este mijlocul laturii AB, $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{AC}$ şi $\overrightarrow{BN} = k\overrightarrow{BC}$. Valoarea parametrului real k, pentru care $\overrightarrow{MP} = 3\overrightarrow{MN}$ este: ✓ ?

A $\dfrac{3}{2}$; B $\dfrac{1}{3}$; C $\dfrac{1}{2}$; D $\dfrac{2}{3}$.

829. Considerăm în $\mathbb{R}$ ecuaţia ✓ ?

$$\log_3 \sqrt{3+x} + \log_9(3-x) = \frac{1}{2}.$$

Mulţimea soluţiilor ecuaţiei este:

A $S = \{0\}$;

B $S = \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$;

C $S = \{-\sqrt{6}, \sqrt{6}\}$;

D $S = \{-\sqrt{12}, \sqrt{12}\}$.

830. Produsul soluţiilor reale ale ecuaţiei $x^2 + x + 4 = 2\sqrt{x^2 + x + 7}$ este: ✓ ?

A 12; B -12; C 2; D -2.

831. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = x + |x^3 - x^2| + \max\{x^3, x^4\}$. Să se indice care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate. ✓ ?

A $f(x) = x^4 - x^3 + x^2 + x$ oricare ar fi $x \in (-\infty, 0)$.

B $f(x) = x^2 - x$ oricare ar fi $x \in [0, 1]$.

C Funcţia f nu este derivabilă în 0.

D Tangenta la graficul lui f în punctul $O(0, 0)$ este prima bisectoare.

832. Se consideră mulţimea ✓ ?

$$A := \{a \in \mathbb{R} \mid \text{funcţia } f\colon [a, \infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = x^4 - 10x^2 + 2021 \text{ este strict crescătoare}\}.$$

Să se indice care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate.

A $A = \emptyset$.

B $[3, \infty) \subseteq A$.

C Mulţimea A are un cel mai mic element.

D $2 \notin A$.

833. Mulţimea valorilor parametrului real a pentru care ecuaţia $x^2(1-\ln x) = a$ are două soluţii reale distincte este: ✓ ?

A $(\sqrt{e}, e)$; B $\left(-\infty, \frac{e}{2}\right)$; C $\left(0, \frac{e}{2}\right)$; D $\left[0, \frac{e}{2}\right]$.

834. Dacă $\cos x = -\frac{7}{25}$ şi $x \in \left(\frac{5\pi}{2}, 3\pi\right)$, atunci: ✓ ?

A $\cos\frac{x}{2} = \frac{3}{5}$; B $\cos\frac{x}{2} = \frac{4}{5}$; C $\cos\frac{x}{2} = -\frac{3}{5}$; D $\cos\frac{x}{2} = -\frac{4}{5}$.

835. Folosind notaţiile obişnuite în triunghiul ABC avem $a = 13$, $b = 1$ şi $\mathrm{tg}\frac{C}{2} = \frac{2}{3}$. Să se indice care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate. ✓ ?

A $c = 4\sqrt{10}$.

B $c = 6\sqrt{5}$.

C $\sin C = \frac{12}{13}$.

D $\mathcal{A}ria\,(ABC) = 6$.

836. Dacă a este un parametru şi ecuaţia $\cos 2x + a \sin x - 2a + 7 = 0$ are soluţii, atunci: ✓ ?

A $0 < a \leq 5$;

B $2 \leq a \leq 6$;

C pentru $a = 5$ mulţimea soluţiilor este $S = \left\{(-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\}$;

D pentru $a = 5$ mulţimea soluţiilor este $S = \left\{(-1)^k \frac{\pi}{3} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\}$.

837. Fie $\alpha \neq 1$ o rădăcină a ecuaţiei $z^3 = 1$. Stabiliţi care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate: ✓ ?

A $|\alpha| = 1$.

B $1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} \notin \mathbb{R}$.

C $\alpha^{2021} = -\alpha - 1$.

D Numărul $-\alpha$ este rădăcină a ecuaţiei $z^2 - z + 1 = 0$.

838. În inelul $(\mathbb{Z}_{12}, +, \cdot)$ ecuaţia $x^2 + \widehat{4}x + \widehat{3} = \widehat{0}$ ✓ ?

A nu are soluţii;

B nu are soluţie unică;

C are exact două soluţii distincte;

D are exact patru soluţii distincte.

839. Considerăm expresia ✓ ?

$$x * y = \frac{xy - 2}{x + y - 4}.$$

Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate?

A $*$ este lege de compoziţie pe $\mathbb{R}$;

B $*$ este lege de compoziţie pe $(2, +\infty)$;

C $3 * (3 * 3) = \frac{18}{5}$;

D $x * 4 = x$ pentru orice $x > 3$.

840. Valoarea integralei $\displaystyle\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \sqrt{(1-\cos x)(1-\cos 2x)}\,\mathrm{d}x$ este: ✓ ?

A 0.

B $\dfrac{4}{3}$.

C $\dfrac{2}{3}$.

D $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$.

841. Fie funcţia $f\colon (-1,\infty) \to \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = \mathrm{e}^x - 1 - \ln(1+x)$ şi fie $a, b \in (-1,\infty)$ cu $a < b$. Să se indice care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate. ✓ ?

A Funcţia f are un singur punct de minim global;

B Funcţia f este injectivă;

C $\displaystyle\int_a^b (1+\ln(1+x))\mathrm{d}x < \int_a^b \mathrm{e}^x \mathrm{d}x$;

D Funcţia f are cel puţin un punct de maxim global.

842. În sistemul de coordonate xOy se consideră punctele $A(-6,2)$, $B(4,-3)$, $M(\alpha,0)$ şi $N(0,\beta)$. Dacă suma $AM + MB + BN + NA$ este minimă, atunci: ✓ ?

A $MN = 0$;

B $MN = 1$;

C $MN = \sqrt{2}$;

D $MN = \sqrt{5}$.

843. Fie $A = \{1, 2, \ldots, 99, 100\}$. Câte sume egale cu 5044 se pot forma cu elementele mulţimii A (sumele neconţinând repetiţii de elemente)? ✓ ?

A 3;

B 4;

C 5;

D 6.

844. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$ se notează $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$. Să se indice care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate. ✓ ?

A $I_n + I_{n+1} = \dfrac{1}{2n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.

B $\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n = 0$.

C $\displaystyle\lim_{n\to\infty} nI_n = \frac{1}{2}$.

D $\displaystyle\lim_{n\to\infty} nI_n = \frac{1}{4}$.

6

Concurs

Subiect Concurs Mate-Info UBB 2024

845. În paralelogramul $ABCD$ avem $AB = 1$, $AD = 2$ și $m(\widehat{B}) = 60°$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

[A] $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 1$; [B] $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 1$; [C] $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AD} = -1$; [D] $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CD} = 1$.

846. Dacă punctele $A(1, 2)$ și $B(4, 6)$ sunt vârfurile dreptunghiului $ABCD$, atunci ecuația dreptei AD este: ✓ ?

[A] $4x + 3y - 11 = 0$; [C] $4x - 3y + 2 = 0$;
[B] $3x + 4y - 11 = 0$; [D] $4x + 3y + 2 = 0$.

847. Fie $\overrightarrow{i}$ și $\overrightarrow{j}$ versorii unui sistem cartezian. Dacă vectorii $\overrightarrow{u} = 2\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j}$ și $\overrightarrow{v} = (b + 4)\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}$ sunt perpendiculari, atunci valoarea parametrului $b \in \mathbb{R}$ este: ✓ ?

[A] -2; [B] -1; [C] 1; [D] 2.

848. Dacă matricea $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ satisface relația $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, atunci suma elementelor lui X este: ✓ ?

[A] -2; [B] 0; [C] 2; [D] 4.

849. Considerăm sistemul de ecuații ✓ ?

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ x - 2y + az = a, \\ 3x + 2y + z = 2 \end{cases}$$

unde a este un parametru real. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

A. Există un singur $a \in \mathbb{R}$ pentru care sistemul este incompatibil;

B. Sistemul este compatibil pentru orice $a \in \mathbb{R}$;

C. Dacă determinantul sistemului este 16, atunci soluția sistemului este $x = \frac{7}{8}, y = -\frac{1}{2}, z = \frac{3}{8}$;

D. Dacă determinantul sistemului este 16, atunci soluția sistemului este $x = \frac{1}{4}, y = \frac{3}{4}, z = -\frac{1}{4}$.

850. Valoarea limitei $\lim\limits_{x\to 0} \left(1 + x^2 e^x\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$ este: ✓ ?

A. $\sqrt{e}$; B. 1; C. e; D. e^2.

851. Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$ și fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcția definită prin ✓ ?

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \leq 0 \\ a e^{-x} + b e^{x} + cx\left(e^{x} - e^{-x}\right), & \text{dacă } 0 < x < 1 \\ e^{2-x}, & \text{dacă } x \geq 1. \end{cases}$$

Dacă f este continuă pe $\mathbb{R}$, atunci valoarea sumei $a + 2b + c$ este:

A. 0; B. 2; C. 1; D. $\frac{1}{2}$.

852. Fie $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ cu $\sin(x) = \frac{1}{3}$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A. $\cos(x) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$;

B. $\sin(2x) = -\frac{4\sqrt{2}}{9}$;

C. $\cos(2x) = \frac{7}{9}$;

D. $\text{tg}(x) = -2\sqrt{2}$.

853. În triunghiul ABC avem $D \in (AB)$, $DB = 2 \cdot AD$, $E \in (AC)$ și $AC = 3 \cdot EC$. Dacă punctele A, D și E au coordonatele $A(0,6)$, $D(4,4)$ și $E(-4,2)$, atunci coordonatele centrului de greutate G al triunghiului ABC sunt: ✓ ?

A. $G(2,2)$; B. $G\left(\frac{20}{9}, \frac{20}{9}\right)$; C. $G(0,0)$; D. $G\left(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

854. Numerele reale $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{98}, a_{99}, a_{100}$ sunt în progresie aritmetică și ✓ ?

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{98} + a_{99} + a_{100} = a_2 + a_4 + a_6 + \ldots + a_{96} + a_{98} + a_{100} = 200.$$

Notăm cu d rația progresiei aritmetice. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

A. $d > 0$;

B. $d < 0$;

C Progresia aritmetică este unic determinată de condițiile date;

D Nu există astfel de progresie aritmetică.

855. Dacă $x > 0$ și al treilea termen al dezvoltării $\left(\dfrac{1}{x} + (\sqrt{x})^{1+\lg x}\right)^5$ este 10000, atunci ✓ ?

A $x \in \left\{\frac{1}{10}, 10\right\}$;

B $x \in \left\{\frac{1}{1000}, 1000\right\}$;

C $x \in \left\{\frac{1}{10}, 1000\right\}$;

D $x \in \left\{\frac{1}{1000}, 10\right\}$.

856. Dacă notăm cu S mulțimea soluțiilor reale ale ecuației ✓ ?

$$\sqrt{x - 6\sqrt{x+1} + 10} + \sqrt{x + 6\sqrt{x+1} + 10} = 6,$$

atunci

A $3 \in S$;

B $15 \in S$;

C mulțimea S este finită;

D mulțimea S este infinită;

857. Fie $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ funcția definită prin $f(x) = 3x + 4\sqrt{1 - x^2}$. Notăm cu a cea mai mică valoare a lui f și cu b cea mai mare valoare a lui f. Atunci lungimea intervalului $[a, b]$ este: ✓ ?

A 2; B 6; C 8; D 10.

858. Notăm cu I valoarea integralei $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^3 + x^2 + x + 1}$. Să se precizeze care dintre următoarele afirmații sunt adevărate. ✓ ?

A $I > \dfrac{\pi}{8}$; B $I < \dfrac{\pi}{8}$; C $I < \dfrac{1}{4}\ln 2$; D $I > \dfrac{1}{4}\ln 2$.

859. În triunghiul ABC avem $A(3, 4)$ și $B(2, 1)$, iar $D(0, 2)$ este mijlocul segmentului BC. Aria triunghiul ABC este egală cu: ✓ ?

A 1; B 3; C 5; D 7.

860. Dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - x$ şi $S = \{x \in \mathbb{R} \mid f(f(x)) = 0\}$, atunci ✓ ?

A $1 \in S$;

B $-1 \in S$;

C există exact două numere iraționale în S;

D există un singur număr irațional în S.

861. Dacă z este un număr complex astfel încât $z^2 = i$, atunci $(z^3 + \overline{z})^2$ este egal cu ✓ ?

A $-2i$; B $2i$; C 2; D 0.

862. Valoarea limitei $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+n)^2}\right)$ este: ✓ ?

A 0; B 1; C $\frac{1}{2}$; D $\frac{1}{4}$.

863. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}$. Aria mulțimii plane cuprinse între graficul lui f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=-1$ și $x=1$ este: ✓ ?

A $\sqrt{2}-\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$;
B $\sqrt{2}$;
C $\sqrt{2}+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$;
D $2\sqrt{2}-\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$.

864. În rombul $ABCD$ avem $E\in(BC)$, $BE=2\cdot EC$, $F\in(DC)$ și $FD=3\cdot FC$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}$;
B $\overrightarrow{BE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$;
C $\overrightarrow{DF}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$;
D $\overrightarrow{EF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$.

865. În triunghiul ABC avem $A(2,13)$, $B(-7,1)$ și $C(7,1)$. Știind că AD este bisectoare cu $D\in(BC)$, lungimea segmentului BD este: ✓ ?

A $\frac{13}{2}$; B 7; C $\frac{15}{2}$; D 8.

866. Dacă funcția $f\colon(\mathbb{Z}_8,+)\to(\mathbb{Z}_{12},+)$ este morfism de grupuri și $f(\hat{5})=\hat{9}$, atunci ✓ ?

A $f(\hat{1})=\hat{0}$;
B $f(\hat{1})=\hat{9}$;
C $f(\hat{1})$ nu este unic determinat de condițiile date;
D nu există astfel de morfism.

867. Notăm cu A mulțimea tuturor perechilor de numere reale (x,y) cu proprietatea că $0\le x<y$ și $\frac{x}{2024^x}=\frac{y}{2024^y}$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A Mulțimea A este vidă;
B Mulțimea A conține un singur element;
C Mulțimea A conține o infinitate de elemente;
D Mulțimea A conține un element de forma $(x,1)$.

868. Fie $a\in\mathbb{R}$ și fie $(x_n)_{n\ge0}$ șirul definit prin $x_0=a$ și $x_{n+1}=x_n+x_n^2$ oricare ar fi $n\ge0$. Mulțimea tuturor valorilor lui a pentru care șirul este convergent este: ✓ ?

$\boxed{\text{A}}$ $\{-1, 0\}$; $\boxed{\text{B}}$ $[-1, 0]$; $\boxed{\text{C}}$ $[0, 1]$; $\boxed{\text{D}}$ $(-\infty, 0]$.

Subiect Concurs Mate-Info UBB 2023

Fie $A(2,2)$ şi $B(-3,7)$ vârfurile triunghiului ABC iar $G(-2,5)$ centrul de greutate al triunghiului ABC. Problemele **869.** şi **870.** se referă la acest triunghi ABC.

869. Coordonatele vârfului C sunt ✓ ?

A $C(5,6)$; B $C(-5,6)$; C $C\left(\frac{2}{3},3\right)$; D $C(5,-6)$.

870. Panta dreptei perpendiculare pe dreapta AG este ✓ ?

A $-\frac{4}{3}$; B $-\frac{3}{4}$; C $\frac{3}{4}$; D $\frac{4}{3}$.

871. Valoarea limitei $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - \sin x - \cos x}{x^2}$ este: ✓ ?

A 0; B $\frac{1}{2}$; C 1; D $+\infty$.

872. Aria triunghiului ABC este 6. Dacă laturile sale sunt de lungimi $AB = 8$ şi $AC = 3$, atunci măsura unghiului BAC poate fi: ✓ ?

A $30°$; B $60°$; C $120°$; D $150°$.

873. Aria mulţimii plane cuprinsă între graficul funcţiei $f : [1, e] \to \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = x^2 \ln x$, axa Ox şi dreapta de ecuaţie $x = e$ este: ✓ ?

A $\frac{1}{9}$; B $\frac{1}{3}$; C $\frac{1+e^3}{9}$; D $\frac{1+2e^3}{9}$.

874. Dacă notăm cu S mulţimea soluţiilor reale ale ecuaţiei ✓ ?

$$\log_2 x + \log_4 x^2 + \log_8 x^3 + \log_{16} x^4 = 2,$$

atunci

A $S \subseteq [0,1)$;

B $S \subseteq (1,2]$;

C S are exact două elemente;

D S are exact un element.

875. Considerăm mulţimea ✓ ?

$$S = \{m \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2(m^2+1)x + (m+1)^4 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}\}.$$

Care dintre următoarele afirmaţii sunt corecte?

$\boxed{A}$ $1 \in S$; $\boxed{B}$ $-1 \in S$; $\boxed{C}$ $S = [0, \infty)$; $\boxed{D}$ $S = \mathbb{R}$.

876. Considerăm funcţia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ✓ ?

$$f(x) = \begin{cases} -x^2, & \text{dacă } x \in (-\infty, -1), \\ 1, & \text{dacă } x \in [-1, 1], \\ x^2, & \text{dacă } x \in (1, \infty). \end{cases}$$

Care dintre următoarele afirmaţii sunt corecte?

$\boxed{A}$ f este injectivă;
$\boxed{B}$ f este surjectivă;
$\boxed{C}$ f este crescătoare;
$\boxed{D}$ f este bijectivă.

877. Fie $ABCD$ un dreptunghi cu laturile $AB = 4\sqrt{3}$ şi $BC = 4$. Atunci ✓ ?

$\boxed{A}$ $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$;
$\boxed{B}$ $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 16\sqrt{3}$;
$\boxed{C}$ $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD} = 24$;
$\boxed{D}$ $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD} = 48$.

878. Fie dreptele $d_1 : x - 3y + 2 = 0$, $d_2 : (m+1)x - (2m-3)y + 4 = 0$ şi $d_3 : mx + y + m + 1 = 0$, unde m este un parametru real. Care dintre afirmaţiile următoare sunt adevărate? ✓ ?

$\boxed{A}$ Dreptele d_1 şi d_2 sunt paralele pentru $m = -6$.
$\boxed{B}$ Dreptele d_2 şi d_3 nu sunt paralele pentru nici o valoare a lui m.
$\boxed{C}$ Dreptele d_1, d_2 şi d_3 sunt concurente pentru o singură valoare a lui m.
$\boxed{D}$ Dreptele d_1, d_2 şi d_3 sunt concurente pentru două valori ale lui m.

879. Fie S un punct pe latura PQ a triunghiului PQR astfel încât $\dfrac{PS}{SQ} = \dfrac{1}{2}$ şi fie T mijlocul segmentului SR. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate? ✓ ?

$\boxed{A}$ $\overrightarrow{QT} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{QS} - \overrightarrow{QR})$;
$\boxed{B}$ $\overrightarrow{QT} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{QS} + \overrightarrow{QR})$;
$\boxed{C}$ $\overrightarrow{PS} = \frac{1}{3}\overrightarrow{QP}$;
$\boxed{D}$ $\overrightarrow{RT} = \frac{1}{3}\overrightarrow{RP} + \frac{1}{6}\overrightarrow{RQ}$.

880. Dacă numerele naturale nenule x, y îndeplinesc egalitatea ✓ ?

$$x(y+1)C_{x+y+1}^{y+1} = 30C_{x+y+1}^{x+1},$$

atunci:

A x este unic determinat;
B y este unic determinat;
C $x < 10$;
D $x > 5$.

881. Numărul soluţiilor ecuaţiei $\cos(3\pi x) = 0$ în intervalul $(0, 2023)$ este ✓ ?

A 2022; B 2023; C 6066; D 6069.

882. Considerăm sistemul de ecuaţii ✓ ?

$$\begin{cases} 2x \qquad + 2z = 3 \\ \quad 3x + 2y = 0 \\ 2x + ay + 2z = a + 3 \end{cases},$$

unde a este parametru real. Care dintre următoarele afirmaţii sunt corecte?

A Există $a \in \mathbb{R}$ pentru care determinantul sistemului este 0;
B Există un singur $a \in \mathbb{R}$ pentru care sistemul nu admite soluţii;
C Sistemul admite soluţii pentru orice $a \in \mathbb{R}$;
D Dacă numărul soluţiilor este finit, atunci y nu depinde de a.

883. Fie $A = \begin{pmatrix} i & 2 \\ 0 & i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ şi pentru orice $n \in \mathrm{N}^*$ definim $a_n, b_n, c_n, d_n \in \mathbb{C}$ prin ✓ ?

$$\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} = A^n.$$

Care dintre următoarele afirmaţii sunt corecte?

A $a_n = d_n = i^n$ pentru orice $n \in \mathrm{N}^*$;
B $b_n = 2ni^{n-1}$ pentru orice $n \in \mathrm{N}^*$;
C $b_n = 2^n i^{n-1}$ pentru orice $n \in \mathrm{N}^*$;
D Există $n \in \mathrm{N}^*$ astfel încât numerele a_n, b_n, c_n, d_n să fie toate reale.

884. Valoarea limitei $\lim\limits_{n\to\infty} \ln(1 + \mathrm{e}^n) \cdot \sin\dfrac{1}{n}$ este: ✓ ?

A 0; B 1; C e; D $+\infty$.

885. Pentru fiecare $a > 0$ se notează $I(a) = \displaystyle\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{(x+2)\sqrt{x+1}}$. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate? ✓ ?

A $I(2) = \frac{\pi}{6}$; B $I(2) = \frac{\pi}{3}$; C $\lim_{a\to\infty} I(a) = \frac{\pi}{4}$; D $\lim_{a\to\infty} I(a) = \frac{\pi}{2}$.

Problemele **886. 887.** și **888.** se referă la funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = \frac{x^2 + ax + 5}{\sqrt{x^2+1}}$, unde a este un număr real fixat.

886. Ecuaţia asimptotei la graficul lui f spre $+\infty$ este: ✓ ?

A $y = a$; B $y = x + a$; C $y = x - a$; D $y = x + \frac{a}{2}$.

887. Dacă d este tangenta la graficul lui f în punctul de intersecţie a acestuia cu axa Oy, care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate? ✓ ?

A Dreapta d este paralelă cu dreapta de ecuaţie $y = ax$;

B Pentru $a \neq 0$ dreapta d este paralelă cu dreapta de ecuaţie $y = \frac{1}{a}x$;

C Pentru $a = 0$ dreapta d este paralelă cu axa Ox;

D Pentru $a \neq 0$ dreapta d este perpendiculară pe dreapta de ecuaţie $y = -\frac{1}{a}x$.

888. Mulţimea valorilor lui a pentru care f are trei puncte de extrem local este: ✓ ?

A $(-1, 1)$; B $[-1, 1]$; C $[-2, 2]$; D $(-2, 2)$.

889. Fie $a \in \mathbb{R}$ un parametru real. În mulţimea numerelor reale definim operaţia "$*$" prin ✓ ?

$$x * y = (x - 2023)(y - 2023) + a, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Care dintre următoarele afirmaţii sunt corecte?

A Operaţia "$*$" este asociativă dacă şi numai dacă $a = 2023$;

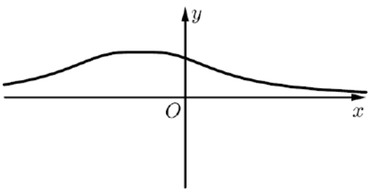
B Dacă $a = 2023$, atunci 2024 este element neutru faţă de "$*$";

C Dacă operaţia "$*$" este asociativă, atunci $(\mathbb{R}, *)$ este grup;

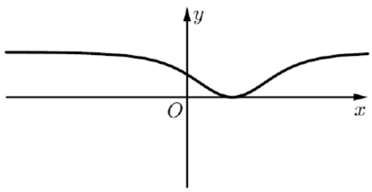
D $((a, +\infty), *)$ este grup pentru orice $a \in \mathbb{R}$.

890. Care dintre graficele de mai jos poate fi graficul funcţiei definite prin ✓ ?

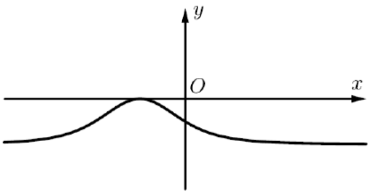
$$f(x) = \cos \frac{\pi}{x^2 + 2x + 3}?$$



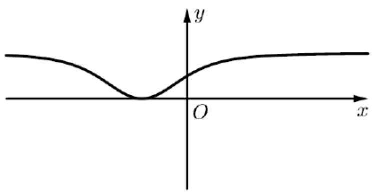
$\boxed{A}$



$\boxed{B}$



$\boxed{C}$



$\boxed{D}$

891. Într-un triunghi unghiul opus celei mai mari laturi este de două ori mai mare decât unghiul opus celei mai mici laturi. Dacă laturile triunghiului sunt numere naturale consecutive, atunci perimetrul triunghiului este: ✓ ?

A 9; B 12; C 15; D 24.

892. Numerele distincte a, b, c sunt în progresie aritmetică, în această ordine, cu raţia r, iar numerele $a-1, b, c+4$ sunt în progresie geometrică, în această ordine, tot cu raţia r. Care dintre următoarele afirmaţii pot fi corecte? ✓ ?

A $b = 0$; B $b = 6$; C $b = -\dfrac{2}{3}$; D $b = -3$.

Subiect Concurs Mate-Info UBB 2022

893. Fie $x = \sin \dfrac{12133}{6}\pi$. Atunci: ✓ ?

[A] $x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; [B] $x = \dfrac{1}{2}$; [C] $x > 0$; [D] $x < 0$.

894. Dacă într-un sistem cartezian de coordonate vârfurile triunghiului ABC au coordonatele $A(2,3)$, $B(-1,1)$, $C(-3,4)$, iar G este centrul de greutate al triunghiului ABC, atunci mijlocul F al segmentului AG are coordonatele ✓ ?

[A] $F(0,0)$; [B] $F(\frac{2}{3}, \frac{17}{6})$; [C] $F(-\frac{2}{3}, \frac{8}{3})$; [D] altă valoare.

895. Numărul soluţiilor ecuaţiei $3\sin x - 2 = 0$ pe intervalul $[0,\pi]$ este ✓ ?

[A] 0; [B] 1; [C] 2; [D] infinit.

896. Considerăm în $\mathbb{R}$ ecuaţia $\sqrt{x^2-3} = x^2 - 5$. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate? ✓ ?

[A] Ecuaţia nu are soluţii;
[B] Ecuaţia are exact două soluţii;
[C] Ecuaţia are exact patru soluţii;
[D] Ecuaţia are numai soluţii pozitive.

897. Numărul termenilor raţionali din dezvoltarea $\left(\sqrt{2} + \sqrt[3]{5}\right)^{300}$ este ✓ ?

[A] 50; [B] 51; [C] 52; [D] 150;

898. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Suma elementelor în matricea A^5 este: ✓ ?

[A] 19; [B] 20; [C] 21; [D] 22.

899. Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale pozitive, cu proprietatea că $(n+1)x_{n+1} - nx_n < 0$, oricare ar fi $n \geq 1$. Atunci limita şirului este: ✓ ?

[A] 1; [B] ∞; [C] nu exită; [D] 0.

900. Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin ✓ ?

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{dacă } x < 0 \\ x^3 + x + \alpha & \text{dacă } x \geq 0, \end{cases}$$

este continuă dacă:

A $\alpha \in \mathbb{R}$;

B $\alpha = 1$;

C $\alpha = 0$;

D $\nexists \alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât f să fie continuă.

901. Ecuaţia tangentei la graficul funcţiei $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ în punctul de abscisă $x = 9$ este: ✓ ?

A $-12y + x - 15 = 0$;

B $12y - x - 15 = 0$;

C $y - 12x - 15 = 0$;

D $y + 12x + 15 = 0$.

902. Mulţimea soluţiilor ecuaţiei ✓ ?

$$4 \cdot \sin x \cdot \cos^3 x - 4 \cdot \sin^3 x \cdot \cos x = 1$$

este

A $\{\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4} \mid k \in \mathbb{Z}\}$;

B $\{\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$;

C $\{\frac{\pi}{8} - k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$;

D $\{\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{8} \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

903. Vârfurile A şi B ale paralelogramului $ABCD$ se găsesc pe dreapta de ecuaţie $3x - y - 4 = 0$, iar punctul de intersecţie O al diagonalelor AC şi BD are coordonatele $(3, 4)$. Dacă coordonatele vârfului A sunt $(0, -4)$, atunci ecuaţia dreptei CD este: ✓ ?

A $x+3y-42 = 0$; B $x - 3y - 6 = 0$; C $3x - y - 6 = 0$; D $y = 3x + 6$.

904. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = 2x - [2x]$, unde prin $[a]$ se notează partea întreagă a lui $a \in \mathbb{R}$. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate? ✓ ?

A f are perioada $\frac{1}{2}$;

B f este injectivă;

C f este surjectivă;

D f este pară.

905. Fie suma $S_n = i + 2i^2 + 3i^3 + \cdots + ni^n, n \in \mathbb{N}^*$, unde i este unitatea imaginară $(i^2 = -1)$. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate? ✓ ?

A S_{2020} este un număr real;

B $|S_{2020}|$ este un număr iraţional;

C Partea imaginară a lui S_{2022} este egală cu 1011;

D $|S_{2022}| = 1011$.

906. Fie $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ soluţia sistemului de ecuaţii ✓ ?

$$\begin{cases} \log_{225} x + \log_{64} y \\ = 0 \\ \log_x 225 - \log_y 64 \\ = 1. \end{cases}$$

Valoarea expresiei $\log_{30}\left(x^3\right) - \log_{30} y$ este egală cu:

A 0; B 12; C 1; D 10.

907. Suma soluţiilor ecuaţiei $6^{x+1} - 4^x = 3^{2x}$ este ✓ ?

A -1; B 0; C 1; D 2.

908. Punctul $A(3,1)$ este vârful unui pătrat în care o diagonală se află pe dreapta de ecuaţie $y - x = 0$. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate? ✓ ?

A Distanţa de la vârful A la această diagonală este egală cu 2;

B Ecuaţia dreptei pe care se află cealaltă diagonală este $x + y + 2 = 0$;

C Aria pătratului este 4;

D Punctul $C(1,3)$ este de asemenea vârf al pătratului.

909. Fie triunghiul ABC, în care notăm $BC = a, AC = b, AB = c$. Presupunem că lungimea medianei AM este egală cu c. Atunci: ✓ ?

A $a^2 + 2c^2 = 3b^2$; B $a^2 + 2c^2 = 2b^2$; C $\cos C = \frac{4a}{3b}$; D $\cos C = \frac{3a}{4b}$.

910. Valoarea limitei $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{\sin^2 x}\right)$ este: ✓ ?

A $-\dfrac{1}{3}$; B -1; C 0; D $\dfrac{1}{2}$.

911. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate? ✓ ?

A $f(-1) = -\dfrac{\pi}{2}$;

B $f(x) = \dfrac{\pi}{2}$, pentru orice $x \in (0, \infty)$.

C Funcţia f este impară;

D $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

912. Numărul soluţiilor reale ale ecuaţiei $xe^x = -\dfrac{1}{3}$ este: ✓ ?

A 0; B 1; C 2; D 3

913. Fie ABC un triunghi şi $A' \in [BC]$, $B' \in [CA]$, $C' \in [AB]$ astfel încât $\dfrac{BA'}{BC} = \dfrac{CB'}{CA} = \dfrac{AC'}{AB} = \alpha$. Dacă $\mathcal{A}_{A'B'C'}$ este aria triunghiului $A'B'C'$, atunci ✓ ?

A $\frac{\mathcal{A}_{A'B'C'}}{\mathcal{A}_{ABC}} = 1 - 3\alpha(1-\alpha)$;

B $\frac{\mathcal{A}_{A'B'C'}}{\mathcal{A}_{ABC}} \in \left[\frac{1}{4}, 1\right]$;

C $\frac{\mathcal{A}_{A'B'C'}}{\mathcal{A}_{ABC}} = 1 - 12\alpha^2(1-\alpha)^2$;

D $\frac{\mathcal{A}_{A'B'C'}}{\mathcal{A}_{ABC}} \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

914. Valoarea limitei $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\displaystyle\int_1^{\operatorname{tg} x} e^{t^2} dt}{\displaystyle\int_1^{\operatorname{ctg} x} e^{t^2} dt}$ este ✓ ?

A 1; B π; C 0; D -1.

915. Triunghiul ABC în care are loc relaţia $\sin(B) + \cos(B) = \sin(C) + \cos(C)$ este: ✓ ?

A dreptunghic;

B isoscel;

C echilateral;

D dreptunghic sau isoscel.

916. Fie $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ şirul definit prin ✓ ?

$$a_n = \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}} + \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^3}} + \cdots + \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{n}{n^3}}, \text{ pentru fiecare } n \in \mathbb{N}^*.$$

Se notează cu $\ell = \lim\limits_{n \to \infty} a_n$. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate?

A $\ell = 0$; B $\ell = \frac{\sqrt{2}}{3}$; C $\ell \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \mathbb{Q}$; D $\ell = \infty$.

917. Două laturi ale unui dreptunghi se află pe dreptele date prin ecuaţiile: ✓ ?

$$(d_1) : 2x - 3y + 5 = 0$$

$$(d_2) : 3x + 2y - 7 = 0$$

şi unul din vârfurile sale este punctul $A(2, -3)$. Ecuaţiile dreptelor pe care se află celelalte două laturi ale dreptunghiului sunt:

A $2x - 3y - 13 = 0$ şi $3x + 2y = 0$;

B $y + 3 = \frac{2}{3}(x - 2)$ şi $y + 3 = -\frac{3}{2}(x - 2)$;

C $2x - 3y + 13 = 0$ şi $3x - 2y = 0$;

D $y - 3 = \frac{2}{3}(x - 2)$ şi $y - 3 = -\frac{3}{2}(x - 2)$.

918. Considerăm $\alpha \in \mathbb{C}$ un parametru şi sistemul de ecuaţii liniare cu 3 necunoscute ✓ ?

$$\begin{cases} 2x + \alpha y + 2z = 1 \\ 4x - y + 5z = 1. \\ 2x + 10y + z = 1 \end{cases}$$

Stabiliţi valoarea de adevăr a următoarelor afirmaţii:

A Matricea sistemului are rang 3 pentru orice valoare a lui α;

B Matricea extinsă a sistemului are rang 3 pentru orice valoare a lui α;

C Sistemul dat este incompatibil dacă şi numai dacă $\alpha \neq 3$;

D Sistemul dat este compatibil dacă şi numai dacă $\alpha \neq 3$.

919. Fie $G \subseteq \mathbb{R}$ o mulţime astfel încât expresia ✓ ?

$$x * y = \frac{xy}{2xy - x - y + 1}, \forall x, y \in G$$

defineşte o lege de compoziţie pe G. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate?

A G poate fi intervalul $(0, 2)$;

B G poate fi intervalul $(0, 1)$;

C Dacă $G = (0, 1)$, atunci „$*$” admite un element neutru;

D Dacă $G = (0, 1)$, atunci simetricul lui $\dfrac{1}{3}$ este $\dfrac{2}{3}$.

920. Valoarea integralei ✓ ?

$$\int_{\frac{1}{2022}}^{2022} \frac{\ln x}{1 + x^2}\, \mathrm{d}x$$

este:

A 0; B 1; C 2; D 3.

921. Fie $x, y, z \in \mathbb{Z}^*$ astfel încât xy, yz, zx sunt în progresie geometrică cu raţia un număr întreg diferit de 1. ✓ ?

A Dacă y este pătrat perfect, atunci şi z este pătrat perfect;

B Dacă z este pătrat perfect, atunci şi y este pătrat perfect;

C Dacă y este pătrat perfect, atunci şi x este pătrat perfect;

D Dacă z este pătrat perfect, atunci şi x este pătrat perfect.

922. Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ şirul definit prin $x_n = \displaystyle\int_0^2 \frac{(2-x)^{2n-1}}{(2+x)^{2n+1}}\, \mathrm{d}x$, pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate? ✓ ?

A $x_{23} = \frac{1}{184}$; B $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 x_n = 1$; C $\lim\limits_{n\to\infty} n x_n = \dfrac{1}{8}$; D $\lim\limits_{n\to\infty} n x_n = 0$.

Subiect Concurs Mate-Info UBB 2021

923. Fie $(a_n)_{n\geq 0}$ un şir de numere reale nenule în progresie geometrică, cu raţia $r \in \mathbb{R}$. ✓ ?
Ştiind că expresia
$$E = \frac{4a_4}{a_2} + \frac{4a_8}{a_7} + \frac{a_5 \cdot a_7}{a_6^2}$$
are valoarea minimă posibilă, să se indice care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate.

A $r = \dfrac{1}{2}$;

B $\left|\dfrac{a_{12}}{a_9}\right| < \dfrac{1}{4}$;

C $a_5a_2 + 2a_1a_5 + a_0a_5 > 0$;

D $a_na_{n+1} < 0$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

924. Fie dreptele d_1 şi d_2 respectiv de ecuaţii $x-3y+1=0$ şi $3x+y+2=0$, a un număr real şi P punctul de coordonate $(0, a)$. Punctul P este egal depărtat de dreptele d_1 şi d_2, dacă a ia valoarea ✓ ?

A $-\dfrac{1}{4}$;

B 0;

C $\dfrac{1}{4}$;

D $\dfrac{3}{2}$;

925. Mulţimea soluţiilor ecuaţiei $A_x^6 - 24xC_x^4 - 11A_x^4 = 0$ este ✓ ?

A $\{1\}$; B $\{9\}$; C $\{5\}$; D $\{1, 9\}$.

926. Fie $x > 0$. Coeficientul binomial al termenului care îl conţine pe x^6 din dezvoltarea binomului ✓ ?
$$\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt[5]{x}}\right)^{2021}$$
este

A C_{2021}^{1435}; B C_{2021}^{586}; C C_{2021}^{587}; D C_{2021}^{1434}.

927. Fie M, N, P respectiv Q mijloacele laturilor $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ respectiv $[DA]$ al patrulaterului oarecare $ABCD$. Atunci ✓ ?

A $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}$

B $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{0}$;

C $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$;

D $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CA}$.

928. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ şirul de termen general ✓ ?
$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 + \frac{n}{n}\right).$$
Să se indice care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate.

A $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$; B $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} < 1$; C $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ln 2$; D $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

929. Dacă $\log_{12} 27 = a$, atunci valoarea lui $\log_6 16$ este: ✓ ?

A 4; B $\frac{4(3-a)}{3+a}$; C $\frac{4+a}{4-a}$; D $\frac{4(3+a)}{3-a}$.

930. Pe intervalul $(-1,1)$ definim legea de compoziţie „$*$" prin $x * y = \frac{x+y}{1+xy}$, pentru orice $x, y \in (-1,1)$. Să se indice care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate. ✓ ?

A Elementul neutru în raport cu „$*$" este $\frac{1}{2}$;

B $\frac{1}{3} * \left(\frac{1}{3} * \frac{1}{3}\right) = \frac{5}{9}$;

C Legea de compoziţie „$*$" este asociativă;

D Simetricul lui $\frac{1}{3}$ în raport cu „$*$" este $\frac{1}{9}$.

931. Fie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcţia definită prin ✓ ?

$$f(x) = \begin{cases} x^4 + a, & x \in (-\infty, 0], \\ bx^3, & x \in (0, \infty), \end{cases}$$

unde $a, b \in \mathbb{R}$ sunt parametri. Să se indice care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate.

A Dacă $a = 0$ şi $b \in \mathbb{R}$, atunci funcţia f este continuă pe $\mathbb{R}$;

B Dacă $a = 1$ şi $b = -1$, atunci funcţia f este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$;

C Dacă $a = 1$ şi $b = -1$, atunci funcţia f este discontinuă în 0;

D $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ oricare ar fi $a, b \in \mathbb{R}$.

932. Dacă $\cos x = -\frac{1}{7}$ şi $\cos y = -\frac{13}{14}$, unde $x, y \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$, atunci diferenţa $x - y$ poate fi ✓ ?

A $-\frac{\pi}{3}$; B $\frac{\pi}{6}$; C $\frac{\pi}{3}$; D $\frac{2\pi}{3}$.

933. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$ se defineşte funcţia $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ prin $f_n(x) = (2-x)^n$, $x \in \mathbb{R}$. Să se indice care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate. ✓ ?

A $0 < f_n(x) < 1$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ şi orice $x \in [1,2]$;

B $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, pentru orice $x \in [1,2]$;

C Şirul $\left(f_n(4)\right)_{n\geq 1}$ are un subşir crescător;

D $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(4) = \infty$.

934. Fie ABC un triunghi nedegenerat astfel încât lungimea segmentului $[BC]$ este $\sqrt{3}$, măsura unghiului $\widehat{B}$ este $60°$ şi lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC este 1. Să se indice care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate. ✓ ?

A Aria triunghiului ABC este $\frac{3\sqrt{3}}{2}$;

B Perimetrul triunghiului ABC este $3\sqrt{3}$;

C Triunghiul ABC este echilateral;

D Lungimea razei cercului înscris triunghiului ABC este $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

935. Considerăm ecuaţiile dreptelor $d_1 : x = 1$ şi $d_2 : y = 1$ într-un plan cu un sistem de coordonate carteziene cu originea în O. Oricare ar fi A, B, C puncte în plan astfel încât O, A, B, C sunt vârfurile unui pătrat având una dintre diagonale $[AB]$ cu $A \in d_1$ şi $B \in d_2$, avem: ✓ ?

A $C \in d$, unde $d : x - y = 0$;

B Distanţa dintre A şi B este cel puţin egală cu $\sqrt{2}$;

C $C \in d$, unde $d : x + y = 2$.

D Aria pătratului determinat de O, A, B, C este cel puţin egală cu 1.

936. Fie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcţia definită prin $f(x) = \sqrt[3]{x+2} - \sqrt[3]{x}$. Să se indice care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate. ✓ ?

A Funcţia f este derivabilă în punctul $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}$;

B Funcţia f are exact un punct de extrem local;

C Funcţia f are cel puţin un punct de minim global;

D $\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{7} < 2\sqrt[3]{5}$.

937. Relativ la un reper cartezian ortonormat al planului, se consideră punctele $A(7, 5)$, $B(9, 1)$. Mediatoarea segmentului $[AB]$ este $d : x - 2y = 2$. Notăm cu $\mathcal{C}$ mulţimea tuturor cercurilor având centrul pe dreapta d, şi care trec prin A şi B. Să se indice care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate. ✓ ?

A Există în $\mathcal{C}$ un cerc cu aria egală cu π;

B Există în $\mathcal{C}$ un cerc cu aria egală cu 17.

C Există în $\mathcal{C}$ un cerc care intersectează fiecare axă de coordonate în exact un punct;

D Pentru punctul $D(3, 3)$, cercul circumscris triunghiului ABD se află în $\mathcal{C}$;

938. Se consideră ecuaţia matriceală ✓ ?

$$\begin{pmatrix} 2 & 3a & 1 & -1 \\ 1 & 2 & a & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

în care toate matricele care apar sunt considerate matrice cu elemente numere reale. Să se indice care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate.

A Indiferent ce valoare ia parametrul $a \in \mathbb{R}$, nu există matrice din $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ care să verifice (1);

B Dacă $a \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$, atunci ecuaţia (1) are cel puţin o soluţie;

C Ecuaţia (1) are cel puţin o soluţie pentru orice $a \in \mathbb{R}$;

D Dacă $\begin{vmatrix} 2 & 3a & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$, atunci ecuaţia (1) nu are nicio soluţie.

939. Se notează cu ℓ valoarea limitei $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x)^{\operatorname{tg} x}$. Să se indice care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate. ✓ ?

A $\ell = \infty$; B $\ell < 1$; C $\ell \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; D $\ell \in (2, \infty)$.

940. Fie v valoarea minimă a expresiei $E(x, y) = x^2 + 2y^2$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, unde x şi y verifică ecuaţia ✓ ?

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Atunci

A $v > 0$; B $v = 1$; C $v < 1$; D $v = -\frac{1}{3}$.

941. Specificaţi care dintre următoarele condiţii implică faptul că dreptele $(d_1) : ax + by + c = 0$, $(d_2) : bx + cy + a = 0$ şi $(d_3) : cx + ay + b = 0$ au cel puţin un punct comun, a, b, c fiind numere reale nenule: ✓ ?

A $a + b + c = 0$;

B $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$;

C $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$;

D $a^2 + b^2 + c^2 = 2(ab + bc + ca)$.

942. Fie $f : \mathbb{R} \to (-\infty, 0)$ o funcţie care admite primitive şi fie F o primitivă a lui f. Valoarea parametrului $m \in \mathbb{R}$ pentru care ✓ ?

$$F(4m^2 - 12m + 5) \geq F(3m^2 - 6m - 4)$$

este:

A $m = 1$; B $m = 2$; C $m = 3$; D $m = 4$.

943. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^*$ definită prin $f(x) = \cos x + i \sin x$. Să se indice care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate.

A f este un morfism de grupuri între grupurile $(\mathbb{R}, +)$ şi $(\mathbb{C}^*, \cdot)$;

B f este injectivă;

C f este surjectivă;

D f este un izomorfism de grupuri între grupurile $(\mathbb{R}, +)$ şi $(\mathbb{C}^*, \cdot)$.

944. Dacă S este mulţimea soluţiilor reale ale inecuaţiei $2\cos^2 x \geq \cos x + 1$, atunci

A $2020\pi \in S$;

B $2021\pi \in S$;

C $\left[\frac{2018\pi}{3}, \frac{2020\pi}{3}\right] \subset S$;

D $20 \in S$.

945. Se notează cu ℓ valoarea limitei $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{1}{t\sqrt{t}} \displaystyle\int_0^t \left(\sqrt{x} + \sin(x^2)\right) \mathrm{d}x$. Să se indice care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate.

A $\ell = 0$; B $\ell = \dfrac{2}{3}$; C $\ell = \infty$; D $\ell = \pi$.

946. Să presupunem că există numere complexe a, b, c, d diferite de zero, astfel încât $z \in \mathbb{C}$ satisface ecuaţiile $az^3 + bz^2 + cz + d = 0$ și $bz^3 + cz^2 + dz + a = 0$. În acest caz, toate valorile posibile (complexe) ale lui z sunt:

A $\{i, -i\}$; B $\{1, -1\}$; C $\{1, i, -1\}$; D $\{1, i, -1, -i\}$.

947. Fie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcţia definită prin

$$f(x) = |x - 2k|, \quad \text{pentru orice } x \in (2k-1, 2k+1] \text{ şi orice } k \in \mathbb{Z}.$$

Să se indice care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate.

A Funcţia f nu este continuă pe $\mathbb{R}$;

B Funcţia f este derivabilă pe $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$;

C Funcţia f este derivabilă pe $\mathbb{R}$;

D uncţia f nu este continuă în punctele mulţimii $\{2k - 1 : k \in \mathbb{Z}\}$.

948. Fie $I = \lim\limits_{t\to\infty} \displaystyle\int_0^t \frac{x}{x^4 + 2x^2 + 2} \mathrm{d}x$. Să se indice care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate.

A $I = \infty$; B $I = \frac{\pi}{8}$; C $I = \frac{\pi}{4}$; D $I < \frac{1}{2}$.

949. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcţia definită prin $f(x) = \sqrt[3]{(x^2-1)^2}$ şi fie n numărul punctelor de extrem local ale lui f. Să se indice care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate. ✓ ?

A $n = 0$; B $n = 1$; C $n = 2$; D $n = 3$.

950. În triunghiul ABC mediana din vârful A al triunghiului este egală cu latura BC. Să se indice care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate. ✓ ?

A $5\sin^2 A - \cos 2B - \cos 2C = -2$;

B $5\sin^2 A + \cos 2B + \cos 2C = 2$;

C $3\sin^2 A - 4\sin B \sin C \cos A = 0$;

D $4\sin^2 A - 3\sin B \sin C \cos A = 0$.

951. Un segment MN paralel cu bazele unui trapez, cu capetele segmentului aflate pe cele două laturi neparalele împarte aria trapezului în două părţi egale. Dacă lungimea bazelor este a şi b, $a > b$, atunci pentru lungimea l a segmentului MN avem: ✓ ?

A $l = \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$; B $l = \sqrt{ab}$; C $l > \dfrac{a+b}{2}$; D $l = \dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$.

952. Notăm cu A mulţimea numerelor naturale n care au ultima cifră 6 şi au proprietatea că dacă mutăm această cifră în faţa numărului, obţinem un număr de 4 ori mai mare. Să se indice care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate. ✓ ?

A Dacă $n \in A$, atunci $3 \mid n$;

B Există $n \in A$ astfel încât $12 \mid n$;

C Există $n \in A$ care are 8 cifre;

D Există $n \in A$ care are toate cifrele diferite două câte două.

7

Antrenament

Testul 1

Problemele **953.** și **954.** se referă la polinomul $f = X^3 + aX^2 + 8X + 3, a \in \mathbb{R}$.

953. Pentru a aparținând cărui interval, expresia $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ este mai mică decât 0? ✓ ?

$\boxed{\text{A}}$ $[0, 5]$; $\boxed{\text{B}}$ $[1, 5]$; $\boxed{\text{C}}$ $(-4, 5]$; $\boxed{\text{D}}$ $(-4, 4)$.

954. O valoare a lui a pentru care are loc egalitatea $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 - (x_1^3 + x_2^3 + x_2^3) = 9$ este: ✓ ?

$\boxed{\text{A}}$ 0; $\boxed{\text{B}}$ 1; $\boxed{\text{C}}$ 2; $\boxed{\text{D}}$ 3.

955. Fie triunghiul ABC și punctele M, N, P astfel încât $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{k}\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{PB} = 5\overrightarrow{PC}$ și $\overrightarrow{CN} = \frac{k}{5}\overrightarrow{NA}$, unde $k \in \mathbb{R}$. Valoarea parametrului k pentru care $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MP}$ este: ✓ ?

$\boxed{\text{A}}$ 1; $\boxed{\text{B}}$ $\frac{1}{2}$; $\boxed{\text{C}}$ $\frac{3}{2}$; $\boxed{\text{D}}$ 3.

956. Fie funcția $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = e^x(x^2 - 4x + 1)$ și parametrul $a \in \mathbb{R}$. Pentru a aparținând cărui interval, dreapta de ecuație $y = a$ intersectează graficul funcției f în exact 3 puncte distincte? ✓ ?

$\boxed{\text{A}}$ $\Big(-2e^3, 0\Big)$; $\boxed{\text{C}}$ $\Big(0, \frac{6}{e}\Big)$;

$\boxed{\text{B}}$ $\Big(-2e^3, \frac{6}{e}\Big)$; $\boxed{\text{D}}$ $\Big(\frac{6}{e}, 2e^3\Big)$.

957. Valoarea integralei $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^4 - 16}\mathrm{d}x$ este: ✓ ?

A $-\dfrac{\ln 3}{32}$;

B $-\dfrac{\ln 3}{32} - \dfrac{\arctan(\frac{1}{2})}{16}$;

C $\dfrac{\ln 3}{32} + \dfrac{\arctan(\frac{1}{2})}{16}$;

D $-\dfrac{\ln 3}{16} - \dfrac{\arctan(\frac{1}{2})}{32}$.

958. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcţia definită prin $f(x) = (x^2 + a)^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$, unde a este un parametru real. Considerăm mulţimea ✓ ?

$$M = \{a \in \mathbb{R} \mid f \text{ este convexă}\}.$$

Aceasta este:

A $M = (-\infty, 0]$; B $M = \{0\}$; C $M = [0, +\infty)$; D $M = \mathbb{R}$.

959. Se consideră z un număr complex astfel încât $z^2 + z + 1 = 0$. Rezultatul calculului $z^{2023} + \dfrac{1}{z^{2023}}$ este: ✓ ?

A i; B 1; C -1; D $-i$.

960. Considerăm $\alpha \in \mathbb{C}$ un parametru şi sistemul de ecuaţii liniare cu 4 necunoscute ✓ ?

$$\begin{cases} 2x_1 + \alpha x_2 + 2x_4 = 1 \\ 4x_1 - x_2 + (\alpha+2)x_3 + 5x_4 = 1 \\ 2x_1 + 10x_2 - 5x_3 + x_4 = 1 \end{cases}.$$

Stabiliţi valoarea de adevăr a următoarelor afirmaţii:

A Sistemul dat este incompatibil dacă şi numai dacă $\alpha \neq 3$;

B Pentru $\alpha = -5$ sistemul dat este compatibil;

C Sistemul dat este compatibil dacă şi numai dacă $\alpha \neq 3$;

D Sistemul dat este compatibil dacă şi numai dacă $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{-5, 3\}$.

961. Notăm cu A mulţimea numerelor reale a pentru care funcţia ✓ ?

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{x^2 + a}{x^2 + 1}$$

este convexă într-o vecinătate a originii. Stabiliţi valoarea de adevăr a afirmaţiilor:

A $1 \in A$; B $(-1, 1) \subseteq A$; C $[1, +\infty) \subseteq A$; D $A \neq \mathbb{R}$.

962. Valoarea limitei $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{1}{t^2} \displaystyle\int_0^t (\sqrt{x} + \sin x)dx$ este: ✓ ?

A 0; B 1; C ∞; D π.

963. Valoarea limitei $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\left(1-\frac{x}{n}\right)^n \mathrm{d}x$ este: ✓ ?

A e; B ∞; C 0; D $\frac{e+1}{e}$.

964. Suma soluțiilor pozitive ale ecuației ✓ ?

$$\log_{16} x+\log_x 16=\log_{512} x+\log_x 512$$

poate fi scrisă ca și $\frac{a}{b}$, unde a și b sunt numere naturale și prime între ele. Valoarea sumei $a+b$ este:

A 3257; B 652; C 4161; D 4097;

965. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}^*$ definită prin $f(x)=\cos x+i\sin x$. Stabiliţi care dintre următoarele afirmaţii sunt **false**: ✓ ?

A f este un morfism de grupuri între grupurile $(\mathbb{R},+)$ şi $(\mathbb{C}^*,\cdot)$;

B f este injectivă;

C f este surjectivă;

D f este un izomorfism de grupuri între grupurile $(\mathbb{R},+)$ şi $(\mathbb{C}^*,\cdot)$.

966. Se consideră ecuaţia $X^2=\begin{pmatrix}-3 & 15\\ -1 & 5\end{pmatrix}$, unde $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Stabiliţi care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate: ✓ ?

A Pentru orice soluţie $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, avem $\det(X)=0$;

B Pentru orice soluţie $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, avem $\operatorname{tr}X=\sqrt{2}$, unde $\operatorname{tr}X$ este urma matricei X;

C Ecuaţia are trei soluţii diferite;

D Suma soluţilor ecuaţiei este I_2.

967. Valoarea integralei $\int_0^1 xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ este: ✓ ?

A $\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right)$; B $\frac{1}{2}(e-1)$; C $\frac{1}{2}$; D $1-\frac{1}{e}$.

968. Numărul de soluții reale ale ecuației $\sqrt{3-x}-x=-10$ este: ✓ ?

A 0; B 1; C 2; D 3.

969. Ecuaţia $A_x^6-24xC_x^4-11A_x^4=0$ are soluţia: ✓ ?

A $\{1\}$; B $\{9\}$; C $\{5\}$; D $\{1,9\}$;

Problemele **970.** și **971.** se referă la punctele $A(7,5)$, $B(9,1)$, relative la un reper cartezian ortonormat al planului .

970. Fie punctul $C(5,1)$ și O centrul cercului circumscris triunghiului ABC. Coordonatele punctului O sunt: ✓ ?

A $O\left(7,\frac{7}{3}\right)$; B $O\left(7,\frac{5}{2}\right)$; C $O\left(7,\frac{8}{3}\right)$; D $O\left(7,\frac{5}{3}\right)$.

971. Notăm cu $\mathcal{C}$ mulţimea tuturor cercurilor având centrul pe mediatoarea d a segmentului $[AB]$, şi care trec prin A şi B. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate? ✓ ?

A Există în $\mathcal{C}$ un cerc cu aria interioară egală cu π;

B Există în $\mathcal{C}$ un cerc cu aria interioară egală cu 17;

C Există în $\mathcal{C}$ un cerc care intersectează fiecare axă de coordonate în exact un punct;

D Pentru punctul $D(3,3)$, cercul circumscris triunghiului ABD se află în $\mathcal{C}$.

972. Valoarea limitei $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{kn}}$ este: ✓ ?

A 0; B 1; C 2; D 3;

973. Considerăm elementul $\widehat{5}\in\mathbb{Z}_{14}$. Atunci în inelul $\mathbb{Z}_{14}$ avem: ✓ ?

A $\widehat{5}^3-\widehat{5}+\widehat{1}=\widehat{11}$;

B $\widehat{5}^{13}=\widehat{1}$;

C $\widehat{5}^{2021}=\widehat{5}$;

D $\widehat{5}^{123}+\widehat{5}^{210}=\widehat{0}$.

974. Se consideră polinomul $f=X^{2024}+7X^{2023}+3x^2+3, f\in\mathbb{R}[X]$. Restul împărțirii lui f la polinomul $X+1$ este: ✓ ?

A 0; B $X+12$; C X^2+12X; D X^3+12X^2.

975. Valoarea expresiei $\sin^2 1^\circ+\sin^2 2^\circ+\sin^2 3^\circ+...+\sin^2 89^\circ+\sin^2 90^\circ$ este: ✓ ?

A $\frac{45}{2}$; B 0; C 1; D $\frac{91}{2}$.

976. Valoarea limitei $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}}{n}$ este: ✓ ?

A $\sqrt{2}$; B 1; C 0; D $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Testul 2

977. Valoarea integralei $\displaystyle\int_0^1 t(1-t)^{99}\mathrm{d}t$ este: ✓ ?

A $\dfrac{1}{100}$; B $\dfrac{1}{1000}$; C $\dfrac{1}{10000}$; D $\dfrac{1}{10100}$.

978. Considerăm şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dat de relaţia $a_n = \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sqrt{n^2-k^2}$, şi fie $l = \displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$. ✓ ?

Valoarea lui l este:

A 0; B 1; C $\dfrac{\pi}{2}$; D $\dfrac{\pi}{4}$.

979. Fie segmentul $[AB]$ cu $A\left(2, \dfrac{7}{2}\right)$, $B(x_B, y_B)$ și punctul $C(1,2)$ care aparține acestui segment (AB). Știind că $\dfrac{AC}{CB} = \dfrac{AB}{AC}$, care este valoarea expresiei $(x_b + y_A)^2 - y_B$? ✓ ?

A $\dfrac{94-23\sqrt{5}}{4}$;

B $\dfrac{49}{4} + \dfrac{5\sqrt{5}-6}{1+\sqrt{5}} + \dfrac{6-2\sqrt{5}}{6+2\sqrt{5}}$;

C $\dfrac{49}{4} + \dfrac{5\sqrt{5}-6}{\sqrt{5}+1}$;

D $\dfrac{49-17\sqrt{5}}{4}$.

980. Fie $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție polinomială de gradul 3, având: ✓ ?

$$h(1) = 1,\ h(2) = 2,\ h(3) = 3,\ h(4) = 6,$$

Să se indice care dintre următoarele afirmații sunt adevărate.

A $h(16) = 826$;

B $h(16) < 42$;

C $h(6) = 26$;

D $h(6)\cdot h(2) \le 108$.

981. Dacă $a, b \in (-1, \infty)$, care este valoarea logaritmului $\ln^2 ab$, știind că ✓ ?

$$\log_a(b^a) = \log_b(a^{eb}) = \frac{e}{\sqrt{5}}$$

A $\ln\dfrac{e^2}{5}$; B $\ln^2\dfrac{e}{\sqrt{5}}$; C $\ln^2\dfrac{e}{5}$; D $(1-\ln 5)^2$.

982. Fiind dată matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2x \\ 0 & y & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $x, y \in \mathbb{R}$, să se stabilească care dintre următoarele afirmații sunt false: ✓ ?

A Dacă $x \neq \dfrac{1}{2}, y \in \mathbb{R}^* \Rightarrow rang(A) = 3$;

B $rang(A) = 3$ pentru $x = \frac{1}{2}$ sau $y = 0$;

C $\det(A^2) = y^2(1+2x)^2$;

D $\det(A^2) = y^2[(1+2x)^2 - 8x]$.

983. Fie A_n egal cu numărul total de șiruri de n numere din mulțimea $2023, 2024, 2025$ care nu conțin nicio instanță a secvenței **2024, 2025** (în această ordine), pentru orice $n \in \mathbb{N}*$. Care dintre următoarele relații reprezintă o relație de recurență validă pentru $A_n, n > 1$? ✓ ?

A $A_{n+1} = 3A_n - A_{n-1}$;

B $A_n = 3A_{n-1} - 1$;

C $A_{n+1} = 3A_n$;

D $A_n = A_{n-1} - A_{n-2}$.

984. Dacă γ este o soluție a ecuației $3 - 4\sin x = \sqrt{17 - 24\sin x}$, pentru care $\sin\gamma \in (-1, 0)$, care este valoarea lui $f(\gamma)$, unde $f(x) = \operatorname{tg} x$? ✓ ?

A $f(\gamma) = \frac{1}{4}$;

B $f(\gamma) = -1$;

C $f(\gamma) = 3$;

D $f(\gamma) = \frac{1}{2}$.

985. Notăm cu a_k numărul de cifre din numărul 4^k. Știind că $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 2, a_4 = 3, \cdots$ și că $L = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A $L = \lg 4$;

B $L \geq \log_4 12$;

C $L = \lg \sqrt{4}$;

D $L = 2\lg 4$.

986. Să se indice care dintre următoarele drepte trece prin punctul de coordonate $A(2, -3)$ și formează cu dreapta de ecuație $2x + 3y - 7 = 0$ un unghi de $45°$. ✓ ?

A $2x - 2y - 10 = 0$;

B $x - 5y + 17 = 0$;

C $-x + 2y = -8$;

D $5x + y - 7 = 0$.

987. Valoarea lui $k \in \mathbb{R}$ pentru care graficul funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^4 + (k-2)x^2 + 3x$ are în punctul de abscisă $x = 1$ tangenta perpendiculară pe dreapta $y = -x + 5$ este: ✓ ?

A $k = -\frac{1}{5}$;

B $k = 3$;

C $k = -1$;

D $k = \frac{1}{4}$.

988. Pe intervalul $(-1, 1)$ definim legea de compoziție "$\diamond$" prin $x \diamond y = \frac{x+y}{1+xy}$, pentru orice $x, y \in (-1, 1)$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A elementul neutru în raport cu $\diamond$ este 0;

B $\frac{1}{2} \diamond \left(\frac{1}{2} \diamond \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{5}$;

C legea de compoziție $\diamond$ este asociativă;

D simetricul lui $\frac{1}{2}$ în raport cu $\diamond$ este $-\frac{1}{2}$.

989. Fie punctele $P(1, 2)$, $Q(3, 1)$ și $R(\beta, \beta^2)$. Pentru ce valori ale lui β punctele P, Q și R sunt coliniare? ✓ ?

A $\beta = \dfrac{-1-\sqrt{41}}{2}$;

B $\beta = \dfrac{-1+\sqrt{41}}{4}$;

C $\beta = \dfrac{1\pm\sqrt{41}}{4}$;

D $\beta = \dfrac{1+\sqrt{41}}{2}$.

990. Se consideră $T_n = \sum_{k=1}^{n} i^k$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A $T_{256} = T_4$; B $T_{98} = -1 - i$; C $T_{2025} = T_{101}$; D $T_{37} = -i$.

991. Fie $\alpha \in \mathrm{R}$ și $I = \int_0^\alpha e^{\sqrt{x}}\, \mathrm{d}x$. Să se indice care dintre următoarele variante de răspuns nu sunt adevărate. ✓ ?

A $I = 2\sqrt{\alpha}\cdot e^{\alpha}$; B $I = 2\alpha \cdot e^{\alpha}$; C $I = 2\alpha \cdot e^{\sqrt{\alpha}}$; D Alt răspuns.

992. Fie sistemul de ecuații ✓ ?

$$\begin{cases} a\left(y-\frac{1}{3}\right)+\dfrac{x}{2}=0 \\ 3y-x-1=0 \end{cases}$$

unde a este o constantă reală. Pentru ce valoare a lui a sistemul are o infinitate de soluții (x, y)?

A $-\dfrac{3}{2}$; B $\dfrac{5}{6}$; C 3; D Alt răspuns.

993. Fie β astfel încât $y = \beta$ să împartă regiunea delimitată de $y = x^2$ și $y = 4$ în două regiuni de suprafața egală. Dacă $x, y > 0$, care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A $\beta = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{16^{\frac{1}{n}} + n}{n+1}$;

B β este o soluție pentru $x^2-4x+4 = 0$;

C $\beta = \dfrac{4}{\log_2 4}$;

D $\beta = \dfrac{3}{2}\int_0^4 \sqrt{x}\, dx$.

994. Dacă $\dfrac{x^2}{x-2} = 3x$, atunci ce valori pentru S și P sunt corecte, dacă S reprezintă suma soluțiilor, respectiv P reprezintă produsul soluțiilor ecuației? ✓ ?

A $S = 3$; $P = 3$; B $S = 3$; $P = 1$; C $S = 3$; $P = 0$; D $S = 4$; $P = 0$.

995. Fie o progresie aritmetică unde al șaselea termen este de patru ori mai mare decât al treilea, iar al zecelea este mai mare decât al patrulea cu 30. Care este primul termen și rația progresiei? ✓ ?

A $a_1 = 0$ și $r = 5$;
B $a_1 = -5$ și $r = 5$;
C $a_1 = -10$ și $r = 5$;
D $a_1 = -5$ și $r = 10$.

996. Se dă funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{3}{m\cos x + n}$, unde m și n sunt constante reale pozitive. Care relație între m și n este o condiție suficientă pentru ca f să admită primitive pe R? ✓ ?

A $m > n$;
B $m = n$;
C $m < n$;
D $m \,\vdots\, n$.

997. Fie dreptele d_1 și d_2 cu ecuațiile respective: $2x + y - 3 = 0$ și $x - 2y + 1 = 0$, b un număr real și Q punctul de coordonate $(b, 0)$. Punctul Q este egal depărtat de dreptele d_1 și d_2, dacă b ia valoarea ✓ ?

A $-\dfrac{2}{3}$;
B $-\dfrac{4}{3}$;
C $\dfrac{2}{3}$;
D $\dfrac{12}{3}$.

998. Fie triunghiul DEF cu $\operatorname{tg} D = \dfrac{1}{2}$ și $\operatorname{tg} E = \dfrac{3}{4}$. Atunci, $\cos F$ este: ✓ ?

A $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$;
B $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;
C $\dfrac{5}{13}$;
D $-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

Problemele **999.** și **1000.** se referă la funcția $f(x) = \sqrt{2 - x^3}$, respectiv funcția $h(x, y) = \displaystyle\int_x^y t^5 \cdot f(t)\,\mathrm{d}t$.

999. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

(a) f descrescătoare pe domeniul de definiție
(b) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$
(c) f are un singur punct de extrem
(d) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$

A $a)$ și $b)$;
B Doar $a)$;
C $a)$ și $c)$;
D $a)$, $c)$ și $d)$.

1000. Valoarea limitei $L = \lim\limits_{n\to-\infty} h(n, \sqrt[3]{2})$ este: ✓ ?

A ∞;
B 0;
C nu există;
D $-\infty$;

Testul 3

1001. Fie numărul complex z cu proprietatea că $z + \frac{1}{z} = 2\cos\frac{\pi}{12}$. Valoarea lui $z^4 + \frac{1}{z^4}$ este: ✓ ?

A 1; B $\sqrt{2}$; C $i\sqrt{3}$; D i.

1002. Valoarea limitei $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\ln x(\sin x - x)}{x^2}$ este: ✓ ?

A 1; B e; C 0; D $-\frac{1}{6}$.

1003. Fie mulțimea de puncte $M(x,y)$ din plan, care satisfac ecuația $4x^2 + 4xy + y^2 - 2x - y = 0$. Ce reprezinta această mulțime în planul xOy? ✓ ?

A reuniunea a 2 drepte perpendiculare ce trec prin origine;

B reuniunea a 2 drepte perpendiculare ce trec prin $(0,1)$;

C reuniunea a 2 drepte paralele, una trecând prin $(0,1)$ și una prin origine;

D reuniunea a 2 drepte paralele, una trecând prin $(1,0)$ și una prin $(1,1)$.

1004. Valoarea integralei $\int_{2024}^{2025} \frac{e^{x-2024}}{e^{x-2024} + e^{2025-x}}\mathrm{d}x$ este: ✓ ?

A 1; B 1012; C $\frac{2025}{2}$; D $\frac{1}{2}$.

1005. Pe mulțimea $(-1,1)$ definim legea de compoziție "$*$" astfel: $x*y = \frac{x+y}{1+xy}, \forall x,y \in (-1,1)$. Care dintre următoarele afirmații sunt corecte: ✓ ?

A 0 este element neutru al legii "$*$";

B "$*$" are un element absorbant;

C $((-1,1),*)$ este un grup;

D $\frac{1}{2} * \frac{1}{3} = \frac{35}{36}$.

1006. Fie $I = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2+2x+1}\mathrm{d}x$. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate? ✓ ?

A $I = \frac{\pi}{6}$; B $I > \frac{1}{4}$; C $I = \frac{\pi}{12}$; D $I < 0$.

1007. Fie $I = \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{1+9\sin^2 x}\mathrm{d}x$. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate? ✓ ?

A $3I = \operatorname{arctg}\frac{3\sqrt{3}}{2}$;

B $I = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2}$;

C $3I = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2}$;

D $I = \operatorname{arctg} 3\sqrt{3}$.

1008. Fie polinomul $f = mx^4 + nx + p$, cu $m, n, p \in \mathbb{Z}$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A $f(3) - f(1)$ este număr par;

B $\dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} \in \mathbb{Z} \forall x, y$;

C $\dfrac{f(x) - f(y)}{x^2 - y^2} \in \mathbb{Z} \forall x, y$;

D $\dfrac{f(x) - f(y)}{x + y} \in \mathbb{Z} \forall x, y$.

1009. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{5 \sin x + 3 \cos x}{x^2 + 3x + 5}$. Notăm cu $L = \lim\limits_{x \to \infty} f(x)$. Care dintre următoarele variante de răspuns indică valoarea lui L? ✓ ?

A f nu are limită pentru $x \to \infty$;

B $L = 1$;

C $L = 0$;

D alt răspuns.

1010. Care dintre următoarele variante de răspuns reprezintă ecuația dreptei care trece prin punctul $A(2, 3)$ și face cu axa Ox un unghi de $45°$? ✓ ?

A $y = x + 1$;

B $y = x - 1$;

C $\sqrt{2}y = x - 1$;

D $\sqrt{2}y = x + 1$.

1011. Fie $f(x) = (x^2 + x + 1)^{50} + (x^2 - x + 1)^{50}$ și dezvoltarea sa de forma: $f(x) = a_{100}x^{100} + a_{99}x^{99} + \ldots + a_1 x + a_0$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A $a_{17} = 0$;

B $a_{31} = 0$;

C $a_0 + a_1 + \ldots + a_{100} = 3^{50} + 1$;

D $a_0 + a_1 + \ldots + a_{100} = 3^{50} + 3$.

1012. Valoarea lui $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg} \dfrac{5\pi}{6}\right)$ este: ✓ ?

A $\dfrac{\pi}{6}$;

B $\dfrac{5\pi}{6}$;

C $-\dfrac{\pi}{6}$;

D $-\dfrac{5\pi}{6}$.

1013. Se considera triunghiul ABC cu laturile $AB = 7$ si $AC = 9$, iar AD este bisectoarea unghiului A, punctul D este pe dreapta AB. Valorile numerelor x si y pentru care are loc egalitatea: $\overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ sunt: ✓ ?

A $y = \dfrac{7}{8}$;

B $x = \dfrac{9}{16}$;

C $y = \dfrac{7}{16}$;

D $x = \dfrac{9}{8}$.

1014. Dacă $L = \lim\limits_{x \to 5} \left(\dfrac{6x + 1}{x + 5} - \dfrac{7x - 4}{2x} \right) \cdot \dfrac{1}{x^2 - 6x + 5}$, atunci care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate? ✓ ?

A $L > \dfrac{1}{20}$;

B $L = \dfrac{21}{20}$;

C $L = \dfrac{21}{400}$;

D $L = \dfrac{21}{200}$.

1015. Fie ecuația $4x - 5x^2 = 25^{\log_5 x} + 8^{\log_2 x} - 8 \log_{0.25} \dfrac{1}{64}$. Care dintre următoarele enunțuri sunt adevărate? ✓ ?

A ecuația are o singură soluție reală pozitivă;

B ecuația are două soluții pozitive;

C ecuația are o singură soluție negativă;

D ecuația are o singură soluție întreagă.

1016. Se dă sistemul de ecuații $\begin{cases} A_y^x = 9A_y^{x-1} \\ \frac{1}{3}C_y^x = 5C_y^{x+1} \end{cases}$. Sunt adevărate următoarele afirmații: ✓ ?

A $x = 119, y = 127$ verifică sistemul;

B $x = 100, y = 108$ verifică sistemul;

C $x \geq y, \forall x, y$ soluții;

D $x \leq y - 8, \forall x, y$ soluții.

1017. Fie matricile $A = \begin{pmatrix} i & -6 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & \sqrt[3]{2} \\ 2 & \sqrt[3]{2} \end{pmatrix}$ și $X(\alpha, \beta) = A^\alpha - \beta A$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. ✓ ?
Dintre următoarele enunțuri sunt false:

A există $k \in \mathbb{N}$ astfel încât $A^k = 2A$.

B $A^{2024} = A^{156}$ și $A^{705} = A^{343}$.

C $\det(X(2024, -1)) = \det(B^3)$.

D $\det(X(150, 30)) = \det(30B^3)$.

1018. Valoarea limitei $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \mathrm{tg}^2 \frac{k\pi}{4n}$ este: ✓ ?

A $\frac{\pi}{4} - 2$;

B $\frac{\pi}{12} - 1$;

C $1 - \frac{8}{\pi}$;

D $\frac{4}{\pi} - 1$.

1019. Cu ce număr poate fi egală partea reală a numărului complex z care este soluția ecuației: $\mathrm{Re}(6z^2 - 3i + 2) - \mathrm{Im}(7i * \bar{z} - 2z * \bar{z}) + 6\,\mathrm{Im}(\bar{z})^2 = 7$? ✓ ?

A $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{12}$;

B $\mathrm{Re}(z) = -\frac{11}{12}$;

C $\mathrm{Re}(z) = -\frac{7}{12}$;

D $\mathrm{Re}(z) = -\frac{21}{12}$.

1020. Dacă în triunghiul ABC are loc relația $\sin B + \cos B = \sin C + \cos C$ atunci: ✓ ?

A triunghiul poate fi dreptunghic;

B triunghiul poate fi isoscel;

C triunghiul poate fi echilateral;

D triunghiul poate fi doar dreptunghic.

1021. Se dă șirul $a_n = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + ... + (-1)^{n+1}n$. Sunt adevărate următoarele afirmații: ✓ ?

A cel mai mic număr pozitiv n pentru care $a_n < 0$ este 2;

B cel mai mare număr pozitiv n pentru care $a_n \leq -20$ este 41;

C cel mai mic număr pozitiv n pentru care $a_n \geq 200$ este 399;

D cel mai mic număr pozitiv n pentru care $a_n \geq 200$ este 400.

1022. Fie $I = \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \mathrm{tg}\, x}{1 + \mathrm{tg}\, x} \mathrm{d}x$. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate? ✓ ?

A $I = \dfrac{3\pi}{4}$; B $I = \sqrt{2}$; C $I = 0$; D $I = \dfrac{\ln 2}{2}$.

1023. Valoarea expresiei $\cos\dfrac{\pi}{7} + \cos\dfrac{3\pi}{7} + \cos\dfrac{5\pi}{7}$ este: ✓ ?

A 1; B $\dfrac{1}{2}$; C 0; D $-\dfrac{1}{2}$.

1024. Fie $L = \lim\limits_{a\to\infty} \displaystyle\int_{1/a}^{a} \frac{\ln x}{x^2+1}\mathrm{d}x$. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate? ✓ ?

A $I = \dfrac{3}{2}$; B $I = \dfrac{1}{2}$; C $I = 0$; D $I = -\dfrac{1}{2}$.

Testul 4

1025. Fie $L = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{3x+1}-\sqrt{7}}{x-2}$. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate? ✓ ?

A $L < 1$; B $L = 0$; C $\dfrac{3}{2\sqrt{7}}$; D $L = \sqrt{7}$.

1026. Câte soluții are ecuația $8^{\cos^2 x} + 4^{\sin^2 x} = 2$? ✓ ?

A 0; B 1; C 2; D ∞.

1027. Fie ecuația $\log_c((c^{-x})^x) - \log_a\left(\dfrac{1}{c^3}\right)\log_a(b^2) + \log_a\left(\dfrac{c^{2x}}{b^{3x}}\right) + \log_a\left(\dfrac{c^2}{a^x}\right) = 0, a, b, c >$ 0 și $\neq 1$. Ce condiție este necesară astfel încât ecuația are o rădăcină dublă? ✓ ?

A $a = b = c$;

B $b = -\sqrt{\dfrac{c}{a^2}}$;

C $b^3 = 8ac$;

D $a = \dfrac{1}{c^2 b^3}$.

1028. Dacă $(\sin x)^n + (\cos x)^n = 1$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, atunci care dintre următoarele variante de răspuns sunt adevărate? ✓ ?

A n poate lua o singură valoare;

B n poate lua două valori;

C n poate lua o infinitate de valori;

D dacă n este multiplu de 2 se verifică relația.

1029. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} -12 & -6 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}$. Dintre următoarele enunțuri sunt false: ✓ ?

A $det(A) = 0$.

B ecuația $B^{2024} = A$ are 2 soluții în $\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$.

C ecuația $B^{2024} = A$ are 2024 soluții în $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$.

D ecuația $B^{2024} = A$ are 2024 soluții în $\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$.

1030. Fie $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{|n-x|+2024}, n \in \mathbb{N}^*$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A $I_{n+1} < I_n$; B $I_{n+1} > I_n$; C $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$; D $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = \infty$.

Problemele **1031.**, **1032.** și **1033.** se referă la șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dat de relația de recurență $x_{n+1} = x_n - \ln(1+x_n)$, $x_0 > 0$.

1031. Care dintre următoarele afirmații sunt corecte? ✓ ?

A $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ strict descrescător;
B $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge la e;
C $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge la 1;
D $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n > 0$.

1032. Valoarea limitei $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$ este: ✓ ?

A 1; B $\ln 2$; C 0; D e .

1033. Valoarea limitei $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$ este: ✓ ?

A 1; B 0; C e; D ∞ .

1034. Știind că în triunghiul ABC lungimile laturilor sunt $a = 3, b = 4, c = 5$, valoarea expresiei $\sin A + \sin B + \sin C$ este: ✓ ?

A $\frac{12}{5}$; B $\frac{11}{6}$; C $\frac{15}{4}$; D $\frac{10}{3}$.

1035. Fie patrulaterul $ABCD$ cu $A(1, 3), B(4, 5), C(1, 0), D(10, 6)$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A $ABCD$ paralelogram;
B $\mathcal{A}_{ABCD} = 9$;
C $ABCD$ trapez;
D $\mathcal{A}_{ABCD} = 18$.

1036. Fie $I = \displaystyle\int_{-\pi/3}^{0} e^{-3x} \cos(3x)\mathrm{d}x$. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate? ✓ ?

A $I < 0$; B $I = \dfrac{e^{\pi} + 1}{6}$; C $I = 0$; D $I = -\dfrac{e^{\pi} + 1}{6}$.

1037. Valoarea lui $\sin \dfrac{\pi}{10}$ este: ✓ ?

A $\dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$; B $\dfrac{\sqrt{5} - 1}{4}$; C $\dfrac{\sqrt{3} - 1}{4}$; D $\dfrac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{4}$.

1038. Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{4x}{4x^2 + 1}$. Care dintre afirmațiile de mai jos sunt adevărate? ✓ ?

A f are două puncte de extrem global;
B f are un punct de inflexiune;
C $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} f(x)\mathrm{d}x = \ln 2$;
D f este convexă pe $[1, \infty)$.

1039. Se dă sistemul de ecuații $\begin{cases} \hat{5}x + \hat{2}y + z = \hat{8} \\ x + \hat{4}y + \hat{3}z = b \\ \hat{3}x + ay + z = \hat{3} \end{cases}$ în $\mathbb{Z}_{11}, a, b \in \mathbb{Z}_{11}$. Fie A mulțimea ce conține valorile lui a pentru care determinantul sistemului este nul și B mulțimea ce conține valorile lui b pentru care sistemul este incompatibil. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A $\operatorname{card}(A) = \operatorname{card}(B) = 1$;

B $\operatorname{card}(A) = 1, \operatorname{card}(B) = 2$;

C $\operatorname{card}(A) = \operatorname{card}(B) = 10$;

D $\operatorname{card}(A) = 1, \operatorname{card}(B) = 10$.

1040. Expresia $\sin(x - \arcsin x) \cdot \sin(x + \arcsin x), x \in [-1, 1]$ este echivalentă cu: ✓ ?

A $1 + \sin^2 x - x^2$;

B $\sin^2 x - x^2$;

C $(\frac{\pi}{2} - x)^2 - \sin^2 x$;

D $\sin^2 x + \frac{1}{2}x^2$.

1041. Valorile lui $a \in \mathbb{N}^*$ pentru care $A_n^{k+1} = aA_n^{k-1}$ sunt: ✓ ?

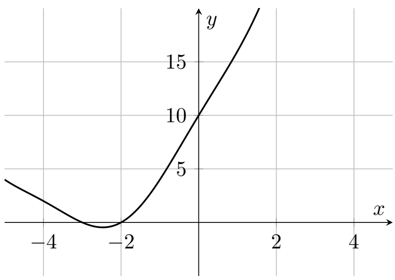
A $a \in \emptyset$;

B $a \in \{0, 1, 2, \ldots\}$;

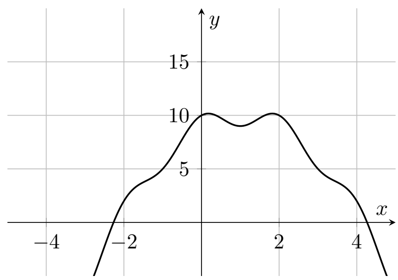
C $a \in \{2, 6, 12, \ldots\}$;

D $a \in \{0, 2, 6, , \ldots\}$.

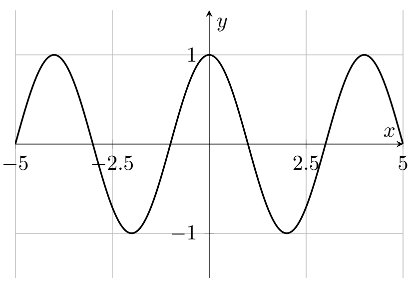
1042. Care dintre următoarele este o reprezentare corectă a funcției $y = \cos\left(-\frac{\pi}{2}x\right) + (x+3)^2$? ✓ ?



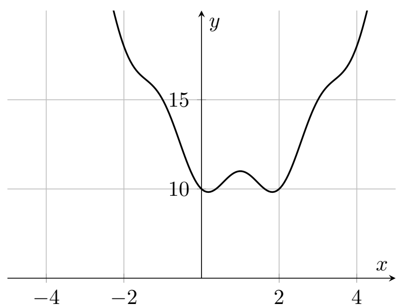
A



C



B



D

1043. Care dintre următoarele variante de răspuns sunt adevărate, dacă a și $b \in \mathbb{R}$ astfel încât unghiul dintre $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$ și $\overrightarrow{v} = a\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$ să fie de $60°$, iar unghiul dintre $\overrightarrow{x} = \vec{2}i + \overrightarrow{j}$ și $\overrightarrow{y} = (b-2)\overrightarrow{i} - b\overrightarrow{j}$ să fie de $135°$? ✓ ?

A $a = 2 + \sqrt{3}$;

B $a = 8$;

C $b = -1$;

D $b = \frac{3}{2}$.

1044. Fie polinomul $f = x^4 + 3x^3 + ax^2 - 4x + 1$, cu rădăcinile x_1, x_2, x_3 și x_4. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A $(1-x_1^2)(1-x_2^2)(1-x_3^2)(1-x_4^2)=(a+1)(a+3)$;

B $(1-x_1^2)(1-x_2^2)(1-x_3^2)(1-x_4^2)=(a+1)^2$;

C $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=9-2a$;

D $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=9-4a$.

1045. Fie $ABCD$ un trapez, iar M, N, P, Q mijloacele segmentelor AD, BC, AC și BD, respectiv. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate: ✓ ?

A $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC})$;

B $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DC})$;

C $\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC})$;

D $\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DC})$.

1046. Fie $L=\lim\limits_{n\to\infty} n^5\displaystyle\int_{n-1}^{n+1}\frac{x^4+9}{x^9+16}\mathrm{d}x$. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate? ✓ ?

A $L=0$; B $L=2$; C $L=1$; D $L<0$.

1047. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=2xy+10x+10y+45$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A $(-10)*(-9)*\cdots*9*10>-\frac{5}{2}$;

B elementul neutru al legii este $-\frac{9}{2}$;

C legea nu admite element neutru;

D $(-10)*(-9)*\cdots*9*10<-3$.

1048. Se dă şirul $(a_n)_{\mathbb{N}^*}$, cu termenul general $a_n=\frac{1}{n}\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}}$. Care este limita lui? ✓ ?

A e^{-1}; B 0; C $2e^{-1}$; D $4e^{-1}$.

Testul 5

1049. Cum mai poate fi scrisă expresia $\log_{13}(14!)$? ✓ ?

A $1 + 3\log_{13} 6 + 2\log_{13} 8 + 2\log_{13} 70 + \log_{13} 11 + 2\log_{13} 3$;

B $2 + 3\log_{13} 6 + 2\log_{13} 8 + 2\log_{13} 70 + \log_{13} 11 + 4\log_{13} 3$;

C $1 + 4\log_{13} 6 + 2\log_{13} 14 + 3\log_{13} 2 + \log_{13} 10 + \log_{13} 22 + \log_{13} 15$;

D $1 + 5\log_{13} 6 + 2\log_{13} 10 + 2\log_{13} 11 + 2\log_{13} 14 + \log_{13} 22$.

1050. Fie $I = \int_{-5}^{5} x^3\sqrt{x^4+5}\mathrm{d}x$. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate? ✓ ?

A $I < 0$;

B $I = \frac{1}{5} \cdot \operatorname{arctg} \frac{\pi}{25}$;

C $I = \frac{1}{5} \cdot \operatorname{arctg} \frac{\pi}{5}$;

D $I = 0$.

1051. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} i & -\sqrt{17} \\ \sqrt{17} & i \end{pmatrix}$ și $A^n = \begin{pmatrix} a_n & -b_n \\ b_n & a_n \end{pmatrix}$. Dintre următoarele enunțuri sunt adevărate: ✓ ?

A $\operatorname{rang}(A) = 2$.

B $a_{14}^2 - 2^{24}a_8^2 = 16^6 b_8^2 - b_{14}^2$.

C $a_{14}^2 - 2^{24}a_8^2 = 4^6 b_8^2 - b_{14}^2$.

D $\dfrac{a_{20}^2 + b_{20}^2}{a_{30}^2 + b_{30}^2} = 16^{10}$.

1052. Fie sistemul de ecuații ✓ ?

$$\begin{cases} \alpha x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + (\alpha+1)x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + \alpha x_3 = -1 \end{cases}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Sunt adevărate următoarele afirmații:

A pentru $\alpha = 0$, expresia $x_1^2 - x_2x_3 + 3x_1$ atinge valoarea maximă în punctul $x = \frac{3}{2}$;

B pentru $\alpha = 0$, expresia $x_1^2 - x_2x_3 + 3x_1$ atinge valoarea minimă în punctul $x = -\frac{1}{2}$;

C sistemul este compatibil determinat pentru 3 valori distincte ale parametrului α;

D pentru $\alpha = -3$, sistemul este incompatibil.

1053. Valoarea integralei $\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{\cos^2 x - 3}\mathrm{d}x$ este: ✓ ?

A $-\frac{\pi}{2}\ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$;

B $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}\ln\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$;

C $-\frac{\pi}{2\sqrt{3}} + 2$;

D $-\frac{\pi}{2\sqrt{3}}\ln\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$.

1054. Știind că $\cos\frac{\pi}{10}=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$, numărul soluțiilor din intervalul $(0,\pi)$ ale ecuației ✓ ?

$$\frac{\sqrt{5}-1}{\sin x}+\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\cos x}=8$$

este:

[A] 1; [B] 2; [C] 3; [D] 4.

1055. Care este coeficientul termenului care îl conține pe x^{32} din dezvoltarea $\left(\frac{3}{\sqrt[5]{9x^2}}-x^3\right)^n$, dacă valoarea coeficientului celui de al șaselea termen al dezvoltării este $-3^{14}\cdot 3003$? ✓ ?

[A] $3^7C_{15}^{10}$; [B] $-3^{\frac{42}{5}}C_{15}^{9}$; [C] $-3^{\frac{42}{5}}C_{14}^{9}$; [D] $-3^7C_{14}^{10}$.

1056. Fie $L=\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{x+12}-x}{x^2-16}$. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate? ✓ ?

[A] $L=-\frac{1}{8}$; [B] $L=\frac{3}{32}$; [C] $L=-\frac{7}{64}$; [D] $L=-\frac{3}{32}$.

1057. Fie șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dat de relația de recurență $x_{n+1}=x_n+e^{-x_n}$, $x_0>0$. Care dintre următoarele afirmații sunt corecte? ✓ ?

[A] $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ divergent;

[B] $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent;

[C] $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=0$;

[D] $\forall n\in\mathbb{N}$, $x_n>0$.

1058. Fie o mulțime $M\in\{\mathbb{Z},\mathbb{R},\mathbb{C}\}$ pentru care definim mulțimea de matrice ✓ ?

$H_3(M)=\left\{\begin{pmatrix}1&a&b\\0&1&c\\0&0&1\end{pmatrix} : a,b,c\in\mathbb{M}\right\}$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

[A] $(H_3(\mathbb{R}),\cdot)$, unde "$\cdot$" este operația de înmulțire a matricelor, este un grup;

[B] $(H_3(\mathbb{Z}),\cdot)$, unde "$\cdot$" este operația de înmulțire a matricelor, nu este un grup;

[C] "$\cdot$" este o lege de compoziție pe $H_3(\mathbb{C})$;

[D] $\exists A\in H_3(\mathbb{R})$, astfel încât $\det(A)\neq 1$.

1059. Valoarea lui $\arccos\left(\cos\left(\arcsin\frac{7}{\sqrt{50}}+\arccos\frac{3}{5}\right)\right)$ este: ✓ ?

[A] $\frac{\pi}{4}$; [B] $\frac{3\pi}{4}$; [C] $\frac{\pi}{3}$; [D] $-\frac{\pi}{4}$.

1060. Fie mulţimea $M=\left\{(-1)^n\cdot\frac{n+1}{7n}\mid n\in\mathbb{N}\right\}$. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate? ✓ ?

A M admite o infinitate de puncte de acumulare;

B $\pm\frac{1}{7}$ sunt puncte de acumulare ale lui M;

C M nu admite niciun punct de acumulare;

D 0 este un punct de acumulare al lui M.

1061. Soluția generală a ecuației $\cos 2x + 3\cos x - 1 = 0$ este: ✓ ?

A $\pm\frac{\pi}{6} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$;

B $\pm\frac{\pi}{3} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$;

C $\pm\frac{\pi}{3} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$;

D $\pm\frac{\pi}{6} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$.

1062. Valoarea limitei $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\frac{\pi}{6} - \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}x}{x+\pi}\right)$ este: ✓ ?

A $\frac{\pi\sqrt{4}}{3}$;

B $\frac{\pi\sqrt{2}}{3}$;

C $\frac{\pi\sqrt{3}}{4}$;

D $\frac{\pi\sqrt{3}}{2}$.

1063. Fie triunghiul ABC cu $A\left(-\frac{1}{15}, \frac{8}{15}\right)$, $B\left(-\frac{3}{5}, 0\right)$, $C\left(-\frac{1}{7}, 0\right)$. Dintre următoarele ecuații, care corespunde uneia din bisectoarele unghiului $\hat{A}$ (fie bisectoarei interioare, fie celei exterioare)? ✓ ?

A $x + 2y - 1 = 0$;

B $-x + 2y + 4 = 0$;

C $10x - 5y - 2 = 0$;

D $12x - 6y + 4 = 0$.

1064. Fie numerele complexe $a, z \in \mathbb{C}$, unde $a = 4 + 4i$. Care este reprezentarea geometrică a punctelor din plan ce satisfac inegalitatea: $2 < |z - a| < 3$? ✓ ?

A interiorul parabolei $y^2 = 6x$;

B coroana circulară dintre cercurile centrate în (2,4) de raze 2, respectiv 3;

C $\emptyset$;

D parabola $y^2 = 6x$.

1065. Fie $I = \int_0^4 \frac{1}{4+2^x}\mathrm{d}x$. Care variante de răspuns indică valoarea lui I? ✓ ?

A $\frac{\pi}{4}$;

B $\frac{1}{2}$;

C $\frac{\pi}{2}$;

D 0.

1066. Fie funcția $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$. Care dintre următoarele afirmații sunt corecte? ✓ ?

A $y = 1$ este asimptotă oblică pentru G_f;

B $y = -2x + 7$ este ecuația tangentei la G_f în $x = 2$;

C ecuația $a = f(x)$ are soluție unică pentru orice $a \in \mathbb{R}$;

D G_f are două asimptote.

1067. Valoarea limitei $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{n}{(n+k)^2 \sqrt[4]{((1+\frac{k}{n})^4+1)^3}}$ este: ✓ ?

A $\sqrt[4]{2} - \sqrt[4]{\frac{17}{16}}$; B $\sqrt[4]{3} - \sqrt[4]{2}$; C $\sqrt[3]{\frac{3}{2}} - \sqrt[3]{2}$; D $\sqrt[4]{\frac{13}{12}} - \sqrt[4]{3}$.

1068. Fie H ortocentrul triunghiului ABC. Daca are loc egalitatea $\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{0}$ atunci care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A triunghiul este echilateral;

B triunghiul este isoscel;

C triunghiul este dreptunghic;

D triunghiul este oarecare.

1069. Se consideră polinomul $f(x) = x^3 + ax^2 + ax + 1$. Pentru ce valori ale lui a polinomul are toate rădăcinile reale? ✓ ?

A $(-\infty, -1]$;

B $(-\infty, -1] \cup [3, \infty)$;

C $[-1, 3]$;

D $[3, \infty)$.

1070. Fie $I = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\operatorname{tg} x}{\cos x \cdot (\sin x + \cos x)} \mathrm{d}x$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A $I = \ln 2 - 1$; B $I = -\ln 2 + 1$; C $I < 0$; D $I > 0$.

1071. Fie A, B, C vârfurile unui triunghi echilateral. Circumferința cercului format prin unirea celor trei vârfuri este egală cu 16. Fie a aria triunghiului, P perimetrul și r raza cercului înscris triunghiului. Sunt adevărate următoarele afirmații: ✓ ?

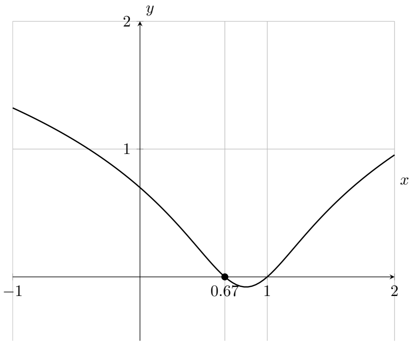
A $\dfrac{a}{P^2} \in \mathbb{Q}$; B $P < r$; C $\dfrac{P}{a} = \dfrac{\pi}{2}$; D $a > P^2$.

1072. Numărul legilor de compoziție comutative ce pot fi definite pe o mulțime finită cu n elemente este: ✓ ?

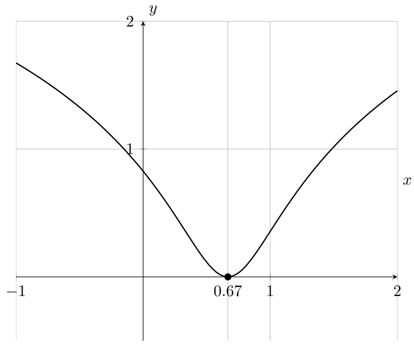
A $n^{\frac{n\cdot(n+1)}{2}}$; B $n^{\frac{n\cdot n}{2}}$; C $n^{\frac{n\cdot(n-1)}{2}}$; D $(n+1)^{\frac{n\cdot(n+1)}{2}}$.

Testul 6

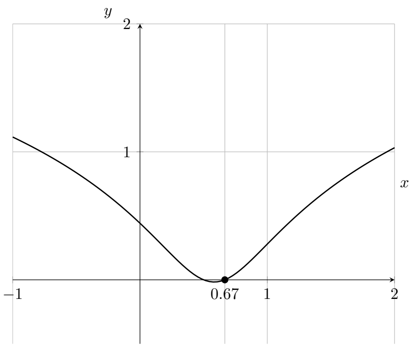
1073. Care dintre următoarele grafice reprezintă corect funcția $y = \log_7(9x^2 - 12x + 5)$? ✓ ?



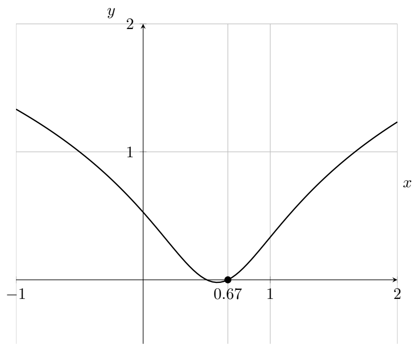
A



C



B



D

1074. Fie $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} dx$. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate? ✓ ?

A $I = -\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}$; B $I = \dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$; C $I = \dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}$; D $I = \dfrac{\pi}{3\sqrt{2}}$.

1075. Care este valoarea minimă a expresiei $\cos^{2^{n+1}} x + \sin^{2^{n+1}} x, n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$? ✓ ?

A $\dfrac{1}{2^{2^n - 1}}$; B $\dfrac{1}{2^{2n}}$; C $\dfrac{1}{2^n}$; D 0.

1076. Fie $\triangle ABC$ în care are loc relația: $\sin^2 B + \sin^2 C = \sin^2 A$. Ce fel de triunghi este $\triangle ABC$? ✓ ?

A dreptunghic; B isoscel; C echilateral; D obtuzunghic.

1077. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$. Care dintre următoarele variante de răspuns sunt adevărate? ✓ ?

A $\lim_{x\to 3}\left(x\cdot \det\left(\sum_{k=1}^{2024} A^k\right)\right) = 6072.$

B $\lim_{x\to 3}\left(x\cdot \det\left(\sum_{k=1}^{2024} A^k\right)\right) = 3.$

C $\lim_{x\to 3}\left(x\cdot \det\left(\sum_{k=1}^{2024} A^k\right)\right) = 0.$

D $A^{2024} = 10^{2023}A.$

1078. Fie $L = \lim_{h\to 0}\dfrac{\ln 2\left((x+h)^n - x^n\right)}{h}$, unde $n \geq 2$. Care este valoarea lui L? ✓ ?

A $\ln 2$; B 0; C $\ln 2\cdot n\cdot x^{n-1}$; D $\ln 2\cdot x$.

1079. Se dă sistemul de ecuații $\begin{cases} x+ay+z=1\\ x+y+az=1\\ ax+y+z=1\end{cases}$, $a\in\mathbb{R}$ și următoarele afirmații: ✓ ?

(i) pentru $a=1$ sistemul este incompatibil
(ii) pentru $a=1$ și $a=-2$ sistemul este incompatibil
(iii) pentru $a\in\mathbb{R}-\{1,-2\}$ sistemul este compatibil determinat cu $x=y=z$
(iv) pentru $a=-2$ sistemul este incompatibil
(v) pentru $a\in\mathbb{R}-\{1,-2\}$ sistemul este incompatibil
(vi) pentru $a=1$ sistemul este compatibil determinat cu $x=y=z=\dfrac{1}{a+2}$

Sunt adevărate:

A (i), (ii), (v); B (iii), (iv); C (v), (vi); D (ii), (vi).

1080. Fie $I = \displaystyle\int_0^{\pi/3}\frac{\operatorname{tg} x}{1+2\cos x}\mathrm{d}x$. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate? ✓ ?

A $I = \ln\dfrac{2}{3}$;

B $I = 2(\ln 2 - \ln 3)$;

C $I > 0$;

D $I = \ln\dfrac{4}{3}$.

1081. Fie mulțimea $M = \{C_{5n}^0, C_{5n}^1, C_{5n}^1, ..., C_{5n}^{5n-1}, C_{5n}^{5n}\}$, unde n este număr natural par. Care este elementul cel mai mare din mulțime? ✓ ?

A C_{5n}^{5n}; B C_{5n}^{5n-1}; C $C_{5n}^{\frac{5n}{2}-1}$; D $C_{5n}^{\frac{5n}{2}}$.

1082. Fie $f:\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}, f(x)=\cos^4 x$. Primitiva lui f a cărei grafic trece prin punctul $\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi+9}{32}\right)$ este: ✓ ?

A $F(x) = \dfrac{\sin(4x) + 8\sin(2x) + 12x}{16} + \dfrac{1}{16}$;

B $F(x) = \dfrac{\sin(4x) + 4\sin(2x) + 12x}{32} + \dfrac{\pi}{32}$;

C $F(x) = \dfrac{\sin(4x) + 8\sin(2x) + 12x}{32}$;

D $F(x) = \dfrac{\sin(4x) + 8\sin(2x) + 12x}{32} + \dfrac{1}{32}$.

1083. Care este valoarea maximă a expresiei $(36\cos^2 x + 36\sin x - 34)^2$? ✓ ?

A 0; B 121; C alt răspuns; D 4.

1084. Valoarea limitei $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{n}{n^2 + k^2}$ este: ✓ ?

A 1; B $\dfrac{\pi}{4}$; C $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; D $\dfrac{\pi}{2}$.

1085. Fie 33 de puncte în plan dintre care 8 sunt coliniare și oricare alte 3 puncte nu sunt. Dacă ar fi să unim toate aceste puncte, de cate drepte este nevoie? ✓ ?

A 500 drepte; B 502 drepte; C 501 drepte; D 499 drepte.

1086. Fie $z = \sqrt{3} + 3i$ și z_0, z_1, z_2, z_3 rădăcinile de ordin 4 ale lui z. Care dintre următoarele afirmații sunt false? ✓ ?

A $z_0^2 + z_1^2 + \dfrac{1}{2} z_2 z_3 \in \mathbb{R}$;

C $z_0^2 + z_1^2 + \dfrac{1}{2} z_2 z_3 = -\dfrac{\sqrt[4]{12}}{4} \cos\dfrac{4\pi}{3}$;

B $z_0^2 + z_1^2 + \dfrac{1}{2} z_2 z_3 \in \mathbb{R}$;

D $z_0^2 + z_1^2 + \dfrac{1}{2} z_2 z_3 \notin \mathbb{R}$.

1087. Fie $L = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(x^3 - 2x - 1)}{\ln(x^7 + 3x - 4)}$. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate? ✓ ?

A $L = 0$; B $L = \infty$; C $L = \dfrac{3}{7}$; D $L = \dfrac{7}{3}$.

1088. Fie hexagonul regulat $ABCDEF$ cu latura de 5 cm. Care dintre următoarele variante de răspuns indică modulul vectorului $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$? ✓ ?

A 15; B 20; C 10; D 25.

1089. Valoarea limitei $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{\ln(2^{2n})} + \dfrac{1}{\ln(3^{3n})} + \cdots + \dfrac{1}{\ln(n^{n^2})} \right)$ este: ✓ ?

A 1; B $\dfrac{1}{2}$; C 0; D $\dfrac{1}{2\ln 2}$.

1090. Fie $u, v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, u(x) = -2x, v(x) = 2 + x$. Știind că funcția $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, r(x) = 4x$ este rezultatul aplicării funcțiilor u și v într-o anumită ordine și de un anumit număr de ori, care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A funcția v este aplicată mereu de un număr par de ori;

B funcția v este aplicată mereu de un număr putere a lui 2 de ori;

C funcția v este aplicată mereu de un număr impar de ori;

D niciuna dintre variante.

1091. Fie $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{2\cos x + 3\sin x + 4}$. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate? ✓ ?

A $I = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \cdot \operatorname{arctg} \dfrac{1}{3\sqrt{3}}$;

B $I = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \cdot \operatorname{arctg} \dfrac{1}{3\sqrt{3}}$;

C $I = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \left(\operatorname{arctg} \dfrac{5}{\sqrt{3}} - \operatorname{arctg} \dfrac{3}{\sqrt{3}} \right)$;

D $I = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \left(\operatorname{arctg} \dfrac{5}{\sqrt{3}} - \operatorname{arctg} \dfrac{3}{\sqrt{3}} \right)$.

1092. Considerăm funcția $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = x^{x^2}$. Care dintre următoarele afirmații sunt corecte? ✓ ?

A $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = e$;

B f are un punct de extrem global;

C $f(x) \geq f(\frac{1}{\sqrt{e}}), \forall x \in (0, \infty)$;

D f este strict crescătoare pe $\left(0, \dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)$.

1093. Fie $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^{\pi} x} \mathrm{d}x$. Valoarea lui I este: ✓ ?

A π;

B 0;

C $\dfrac{\pi}{4}$;

D $\dfrac{\pi}{2}$.

1094. Fie $A(0, 0), B(4, 0), C(2, 3)$ varfurile unui triunghi. Care dintre urmatoarele afirmatii sunt adevarate: ✓ ?

A Lungimea medianei din A este $\frac{3\sqrt{5}}{2}$;

B Coordonatele centrului de greutate sunt $(2, 1)$;

C Lungimea medianei din A este $\frac{3\sqrt{5}}{4}$;

D Coordonatele centrului de greutate sunt $(3, 2)$.

1095. Fie $I = \displaystyle\int_3^7 \frac{\ln(x-3)}{\ln[(x-3)(7-x)]} \mathrm{d}x$. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate? ✓ ?

A $I = 4$;

B $I = 0$;

C $I < 0$;

D $I = 2$.

1096. Se consideră legea de compoziție definită pe intervalul $(2, \infty)$ prin: $x * y = (x - 2)^{\ln(y-2)} + 2$. Sunt false următoarele afirmații: ✓ ?

A legea de compoziție este comutativă;

$\boxed{\text{B}}$ legea de compoziție admite element neutru;

$\boxed{\text{C}}$ $\ln 2$ este element neutru pentru lege;

$\boxed{\text{D}}$ $e + 2$ este element neutru pentru lege.

Testul 7

1097. Rezultatul calcului $\lim\limits_{x\to\infty} x \cdot \sin \dfrac{1}{x}$ este: ✓ ?

A 0; B 1; C π; D nu există.

1098. Știind că $E(x) = \sin x + \sin(2x) - \sin(3x)$, atunci: ✓ ?

A $E(x) = \dfrac{\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{5x}{2} + \cos\frac{7x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$;

C $E(x) = \dfrac{\cos\frac{x}{2}}{\sin(3x)}$;

B $E(x) = \dfrac{\cos\frac{x}{2} - 2\cos\frac{5x}{2} + \cos\frac{7x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}$;

D $E(x) = \dfrac{\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{7x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}$.

1099. În reperul cartezian xOy se dau punctele $A(4,2)$, $B(-2,6)$ și $C(8,-2)$, și G centrul de greutate al acestui triunghi. Distanța de la G la dreapta de ecuație $l : x - y + 2 = 0$ este egală cu: ✓ ?

A $\dfrac{10}{3\sqrt{2}}$; B $\dfrac{10}{3}$; C $\dfrac{5}{3\sqrt{2}}$; D $\dfrac{5}{6}$.

1100. Fie dezvoltarea binomială $\left(\sqrt[3]{5} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)^n$. Cunoscându-se relația $\dfrac{T_6}{T_{n-5}} = 20$, care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A $n \in \{9, 10\}$; B $n \in \{3, 9\}$; C $n = 9$; D niciuna.

1101. Notăm $a = \log_7 125$ și $b = \log_7 3$. Atunci valoarea expresiei $\log_7(1,80)$ este: ✓ ?

A $\dfrac{3b+5a}{2}$; B $\dfrac{b-2a}{7}$; C $\dfrac{6b-a}{3}$; D $\dfrac{5b+a}{3}$.

1102. Valoarea integralei $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2\sin x - 3\cos x + 5}\mathrm{d}x$ este: ✓ ?

A $\dfrac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\left(\dfrac{4}{5}\right)$;

C $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{5}{\sqrt{3}}\right) + \dfrac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

B $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}\right) + \dfrac{\pi\sqrt{2}}{4}$;

D $\dfrac{\pi\sqrt{2}}{5}$.

1103. Fie triunghiul ABC, astfel încât lungimile laturilor sale satisfac relația ✓ ?

$$\frac{AB}{AC+BC} + \frac{BC}{AC+AB} = 1.$$

Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

A $m(\hat{A}) = \frac{\pi}{6}$;

B $\triangle ABC$ este dreptunghic;

C $\cos(\hat{B}) = \frac{1}{2}$;

D $m(\hat{A}) + m(\hat{C}) = \frac{2\pi}{3}$.

1104. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^*,\ f(x) = \cos(2x\pi) + i\sin(2x\pi)$. Atunci: ✓ ?

A f este un morfism de la grupul $(\mathbb{R}, +)$ la grupul $(\mathbb{C}^*, \cdot)$;

B f este injectivă și surjectivă;

C $f(x)$ este o rădăcină de ordinul 4 a unității pentru $x \in \{\frac{k}{4} \mid k \in \mathbb{Z}\}$;

D Grupurile $(\mathbb{R}, +)$ și $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ sunt izomorfe.

1105. Pe $\mathbb{R}$ definim legea de compoziție "$*$", $x*y = 3(x-2)(y-2)+2$. Ecuația $x*x*x = x$ are: ✓ ?

A o soluție; B 2 soluții; C 3 soluții; D 4 soluții.

1106. Se consideră o funcție $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, astfel încât $f'(x) = \frac{8x\sqrt{x} - 1}{2\sqrt{x}}$. Știind că în legea de definiție a funcției f, coeficientul termenului liber este 0, imaginea funcției este: ✓ ?

A $\mathbb{R}$; B $\left[\frac{1}{4}, \infty\right)$; C $\left[-\frac{3}{8}, \infty\right)$; D $\left(-\infty, \frac{3}{8}\right]$.

1107. Fie polinomul $f = 2x^3 - 24x^2 + 94x - 120$. Dacă x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f, cu $x_1 < x_2 < x_3$, atunci rezultatul calculului $\frac{x_3^2}{x_1^2 + x_2^2}$ este: ✓ ?

A $\frac{1}{6}$; B $\frac{1}{2}$; C $\frac{4}{5}$; D 1.

Problemele **1108.** și **1109.** se referă la funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = e^x \cdot x$.

1108. Rezultatul calculului $\lim\limits_{t\to\infty} \int_{-t}^{1} f(x)\mathrm{d}x$ este: ✓ ?

A 1; B $\frac{1}{2}$; C $\frac{1}{8}$; D 0.

1109. Suprafața plană determinată de graficul funcției g, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = f(x) - e^x$, axa Ox și dreptele de ecuații $x = 1$ și $x = 2$ are aria egală cu: ✓ ?

A 0; B 1; C e; D e^2.

1110. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Atunci rezultatul calculului ✓ ?

$$A^{2012} - 6A^{2011} - A^{2010} - A^4 + 6A^3 + A^2$$

este:

A O_2; B I_2; C A^2; D A^{12}.

1111. Valoarea limitei ✓ ?

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2-k^2}}$$

este:

A 0; B ∞; C $\frac{\pi}{2}$; D π.

1112. Fie sistemul de ecuații ✓ ?

$$\begin{cases} x+2y+z=0 \\ 2x+9y+z=0. \\ x-3y+2z=0 \end{cases}$$

și tripletul (x, y, z), o soluție nenulă a sistemului. Valoarea expresiei $\frac{x^2-y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2}$ este:

A $\frac{7x}{5}$; B $\frac{73}{75}$; C $\frac{y-7z}{5}$; D $\frac{77}{75}$.

Problemele **1113.** și **1114.** se referă la numărul complex și nenul z, unde $(z+1)^2 = z$.

1113. Rezultatul calculului $\frac{z^{4044}+1}{z^{2022}}$ este: ✓ ?

A z^2; B 1; C 2; D z.

1114. Notăm $P = \sum_{k=1}^{2024} z^k$ și $Q = \prod_{k=1}^{2024} z^k$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A $P, Q \in \mathbb{R}$;

B $P \leq Q$;

C $P + Q = 0$;

D $P > Q$.

1115. Fie un poligon cu n laturi și vârfurile $A_0, A_1, \ldots, A_n$. Atunci rezultatul calculului $\sum_{k=0}^{n-1}\overrightarrow{A_k \cdot A_{k+1}} + \overrightarrow{A_n \cdot A_0}$ este: ✓ ?

A $\overrightarrow{A_{n-1} \cdot A_n}$; B $\overrightarrow{0}$; C $\overrightarrow{A_n \cdot A_0}$; D $\overrightarrow{A_0 \cdot A_n}$.

1116. Fie polinomul $f = x^3 - x^2 + x + 1$, cu rădăcinile x_1, x_2 și x_3. Valoarea determinantului ✓ ?

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3-1 \\ x_1 & x_2-1 & x_3 \\ x_1-1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix}$$

este:

A x_1^2; B x_2^2; C x_3^2; D 0.

1117. Valoarea limitei ✓ ?

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^{2023} + 2^{2023} + \cdots + n^{2023}}{n^{2024}}$$

este:

A 0; B ∞; C $\frac{1}{2024}$; D 2024.

1118. Fie polinomul $f = 2X^{2024}+6X^{2023}+17X^2+8$. Dacă $x_i, i = \overline{1, 2024}$ sunt rădăcinile polinomului f, rezultatul calculului $\sum_{i=1}^{2024} x_i \cdot \prod_{i=1}^{2024} x_i$ este: ✓ ?

A -12; B 6; C -2024; D 17.

1119. Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = e^x(x^2 + 2x - 2)$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A f crescătoare pe $[-4, +\infty)$;

C f crescătoare pe $(-\infty, -4]$;

B $f(x) \leq 6e^{-4}, \forall x \in (-\infty, 0]$;

D f descrescătoare pe $\mathbb{R}$.

1120. Rezultatul calculului $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^4(x)} \mathrm{d}x$ este: ✓ ?

A $\frac{2}{7}$; B $\frac{4}{3}$; C $\frac{\pi}{4}$; D $\frac{4\pi}{3}$.

Testul 8

1121. Fie matricea $F = \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{2} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}_5)$. Sunt adevărate următoarele afirmații: ✓ ?

A $F^{4k+1} = \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{2} \end{pmatrix}$;

B $F^{4k+2} = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{4} \\ \hat{4} & \hat{0} \end{pmatrix}$;

C $F^{4k+3} = \begin{pmatrix} \hat{3} & \hat{4} \\ \hat{4} & \hat{3} \end{pmatrix}$;

D $\det \sum_{i=0}^{3} F^{4k+i} = \hat{0}$.

1122. Fie $\vec{i}$ și $\vec{j}$ versorii unui sistem cartezian. Dacă vectorii $\vec{u} = 3\vec{i} + (p+2)\vec{j}$ și $\vec{v} = 9\vec{i} - 6\vec{j}$ sunt paraleli, atunci parametrul $p \in \mathbb{R}$ poate să fie: ✓ ?

A -2; B -4; C 0; D 2.

1123. Se notează cu ℓ valoarea limitei ✓ ?

$$\ell = \lim_{x\to 0} (\sin x + \cos x)^{\frac{1}{x}}.$$

Să se indice care dintre următoarele afirmații sunt adevărate:

A $\ell = \infty$; B $\ell < 1$; C $\ell \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; D $\ell \in (2, \infty)$.

1124. Suma soluțiilor ecuației $9^{x+1} - 6^x = 2^{2x}$ este ✓ ?

A -2; B -9; C 2; D 20.

1125. Punctele $P(1,3)$, $Q(3,2)$ sunt vârfuri ale paralelogramului $PQRS$ şi $H(2,1)$ este centrul de greutate al triunghiului PQR. Să se indice care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate. ✓ ?

A Aria triunghiului PQR este egală cu 4.5.

B Aria triunghiului PQR este egală cu 9.

C Aria paralelogramului $PQRS$ este egală cu 9.

D Aria paralelogramului $PQRS$ este egală cu 18.

1126. Valoarea integralei $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x$ este ✓ ?

A 0; B 1; C $\sqrt{2} - 1$; D $\ln\left(1 + \sqrt{2}\right)$.

1127. Dacă funcția $f\colon (\mathbb{Z}_6, +) \to (\mathbb{Z}_{12}, +)$ este morfism de grupuri și $f(\hat{2}) = \hat{4}$, atunci ✓ ?

A $f(\hat{1}) = \hat{2}$; B $f(\hat{1}) = \hat{8}$; C $f(\hat{3}) = \hat{5}$; D Nu există astfel de morfism.

1128. Fie k un parametru real și considerăm sistemul de ecuații ✓ ?

$$\begin{cases} x - ky + z = 0 \\ -x + ky + z = 0. \\ x + y - kz = 0 \end{cases}$$

Care dintre următoarele afirmații sunt corecte?

A Sistemul este compatibil pentru orice valoare a lui k;

B Există $k \in \mathbb{R}$ pentru care sistemul este incompatibil;

C Există un singur număr k pentru care determinantul matricei sistemului este 0;

D z ia aceeași valoare pentru orice k pentru care sistemul este compatibil.

1129. Un grup de 9 copii doresc să organizeze un meci de volei. Pentru aceasta, copiii aleg un arbirtu dintre ei, apoi dintre ceilalți formează 2 echipe denumite A și B, fiecare având câte 4 jucători. În câte moduri pot face acest lucru? ✓ ?

A 630; B 252; C 504; D 1260.

1130. Valoarea integralei $\displaystyle\int_{-\pi/6}^{\pi/6} \sqrt{(1-\cos x)(1-\cos 3x)}, \mathrm{d}x$ este: ✓ ?

A $\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}$; B $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$; C $\dfrac{1}{2}$; D $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

Problemele **1131.** și **1132.** se referă la funcția $f : [0, \pi] \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin x + \cos(2x)$.

1131. $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ este ✓ ?

A $\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}$; B $\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}$; C $\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; D $\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

1132. Numărul soluțiilor ecuației $f(x) = 0$ în intervalul $[0, \pi]$ este ✓ ?

A 1; B 2; C 3; D 4.

1133. Valoarea limitei $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1 - x}{x^2}$ este: ✓ ?

A 0; B $\dfrac{1}{2}$; C 1; D $+\infty$.

1134. Fie a un parametru real și considerăm legea de compoziție $x * y = xy + 2ax + 2ay + 4$ pe $\mathbb{R}$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A Dacă $*$ admite element neutru, atunci a este unic determinat;

B Există mai multe valori ale lui a pentru care $*$ admite element neutru;

C Dacă e este element neutru pentru $*$, atunci $e = \frac{2}{a}$;

D Dacă e este element neutru pentru $*$, atunci $e = -\frac{2}{a}$.

1135. Fie $a, b \in \mathbb{R}$ și fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcția definită prin ✓ ?

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+ax)}{x}, & \text{dacă } x < 0 \\ bx + 3x^2, & \text{dacă } x \geq 0. \end{cases}$$

Dacă f este derivabilă pe $\mathbb{R}$, atunci valoarea sumei $a + b$ este:

A 2; B -1; C 0; D Alt răspuns.

1136. Folosind notațiile obișnuite în triunghiul ABC avem $a = 10$, $b = 2$ și $\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{1}{2}$. ✓ ?
Să se indice care dintre următoarele afirmații sunt adevărate.

A $c = 4\sqrt{5}$.

B $c = 6$.

C $\sin C = \frac{4}{5}$.

D $\mathcal{A}ria\,(ABC) = 8$.

1137. Fiind dată funcția g cu $g(3x) = 4g(x)$, $\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = 3$, să se indice care este ✓ ?
valoarea integralei $\int_1^3 g(x)\,\mathrm{d}x$.

A 12; B 24; C 33; D 36.

1138. Dacă M este mulțimea numerelor impare de cinci cifre, atunci numărul elementelor din M este ✓ ?

A 45000; B 44999; C 45001; D 50000.

1139. Partea imaginară a numărului $(1+i)^{2024}$ este egală cu: ✓ ?

A 0; B 2^{1012}; C -2^{1012}; D 2^{2024}.

1140. Fie S mulțimea soluțiilor reale ale ecuației $\log_4 x + \log_{16} x^2 + \log_{64} x^3 + \cdots +$ ✓ ?
$\log_{4^n} x^n = n$, atunci

A $S \subseteq [0,2)$;

B $S \subseteq [1,4]$;

C S are exact 1 element;

D S sunt exact 3 elemente.

1141. Fie polinomul $Q \in \mathbb{R}[x]$. Știind că acesta are forma ✓ ?

$$Q(x) = \frac{x^m}{b_m b_{m-1}} + \frac{x^{m-1}}{b_{m-1}b_{m-2}} + \cdots + \frac{x^2}{b_2 b_1} + \frac{m}{b_1 b_m}$$

care dintre următoarele afirmații **nu** sunt adevărate, considerând că $b_1, b_2, \ldots, b_m$ sunt termenii unei progresii geometrice?

A $(x-1) \nmid Q$;

B $Q(1) = m + \dfrac{m}{b_1 b_m}$;

C $Q(1) = 0$;

D $Q(1) = m - 1 + \dfrac{m}{b_1 b_m}$.

1142. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$ se notează $J_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{3n}}{1+x^3}\,dx$. Să se indice care dintre următoarele afirmații sunt adevărate. ✓ ?

A $J_n + J_{n+1} = \dfrac{1}{3n+1}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

B $\lim\limits_{n\to\infty} J_n = 0$.

C $\lim\limits_{n\to\infty} nJ_n = \dfrac{1}{3}$.

D $\lim\limits_{n\to\infty} nJ_n = \dfrac{1}{6}$.

1143. Fie șirul (b_n) cu $b_1 = 3$ și definit prin relația de recurență ✓ ?

$$n \cdot b_{n+1} = (3n+3)(b_n + n \cdot 3^n), \quad n \geq 1.$$

Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

A $b_n = n^2 3^n$

B $b_n = (n+1)^2 3^n$

C $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$

D $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$

1144. Considerăm triunghiul dreptunghic PQR ($m(\widehat{Q}) = 90°$), unde p, q sunt lungimile catetelor și r lungimea ipotenuzei acestui triunghi. Considerăm, de asemenea, punctele $G(-2,0)$, $H(2,0)$, $N\left(\dfrac{q-r}{p}, 0\right)$ și dreapta (d) $px + qy + r = 0$. Notăm prin $\operatorname{dist}(X,d)$ distanța de la punctul oarecare X la dreapta d. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A Punctele $G(-2,0)$ și $H(2,0)$ aparțin dreptei d;

B $\operatorname{dist}(N,d) = \dfrac{q}{r}$;

C Punctul $N\left(\dfrac{q-r}{p}, 0\right)$ aparține dreptei d;

D $\dfrac{|q^2 - 3\cdot p^2|}{r^2}$.

Testul 9

1145. Numărul de valori a lui $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ care verifică ecuaţia ✓ ?

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sin\theta & \cos\theta & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1-\cos^2\theta & 1-\sin^2\theta & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = 0$$

sunt:

A 1; B 2; C 3; D 0.

1146. Rezultatul calculului $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1!+2!+\cdots+n!}{(n+1)!}$ este: ✓ ?

A 0; B ∞; C $\dfrac{1}{2024}$; D 2024.

1147. Notăm cu $S = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \log_2 \dfrac{k^2+2k}{k^2+2k+1}$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A $S \in [1,2)$; B $S = -1$; C $S \in \mathbb{Z}$; D $S < 0$.

1148. Fie triunghiul ABC, cu $A(2,0)$, $B(-3,-3)$ și $G\left(-1, \frac{1}{3}\right)$, unde G reprezintă centrul de greutate al triunghiului. Fie d_1 perpendiculara dusă din B pe AC, d_2 perpendiculara dusă din C pe AB și d_3 perpendiculara dusă din A pe BC. Notăm cu α unghiul ascuțit format de d_1 și d_2, cu θ unghiul ascuțit format de d_1 și d_3, cu γ unghiul ascuțit format de d_2 și d_3. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A $\tan\alpha = 3\tan\theta$;

B $\tan\alpha + 3\tan\theta + 13\tan\gamma = 24$;

C $\tan\gamma = 4\tan\alpha$;

D $12\tan\theta = 13\tan\gamma$.

1149. Considerăm T ca fiind cel mai mic număr natural cu suma și produsul cifrelor egale cu 42. Atunci numărul cifrelor lui T este: ✓ ?

A 30; B 31; C 32; D 33.

1150. Fie $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(x^2+x+1)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x$. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate? ✓ ?

A $I = \dfrac{2}{3} - \dfrac{2}{\sqrt{3}}$;

B $I > 0$;

C $I = \dfrac{2}{\sqrt{3}} - \dfrac{2}{3}$;

D $I < 0$.

1151. În inelul $\mathbb{Z}_{11}$ considerăm elementul $\widehat{3}$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A $\widehat{3}^1 + \widehat{3}^5 = \widehat{4}$;

B $\widehat{3}^{22} - \widehat{3}^{14} - \widehat{3}^{13} = \widehat{0}$;

C $\widehat{3}^{2024} = \widehat{1}$;

D $\widehat{3}^{2024} + \widehat{3}^{7073} + \widehat{3}^{9174} = \widehat{2}$.

1152. Fie ecuația $\sin^2 x + \sin^2 2x = 1$, cu $x \in [0, \pi]$. Numărul soluţiilor distincte ale ecuaţiei este: ✓ ?

A 1;
B 2;
C 3;
D 4.

1153. Notăm $I = \displaystyle\int_6^{21} \frac{4(x^7 + 7x^6 + 3x^4 + 8x^3 + 12x^2)}{2x^3(x^3 + 7x^2 + 3) + 8x(2x + 3)} \mathrm{d}x$. Atunci: ✓ ?

A $I = 105$;
B $I = 405$;
C $I = 201$;
D $I = 441$.

1154. Fie $\overrightarrow{i}$ și $\overrightarrow{j}$ versorii unui sistem cartezian. Dacă vectorii $\overrightarrow{u} = (m+2)\overrightarrow{i} + 6\overrightarrow{j}$ și $\overrightarrow{v} = (m-2)\overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j}$ sunt coliniari, atunci parametrul $m \in \mathbb{R}$ are valoarea: ✓ ?

A $-\dfrac{2}{3}$;
B $-\dfrac{4}{3}$;
C 0;
D $\dfrac{2}{3}$.

1155. Valoarea lui $\operatorname{arctg} \sqrt{5} - \operatorname{arctg} \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ este: ✓ ?

A $\arcsin \dfrac{2}{3}$;
B $\arccos \dfrac{3}{\sqrt{5}}$;
C $\operatorname{tg} \dfrac{2}{\sqrt{5}}$;
D $\operatorname{arctg} \dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

Problemele **1156.** și **1157.** se referă la polinomul $f = x^3 + mx^2 + 20x + n$, unde $m, n \in \mathbb{R}$ și $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$ sunt rădăcinile lui f.

1156. Dacă $m = 2\sqrt{15}$ și $n \neq 0$, atunci valoarea expresiei $(x_1 - x_2)^2 + (x_1 - x_3)^2 + (x_2 - x_3)^2$ este: ✓ ?

A 7;
B $2x_2^2$;
C x_1^2;
D 0.

1157. Dacă $x = -\dfrac{m}{4}$ este o rădăcină dublă a polinomului f, cu $m > 0$, atunci valoarea lui n este: ✓ ?

A 4;
B 8;
C 16;
D 20.

1158. Fie $I = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \sin^2 x} \mathrm{d}x$. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate? ✓ ?

A $I = \dfrac{\pi}{4\sqrt{2}} \ln \left| \dfrac{-2\sqrt{2} - 3}{2\sqrt{2} - 3} \right|$;

B $I = \dfrac{\pi}{4\sqrt{2}} \ln \left| \dfrac{2\sqrt{2} - 3}{-2\sqrt{2} - 3} \right|$;

C $I = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}\left(\ln\left|\frac{1+\sqrt{2}}{-1+\sqrt{2}}\right| - \ln\left|\frac{1-\sqrt{2}}{-1-\sqrt{2}}\right|\right)$;

D $I = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}\left(\ln\left|\frac{1-\sqrt{2}}{-1-\sqrt{2}}\right| - \ln\left|\frac{1+\sqrt{2}}{-1+\sqrt{2}}\right|\right)$.

1159. Se dă sistemul de ecuații $\begin{cases} 2x+5y+2z=4 \\ x+3y+2z=5 \\ 3x+2y+z=2 \end{cases}$ cu soluții în $\mathbb{R}$. Fie $x+y+z=\frac{a}{b}$, ✓ ?
unde tripletul (x,y,z) este soluție a sistemului de ecuații. Atunci rezultatul calculului $a-b$ este:

A 11; B 15; C 17; D 29.

1160. Rezultatul calculului $L = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x - \arcsin x}{x - \operatorname{arctg} x}$ este: ✓ ?

A $L = \frac{1}{2}$; B $L = \frac{4}{2}$; C $L = \frac{1}{3}$; D $L = -\frac{1}{2}$.

Problemele **1161.** și **1162.** se referă la funcția $f : (1,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln\left(1+\frac{2}{x-1}\right)$.

1161. Pe $(1,+\infty)$, funcția f este: ✓ ?

A crescătoare;
B descrescătoare;
C concavă;
D convexă.

1162. Rezultatul calculului $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=2}^{n} f'(k)$ este: ✓ ?

A $-\frac{3}{2}$; B $\frac{3}{2}$; C $\frac{1}{2}$; D $-\frac{1}{2}$.

1163. Fie $I = \int_0^e \frac{e^x}{e^x + e^{e-x}} \mathrm{d}x$. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate? ✓ ?

A $I = \frac{1}{2}$; B $I = \frac{e}{2}$; C $I = e$; D $I = 0$.

1164. Se consideră două drepte d_1 şi d_2, astfel încât $d_1 : 3x+2y-5=0$ şi $d_2 : 2x+3y+1=0$. Fie a un număr real şi P punctul de coordonate $(2,a)$, astfel încât punctul P este egal depărtat de dreptele d_1 şi d_2. Atunci valoarea lui a poate fi: ✓ ?

A $-\frac{6}{5}$; B 0; C $\frac{5}{6}$; D -4.

1165. Se dă inecuaţia $C_x^{x-1} + C_{x-1}^{x-3} \leq 9$. Care dintre următoarele variante de răspuns sunt soluţii ale acesteia? ✓ ?

A 2; B 3; C 4; D 5.

1166. Valoarea limitei $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(1+\frac{2n}{2k+n}\right)$ este: ✓ ?

A $1+\ln 3$; B $\ln\frac{5}{3}$; C $1+2\sqrt{3}$; D $\frac{1}{2}\ln 3$.

Problemele **1167.** și **1168.** se referă la șirul de numere complexe $(z_n)_{n\geq 1}$, $z_n=\sum\limits_{k=1}^{n} i^k$.

1167. Rezultatul calculului $\frac{z_{2025}+z_{2026}+z_{2027}}{2}$ este: ✓ ?

A i; B $1+i$; C $-1+i$; D 1.

1168. Notăm $S=\sum\limits_{k=1}^{2024} z_k$. Atunci rezultatul calculului $\left|S+\bar{S}\right|$ este: ✓ ?

A 2024; B -2024; C 1012; D -1012.

Testul 10

1169. Fie $I = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1}{1+\cos\frac{x}{2}}\mathrm{d}x$. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate? ✓ ?

A $I = 1$; B $I = 2$; C $I = 4$; D $I = 0$.

1170. Fie $x, y \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Dacă are loc relația $\sin x = 5\cos(x+y)\sin y$, valoarea maximă a lui $\operatorname{tg} x$ este: ✓ ?

A $\dfrac{4}{\sqrt{5}}$; B 1; C $\dfrac{5}{2\sqrt{6}}$; D $\dfrac{1}{5}$.

1171. Valoarea lui $\arcsin\left(\sin\dfrac{6\pi}{5}\right)$ este: ✓ ?

A $\dfrac{\pi}{5}$; B $\dfrac{6\pi}{5}$; C $-\dfrac{\pi}{5}$; D $\sin\dfrac{\pi}{5}$.

1172. Punctul $B(7,2)$ este vârful unui romb în care una dintre diagonale se află pe dreapta de ecuaţie $2y - x = 1$. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate? ✓ ?

A Distanţa de la vârful B la diagonală dată este egală cu $\sqrt{5}$;

B Ecuaţia dreptei pe care se află cealaltă diagonală este $2y + x - 10 = 0$;

C Dacă punctul $A(9,5)$ este un vârf al rombului, aria rombului este $\dfrac{16\sqrt{61}}{10}$;

D Punctul $D(\dfrac{27}{5}, \dfrac{26}{5})$ este de asemenea vârf al rombului.

1173. Valoarea limitei $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{(2n-k)(2n+k)}}$ este: ✓ ?

A 1; B $\dfrac{\pi}{6}$; C $\dfrac{\pi}{4}$; D $\dfrac{1}{2}$.

1174. Fie $I = \displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - \sqrt{\sqrt{2} - x}}\,\mathrm{d}x$. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate? ✓ ?

A $I = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$; B $I = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$; C $I = \dfrac{1}{2}$; D $I = -\dfrac{1}{2}$.

1175. Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2(1-x)^3 + |x|$. Știind că $-5x^4 + 12x^3 - 9x^2 + 2x - 1 < 0, \forall x \in \mathbb{R}$ și că ecuația $-5x^4 + 12x^3 - 9x^2 + 2x + 1 = 0$ are o singură rădăcină reală pozitivă aproximativ egală cu $a = 1.38342$, care dintre următoarele afirmații sunt corecte? ✓ ?

A f este crescătoare pe $(0, \infty)$;
C f are un punct unghiular;
B f are două puncte de extrem local;
D f este crescătoare pe $(0, a)$.

1176. Fie $I = \displaystyle\int_0^{\pi} \sin^3 x dx$. Care dintre următoarele afirmaţii este adevărată? ✓ ?

A $I = \dfrac{4}{3}$;
B $I = \dfrac{3}{2}$;
C $I = \dfrac{2}{3}$;
D $I = 0$.

1177. Fie $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ astfel încât $\mathrm{tg}x + \mathrm{ctg}x = 3$. Care este valoarea lui $\dfrac{3}{7} \cdot (\sin 2x + \cos 4x)$? ✓ ?

A $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$;
B $\dfrac{1}{3}$;
C $\dfrac{1}{2}$;
D $-\dfrac{1}{3}$.

1178. Fie $L = \lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{ax+b}{2x-1}\right)^x = e^2$, unde $a, b \in \mathbb{R}$. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate? ✓ ?

A $a = 2,\ b = 1$;
B $a = 2,\ b = -1$;
C $a = 2,\ b = 3$;
D $a,\ b \notin \mathbb{R}$.

1179. Fie $x > 0$. Coeficientul binomial al termenului care îl conține pe x^5 din dezvoltarea binomului ✓ ?

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^3}\right)^{2020}$$

este:

A C_{2020}^{807};
B C_{2020}^{1213};
C C_{2020}^{806};
D C_{2020}^{1214}.

1180. Fie funcţia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ definită prin $g(x) = e^x$. Să se indice care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate. ✓ ?

A g este un morfism de grupuri între grupurile $(\mathbb{R}, +)$ și $(\mathbb{R}^*, \cdot)$;

B g este injectivă;

C g este surjectivă;

D g este un izomorfism de grupuri între grupurile $(\mathbb{R}, +)$ și $(\mathbb{R}^*, \cdot)$.

1181. Fie $(a, b) \in \mathbb{R}_+^2$ soluție a sistemului de ecuații ✓ ?

$$\begin{cases} \log_{100} a + \log_{81} b = 0 \\ \log_a 100 - \log_b 81 = 1 \end{cases}.$$

Valoarea expresiei $\log_{30}\left(a^2\right) - \log_{30} b$ este egală cu:

A 0; B 8; C 4; D 12.

1182. Piciorul perpendicularei din $(1,2)$ pe dreapta d este $A(5,4)$. Ecuația dreptei d este: ✓ ?

A $4x-2y+13=0$;
C $2x+y-14=0$;
B $2x+y+7=0$;
D $6x-3y+1=0$.

1183. Fie A un punct pe latura BC a triunghiului BCD astfel încât $\dfrac{BA}{AC}=\dfrac{3}{4}$ și fie M mijlocul segmentului AD. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A $\overrightarrow{BM}=\frac{3}{7}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{7}\overrightarrow{BD}$;
C $\overrightarrow{AM}=\frac{3}{7}\overrightarrow{AB}$;
B $\overrightarrow{BM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BD})$;
D $\overrightarrow{DM}=\frac{3}{14}\overrightarrow{DC}+\frac{2}{7}\overrightarrow{DB}$

1184. Dacă notăm cu S mulțimea soluțiilor reale ale ecuației ✓ ?

$$\sqrt{x-5\sqrt{x+2}+11}+\sqrt{x+5\sqrt{x+2}+11}=7,$$

atunci

A $2\in S$;
C mulțimea S este finită;
B $14\in S$;
D mulțimea S este infinită;

1185. Fie șirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ cu termenul general $a_n=\dfrac{n^n}{1+2^2+3^3+...+n^n}$. Care este limita acestui şir? ✓ ?

A 0; B 1; C -1; D 2.

1186. Care este aria maximă a unui triunghi a cărui semiperimetru este $p=4$? ✓ ?

A $\sqrt{\dfrac{256}{27}}$; B $\sqrt{\dfrac{512}{27}}$; C $\sqrt{\dfrac{128}{9}}$; D $\sqrt{\dfrac{1024}{81}}$.

1187. Valoarea limitei $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin x}}$ este: ✓ ?

A 1; B e; C 0; D $\sqrt{e}$.

1188. Fie $I=\displaystyle\int_0^{\pi^2/16}\frac{\operatorname{tg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate? ✓ ?

A $L = -\ln\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; B $L = -2\ln\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; C $L = \dfrac{\ln 4}{2}$; D $L = \dfrac{\ln 2}{2}$.

1189. Fie ecuația $\left(\dfrac{2+iw}{2-iw}\right)^2 + \left(\dfrac{2+iw}{2-iw}\right) + 1 = 0$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? ✓ ?

A Ecuația are 3 soluții;

B Ecuația are 1 soluție reală;

C Ecuația nu are soluții reale;

D Suma soluțiilor ecuației este -1.

1190. Se dă inecuaţia $\log_2(2x+3) - 2\log_2\dfrac{x}{8\sqrt{2}} < 7$. Care sunt valorile lui x care satisfac această inecuaţie? ✓ ?

A $x \in (0,1) \cup (3,\infty)$;

B $x \in (3,\infty)$;

C $x \in (-\infty,-1)$;

D Nu există valori pentru x care satisfac inecuaţia.

1191. Fie $(G,\cdot)$ un grup abelian cu elementul neutru e și $x, y \in G$ astfel încât $ord(x) = 2$ și $xy = y^2$. Atunci $y^{6561} =$? ✓ ?

A 1; B e; C y; D y^2;

1192. Se consideră dreapta $d : 4x - y = 0$ și punctele $A(2,3)$, $B(0,0)$. Coordonatele punctului C de pe dreapta d, pentru care triunghiul ABC este dreptunghic în C, pot fi: ✓ ?

A $C\left(\dfrac{14}{17}, \dfrac{56}{17}\right)$; B $C\left(\dfrac{34}{17}, \dfrac{136}{17}\right)$; C $C\left(\dfrac{13}{17}, \dfrac{42}{17}\right)$; D $C\left(\dfrac{10}{17}, \dfrac{40}{17}\right)$.

Partea

III

Răspunsuri și rezolvări

8

Răspunsuri

1. A D
2. C
3. A
4. B
5. B D
6. C
7. B
8. D
9. C
10. D
11. D
12. D
13. C
14. D
15. C
16. C
17. D
18. A D
19. B D
20. D
21. B D
22. B
23. A D
24. C
25. B
26. B C
27. B
28. A
29. A
30. B D
31. B C
32. A
33. B
34. C D
35. C
36. A C
37. B
38. A D
39. C
40. A C D
41. A B
42. B C
43. B
44. C D
45. A B C
46. B C
47. D
48. B
49. A
50. C D
51. A B D
52. B C D
53. C D
54. C
55. C
56. A B C
57. B
58. A B D
59. A B C
60. A C D
61. A B D
62. B
63. A B D
64. A C
65. C D
66. A C
67. D
68. B C
69. D
70. D
71. A B
72. B D
73. A B D
74. B C
75. B C
76. A B
77. D
78. A D
79. C
80. C D
81. A D
82. A C
83. B D
84. D
85. C
86. B
87. A B
88. A C

89. $\boxed{B}$ $\boxed{C}$
90. $\boxed{A}$ $\boxed{B}$
91. $\boxed{A}$ $\boxed{B}$ $\boxed{D}$
92. $\boxed{B}$ $\boxed{C}$
93. $\boxed{A}$ $\boxed{B}$
94. $\boxed{A}$ $\boxed{C}$
95. $\boxed{A}$ $\boxed{D}$
96. $\boxed{A}$ $\boxed{B}$ $\boxed{D}$
97. $\boxed{B}$ $\boxed{C}$ $\boxed{D}$
98. $\boxed{A}$ $\boxed{B}$
99. $\boxed{C}$ $\boxed{D}$
100. $\boxed{C}$ $\boxed{D}$
101. $\boxed{B}$ $\boxed{D}$
102. $\boxed{B}$ $\boxed{C}$
103. $\boxed{c}$
104. $\boxed{A}$ $\boxed{C}$
105. $\boxed{A}$ $\boxed{B}$
106. $\boxed{D}$
107. $\boxed{A}$ $\boxed{D}$
108. $\boxed{A}$ $\boxed{C}$
109. $\boxed{B}$ $\boxed{D}$
110. $\boxed{D}$
111. $\boxed{B}$ $\boxed{C}$
112. $\boxed{C}$
113. $\boxed{C}$
114. $\boxed{B}$
115. $\boxed{A}$ $\boxed{D}$
116. $\boxed{A}$
117. $\boxed{C}$
118. $\boxed{A}$ $\boxed{B}$ $\boxed{D}$
119. $\boxed{B}$ $\boxed{C}$ $\boxed{D}$
120. $\boxed{A}$ $\boxed{D}$
121. $\boxed{A}$ $\boxed{C}$ $\boxed{D}$

122. $\boxed{A}$ $\boxed{C}$
123. $\boxed{B}$
124. $\boxed{B}$ $\boxed{D}$
125. $\boxed{B}$ $\boxed{D}$
126. $\boxed{A}$ $\boxed{B}$
127. $\boxed{A}$ $\boxed{B}$ $\boxed{D}$
128. $\boxed{B}$ $\boxed{C}$
129. $\boxed{C}$
130. $\boxed{D}$
131. $\boxed{A}$ $\boxed{C}$
132. $\boxed{A}$
133. $\boxed{B}$
134. $\boxed{A}$ $\boxed{D}$
135. $\boxed{C}$
136. $\boxed{B}$ $\boxed{C}$
137. $\boxed{B}$ $\boxed{D}$
138. $\boxed{A}$
139. $\boxed{C}$
140. $\boxed{D}$
141. $\boxed{A}$
142. $\boxed{C}$
143. $\boxed{B}$
144. $\boxed{C}$
145. $\boxed{B}$ $\boxed{C}$ $\boxed{D}$
146. $\boxed{C}$
147. $\boxed{A}$ $\boxed{B}$
148. $\boxed{B}$
149. $\boxed{A}$ $\boxed{B}$ $\boxed{D}$
150. $\boxed{C}$
151. $\boxed{B}$
152. $\boxed{B}$
153. $\boxed{B}$ $\boxed{C}$ $\boxed{D}$
154. $\boxed{A}$ $\boxed{B}$ $\boxed{D}$

155. $\boxed{B}$ $\boxed{C}$ $\boxed{D}$
156. $\boxed{A}$ $\boxed{B}$ $\boxed{C}$
157. $\boxed{B}$
158. $\boxed{C}$
159. $\boxed{A}$ $\boxed{D}$
160. $\boxed{B}$ $\boxed{D}$
161. $\boxed{B}$
162. $\boxed{C}$
163. $\boxed{A}$ $\boxed{D}$
164. $\boxed{B}$
165. $\boxed{A}$ $\boxed{C}$ $\boxed{D}$
166. $\boxed{A}$ $\boxed{B}$ $\boxed{C}$
167. $\boxed{B}$
168. $\boxed{A}$ $\boxed{B}$
169. $\boxed{D}$
170. $\boxed{C}$
171. $\boxed{D}$
172. $\boxed{A}$ $\boxed{B}$
173. $\boxed{B}$
174. $\boxed{A}$
175. $\boxed{D}$
176. $\boxed{A}$
177. $\boxed{B}$
178. $\boxed{A}$ $\boxed{C}$ $\boxed{D}$
179. $\boxed{C}$ $\boxed{D}$
180. $\boxed{A}$
181. $\boxed{D}$
182. $\boxed{A}$
183. $\boxed{B}$ $\boxed{C}$
184. $\boxed{B}$
185. $\boxed{B}$ $\boxed{D}$
186. $\boxed{B}$
187. $\boxed{C}$

188. $\boxed{B}$ $\boxed{C}$
189. $\boxed{D}$
190. $\boxed{D}$
191. $\boxed{B}$
192. $\boxed{A}$
193. $\boxed{A}$
194. $\boxed{C}$
195. $\boxed{A}$ $\boxed{C}$ $\boxed{D}$
196. $\boxed{C}$
197. $\boxed{A}$
198. $\boxed{C}$
199. $\boxed{B}$
200. $\boxed{A}$
201. $\boxed{C}$
202. $\boxed{A}$
203. $\boxed{B}$ $\boxed{C}$ $\boxed{D}$
204. $\boxed{A}$ $\boxed{B}$ $\boxed{D}$
205. $\boxed{A}$
206. $\boxed{B}$
207. $\boxed{A}$ $\boxed{C}$
208. $\boxed{D}$
209. $\boxed{A}$
210. $\boxed{D}$
211. $\boxed{A}$ $\boxed{D}$
212. $\boxed{A}$ $\boxed{C}$
213. $\boxed{A}$
214. $\boxed{A}$
215. $\boxed{B}$ $\boxed{C}$
216. $\boxed{A}$ $\boxed{C}$
217. $\boxed{B}$ $\boxed{C}$ $\boxed{D}$
218. $\boxed{A}$ $\boxed{C}$
219. $\boxed{B}$ $\boxed{C}$ $\boxed{D}$
220. $\boxed{B}$ $\boxed{C}$

221. A
222. A B C
223. C D
224. B C
225. B D
226. C D
227. A
228. B
229. B
230. A B
231. C D
232. C
233. A
234. B
235. B
236. D
237. B
238. A C D
239. B
240. A B D
241. C
242. B
243. A C D
244. C
245. A
246. A
247. D
248. A D
249. B D
250. A
251. C
252. A
253. C
254. B
255. B C
256. B C
257. A B D
258. B
259. A
260. A
261. B
262. A
263. B
264. C D
265. A D
266. B D
267. A B
268. A
269. A
270. A B C
271. A C D
272. B C D
273. B D
274. D
275. A
276. A B C
277. B
278. B
279. B
280. A B
281. B
282. A C
283. C
284. A C D
285. C
286. B
287. C D
288. D
289. A C D
290. C D
291. A
292. D
293. C
294. A B
295. B D
296. B C
297. C
298. C
299. B
300. D
301. A
302. A D
303. C
304. B C
305. B
306. C
307. C
308. A D
309. b
310. A D
311. A D
312. B D
313. D
314. B D
315. B
316. A C
317. A
318. A B D
319. B C
320. A B C
321. B D
322. A D
323. A D
324. A
325. A
326. C D
327. A B D
328. B D
329. A B C
330. A
331. C D
332. A
333. C
334. B D
335. A C
336. A B C
337. D
338. A B C
339. A C
340. C
341. B C
342. C D
343. B
344. A B
345. C
346. B
347. B
348. C
349. B
350. D
351. C
352. C

353. A C D
354. A
355. B
356. B C
357. B
358. B C D
359. C D
360. C D
361. B
362. C
363. B
364. A C
365. A D
366. A B D
367. B
368. A
369. A
370. C
371. B D
372. A B D
373. A C
374. B D
375. A C
376. B C D
377. A C D
378. B C
379. A B C
380. C
381. B
382. C
383. B
384. A
385. B C
386. A D
387. A D
388. A B
389. B
390. A B D
391. A C
392. A
393. A D
394. A B D
395. D
396. C D
397. B
398. D
399. D
400. A B D
401. A
402. B C
403. C
404. D
405. A D
406. C
407. A
408. C
409. B
410. A B C
411. B
412. C
413. A
414. C
415. B
416. A B D
417. A
418. A
419. B
420. D
421. C
422. D
423. B
424. B C
425. D
426. B
427. B
428. B
429. A D
430. D
431. B C
432. B
433. A C
434. B
435. C
436. A D
437. D
438. B C
439. A C
440. A B C
441. B D
442. B C
443. C
444. B C
445. A C D
446. A B
447. A B
448. A B C
449. A D
450. A D
451. B C D
452. A D
453. A B
454. C
455. A
456. A C D
457. A C
458. D
459. B C D
460. A B
461. B C
462. A
463. C D
464. C
465. A D
466. B C
467. A
468. B D
469. C
470. B
471. A C
472. B
473. A B D
474. A D
475. C
476. A B D
477. A C
478. B C
479. C
480. C
481. A B C
482. D
483. C
484. C

485. $\boxed{\text{B}}$
486. $\boxed{\text{A}}$ $\boxed{\text{D}}$
487. $\boxed{\text{A}}$
488. $\boxed{\text{B}}$
489. $\boxed{\text{A}}$ $\boxed{\text{B}}$
490. $\boxed{\text{C}}$
491. $\boxed{\text{B}}$ $\boxed{\text{C}}$
492. $\boxed{\text{A}}$ $\boxed{\text{B}}$
493. $\boxed{\text{A}}$
494. $\boxed{\text{C}}$
495. $\boxed{\text{D}}$
496. $\boxed{\text{B}}$
497. $\boxed{\text{A}}$
498. $\boxed{\text{D}}$
499. $\boxed{\text{B}}$ $\boxed{\text{D}}$
500. $\boxed{\text{C}}$
501. $\boxed{\text{B}}$
502. $\boxed{\text{B}}$
503. $\boxed{\text{B}}$
504. $\boxed{\text{B}}$
505. $\boxed{\text{A}}$ $\boxed{\text{C}}$
506. $\boxed{\text{A}}$
507. $\boxed{\text{A}}$
508. $\boxed{\text{C}}$
509. $\boxed{\text{B}}$ $\boxed{\text{D}}$
510. $\boxed{\text{C}}$
511. $\boxed{\text{C}}$
512. $\boxed{\text{B}}$ $\boxed{\text{C}}$ $\boxed{\text{D}}$
513. $\boxed{\text{A}}$ $\boxed{\text{B}}$ $\boxed{\text{C}}$
514. $\boxed{\text{B}}$ $\boxed{\text{D}}$
515. $\boxed{\text{C}}$
516. $\boxed{\text{B}}$
517. $\boxed{\text{C}}$
518. $\boxed{\text{B}}$ $\boxed{\text{C}}$
519. $\boxed{\text{C}}$
520. $\boxed{\text{C}}$
521. $\boxed{\text{D}}$
522. $\boxed{\text{A}}$ $\boxed{\text{C}}$ $\boxed{\text{D}}$
523. $\boxed{\text{A}}$ $\boxed{\text{C}}$
524. $\boxed{\text{A}}$ $\boxed{\text{C}}$ $\boxed{\text{D}}$
525. $\boxed{\text{A}}$ $\boxed{\text{D}}$
526. $\boxed{\text{A}}$
527. $\boxed{\text{A}}$ $\boxed{\text{B}}$
528. $\boxed{\text{A}}$ $\boxed{\text{B}}$
529. $\boxed{\text{C}}$ $\boxed{\text{D}}$
530. $\boxed{\text{B}}$ $\boxed{\text{D}}$
531. $\boxed{\text{D}}$
532. $\boxed{\text{B}}$
533. $\boxed{\text{A}}$ $\boxed{\text{B}}$ $\boxed{\text{C}}$
534. $\boxed{\text{C}}$
535. $\boxed{\text{A}}$ $\boxed{\text{B}}$
536. $\boxed{\text{C}}$ $\boxed{\text{D}}$
537. $\boxed{\text{B}}$ $\boxed{\text{C}}$
538. $\boxed{\text{C}}$
539. $\boxed{\text{C}}$
540. $\boxed{\text{B}}$
541. $\boxed{\text{A}}$ $\boxed{\text{B}}$ $\boxed{\text{D}}$
542. $\boxed{\text{A}}$
543. $\boxed{\text{C}}$
544. $\boxed{\text{B}}$
545. $\boxed{\text{A}}$
546. $\boxed{\text{C}}$ $\boxed{\text{D}}$
547. $\boxed{\text{B}}$
548. $\boxed{\text{B}}$
549. $\boxed{\text{A}}$ $\boxed{\text{D}}$
550. $\boxed{\text{C}}$
551. $\boxed{\text{A}}$ $\boxed{\text{B}}$
552. $\boxed{\text{A}}$ $\boxed{\text{B}}$ $\boxed{\text{D}}$
553. $\boxed{\text{A}}$ $\boxed{\text{D}}$
554. $\boxed{\text{C}}$
555. $\boxed{\text{B}}$
556. $\boxed{\text{D}}$
557. $\boxed{\text{B}}$
558. $\boxed{\text{C}}$
559. $\boxed{\text{C}}$
560. $\boxed{\text{A}}$ $\boxed{\text{B}}$
561. $\boxed{\text{A}}$ $\boxed{\text{C}}$
562. $\boxed{\text{D}}$
563. $\boxed{\text{B}}$ $\boxed{\text{C}}$
564. $\boxed{\text{C}}$ $\boxed{\text{D}}$
565. $\boxed{\text{D}}$
566. $\boxed{\text{A}}$ $\boxed{\text{D}}$
567. $\boxed{\text{D}}$
568. $\boxed{\text{A}}$ $\boxed{\text{D}}$
569. $\boxed{\text{D}}$
570. $\boxed{\text{A}}$ $\boxed{\text{C}}$
571. $\boxed{\text{C}}$ $\boxed{\text{D}}$
572. $\boxed{\text{B}}$ $\boxed{\text{C}}$ $\boxed{\text{D}}$
573. $\boxed{\text{C}}$
574. $\boxed{\text{A}}$
575. $\boxed{\text{A}}$
576. $\boxed{\text{B}}$
577. $\boxed{\text{A}}$ $\boxed{\text{B}}$
578. $\boxed{\text{A}}$ $\boxed{\text{C}}$
579. $\boxed{\text{A}}$ $\boxed{\text{C}}$ $\boxed{\text{D}}$
580. $\boxed{\text{A}}$ $\boxed{\text{C}}$
581. $\boxed{\text{A}}$
582. $\boxed{\text{B}}$
583. $\boxed{\text{C}}$ $\boxed{\text{D}}$
584. $\boxed{\text{D}}$
585. $\boxed{\text{A}}$
586. $\boxed{\text{A}}$
587. $\boxed{\text{A}}$ $\boxed{\text{C}}$
588. $\boxed{\text{B}}$
589. $\boxed{\text{A}}$ $\boxed{\text{D}}$
590. $\boxed{\text{B}}$ $\boxed{\text{C}}$ $\boxed{\text{D}}$
591. $\boxed{\text{A}}$ $\boxed{\text{C}}$
592. $\boxed{\text{B}}$ $\boxed{\text{C}}$
593. $\boxed{\text{A}}$ $\boxed{\text{D}}$
594. $\boxed{\text{A}}$
595. $\boxed{\text{D}}$
596. $\boxed{\text{A}}$ $\boxed{\text{C}}$
597. $\boxed{\text{A}}$
598. $\boxed{\text{B}}$ $\boxed{\text{C}}$
599. $\boxed{\text{A}}$ $\boxed{\text{D}}$
600. $\boxed{\text{A}}$ $\boxed{\text{C}}$
601. $\boxed{\text{B}}$ $\boxed{\text{D}}$
602. $\boxed{\text{B}}$ $\boxed{\text{C}}$
603. $\boxed{\text{A}}$ $\boxed{\text{C}}$ $\boxed{\text{D}}$
604. $\boxed{\text{A}}$
605. $\boxed{\text{D}}$
606. $\boxed{\text{A}}$
607. $\boxed{\text{D}}$
608. $\boxed{\text{C}}$
609. $\boxed{\text{D}}$
610. $\boxed{\text{A}}$
611. $\boxed{\text{A}}$
612. $\boxed{\text{A}}$
613. $\boxed{\text{A}}$
614. $\boxed{\text{A}}$
615. $\boxed{\text{B}}$
616. $\boxed{\text{A}}$

617. A
618. C
619. A
620. B
621. B
622. A
623. A
624. A
625. A
626. A
627. D
628. C
629. B
630. A D
631. D
632. B
633. B C
634. B
635. D
636. A
637. B
638. D
639. A B D
640. A
641. A B D
642. B D
643. B
644. A D
645. A
646. A C
647. A
648. A D
649. C
650. D
651. C
652. C
653. C
654. D
655. B C
656. A
657. B D
658. A
659. C
660. A
661. B
662. A
663. A C
664. A
665. A B D
666. A C
667. B D
668. D
669. A
670. B D
671. B D
672. A C
673. B
674. B
675. C
676. B
677. B
678. C
679. B
680. D
681. A B D
682. B
683. A D
684. A
685. B
686. C
687. D
688. A B
689. A C D
690. A C D
691. B D
692. B C
693. A
694. B
695. A
696. A C D
697. B
698. A C
699. D
700. B C D
701. C
702. B
703. C
704. A B
705. A
706. B
707. A D
708. A C
709. C
710. D
711. C
712. A C
713. D
714. B
715. A D
716. A B C
717. B
718. A
719. A C
720. A D
721. D
722. C
723. A B
724. D
725. B
726. B
727. A
728. B
729. A B
730. A B
731. C
732. C
733. D
734. C
735. B
736. A
737. A C
738. C
739. A B
740. A B D
741. A D
742. C
743. B D
744. D
745. C
746. A
747. A C
748. A B

749. $\boxed{D}$
750. $\boxed{B}$ $\boxed{C}$
751. $\boxed{B}$
752. $\boxed{A}$ $\boxed{B}$ $\boxed{D}$
753. $\boxed{A}$ $\boxed{B}$
754. $\boxed{A}$ $\boxed{C}$ $\boxed{D}$
755. $\boxed{C}$
756. $\boxed{D}$
757. $\boxed{A}$ $\boxed{B}$
758. $\boxed{A}$ $\boxed{C}$ $\boxed{D}$
759. $\boxed{A}$
760. $\boxed{A}$ $\boxed{B}$
761. $\boxed{C}$
762. $\boxed{C}$
763. $\boxed{A}$ $\boxed{B}$
764. $\boxed{C}$
765. $\boxed{C}$
766. $\boxed{B}$
767. $\boxed{A}$ $\boxed{B}$
768. $\boxed{B}$ $\boxed{C}$
769. $\boxed{B}$
770. $\boxed{D}$
771. $\boxed{A}$ $\boxed{C}$
772. $\boxed{B}$
773. $\boxed{B}$ $\boxed{C}$ $\boxed{D}$
774. $\boxed{D}$
775. $\boxed{C}$
776. $\boxed{C}$
777. $\boxed{A}$ $\boxed{D}$
778. $\boxed{A}$ $\boxed{D}$
779. $\boxed{A}$ $\boxed{B}$
780. $\boxed{B}$
781. $\boxed{A}$ $\boxed{C}$
782. $\boxed{B}$
783. $\boxed{B}$ $\boxed{D}$
784. $\boxed{B}$ $\boxed{D}$
785. $\boxed{B}$
786. $\boxed{B}$ $\boxed{C}$ $\boxed{D}$
787. $\boxed{C}$
788. $\boxed{A}$
789. $\boxed{A}$ $\boxed{C}$
790. $\boxed{B}$
791. $\boxed{B}$ $\boxed{C}$
792. $\boxed{C}$
793. $\boxed{D}$
794. $\boxed{C}$
795. $\boxed{B}$ $\boxed{D}$
796. $\boxed{B}$ $\boxed{C}$
797. $\boxed{A}$ $\boxed{D}$
798. $\boxed{B}$
799. $\boxed{D}$
800. $\boxed{B}$
801. $\boxed{C}$
802. $\boxed{A}$
803. $\boxed{A}$
804. $\boxed{C}$
805. $\boxed{B}$ $\boxed{D}$
806. $\boxed{A}$ $\boxed{C}$
807. $\boxed{B}$
808. $\boxed{B}$ $\boxed{C}$ $\boxed{D}$
809. $\boxed{B}$
810. $\boxed{C}$
811. $\boxed{B}$ $\boxed{D}$
812. $\boxed{A}$ $\boxed{C}$ $\boxed{D}$
813. $\boxed{A}$ $\boxed{B}$ $\boxed{C}$
814. $\boxed{B}$ $\boxed{C}$
815. $\boxed{C}$
816. $\boxed{A}$ $\boxed{B}$ $\boxed{C}$
817. $\boxed{C}$ $\boxed{D}$
818. $\boxed{A}$ $\boxed{B}$
819. $\boxed{B}$
820. $\boxed{B}$
821. $\boxed{B}$ $\boxed{D}$
822. $\boxed{B}$ $\boxed{C}$ $\boxed{D}$
823. $\boxed{A}$ $\boxed{C}$ $\boxed{D}$
824. $\boxed{C}$
825. $\boxed{B}$ $\boxed{C}$
826. $\boxed{C}$
827. $\boxed{A}$
828. $\boxed{D}$
829. $\boxed{C}$
830. $\boxed{D}$
831. $\boxed{A}$ $\boxed{D}$
832. $\boxed{B}$ $\boxed{C}$ $\boxed{D}$
833. $\boxed{C}$
834. $\boxed{C}$
835. $\boxed{A}$ $\boxed{C}$ $\boxed{D}$
836. $\boxed{B}$ $\boxed{C}$
837. $\boxed{A}$ $\boxed{C}$ $\boxed{D}$
838. $\boxed{B}$ $\boxed{D}$
839. $\boxed{B}$
840. $\boxed{C}$
841. $\boxed{A}$ $\boxed{C}$
842. $\boxed{D}$
843. $\boxed{B}$
844. $\boxed{A}$ $\boxed{B}$ $\boxed{D}$
845. $\boxed{B}$ $\boxed{D}$
846. $\boxed{B}$
847. $\boxed{A}$
848. $\boxed{C}$
849. $\boxed{A}$ $\boxed{D}$
850. $\boxed{D}$
851. $\boxed{B}$
852. $\boxed{B}$ $\boxed{C}$
853. $\boxed{A}$
854. $\boxed{A}$ $\boxed{C}$
855. $\boxed{C}$
856. $\boxed{A}$ $\boxed{D}$
857. $\boxed{C}$
858. $\boxed{A}$ $\boxed{D}$
859. $\boxed{D}$
860. $\boxed{A}$ $\boxed{C}$
861. $\boxed{D}$
862. $\boxed{C}$
863. $\boxed{A}$
864. $\boxed{A}$ $\boxed{B}$ $\boxed{D}$
865. $\boxed{C}$
866. $\boxed{B}$
867. $\boxed{C}$ $\boxed{D}$
868. $\boxed{B}$
869. $\boxed{B}$
870. $\boxed{D}$
871. $\boxed{C}$
872. $\boxed{A}$ $\boxed{D}$
873. $\boxed{D}$
874. $\boxed{B}$ $\boxed{D}$
875. $\boxed{A}$ $\boxed{C}$
876. $\boxed{C}$
877. $\boxed{A}$ $\boxed{D}$
878. $\boxed{A}$ $\boxed{B}$ $\boxed{D}$
879. $\boxed{B}$ $\boxed{D}$
880. $\boxed{A}$ $\boxed{C}$

881. D
882. A C D
883. A B
884. B
885. A D
886. B
887. A C D
888. D
889. A B
890. D
891. C
892. B C
893. B C
894. B
895. C
896. B
897. B
898. C
899. D
900. C
901. B
902. B
903. C
904. A
905. B C
906. B
907. B
908. C D
909. B D
910. A
911. B D
912. C
913. A B
914. D
915. D
916. C
917. A B
918. B D
919. B C D
920. A
921. A B
922. A C
923. B D
924. A D
925. B
926. A B
927. B C
928. B D
929. B
930. C
931. A B C
932. C
933. C
934. B C
935. B C D
936. A B D
937. B D
938. A B
939. C D
940. A C
941. A B C
942. C
943. A
944. A B C
945. B
946. D
947. B
948. B D
949. D
950. B C
951. A C
952. A D
953. D
954. C
955. D
956. C
957. B
958. C
959. C
960. B C
961. A B D
962. A
963. C
964. C
965. B C D
966. A
967. A
968. A
969. B
970. B
971. B D
972. C
973. D
974. A
975. D
976. C
977. D
978. D
979. B
980. C D
981. C D
982. B C
983. A
984. B
985. C
986. D
987. C
988. A C D
989. B
990. A C
991. A B C
992. A
993. D
994. C
995. B
996. C
997. C D
998. D
999. D
1000. D
1001. A
1002. C
1003. C
1004. D
1005. A C
1006. B C
1007. A
1008. A B
1009. C
1010. A
1011. A B C
1012. C

1013. B C
1014. A C
1015. A
1016. A D
1017. A B D
1018. D
1019. C
1020. A B
1021. A C
1022. C
1023. B
1024. C
1025. A C
1026. A
1027. D
1028. A
1029. B C
1030. A C
1031. A D
1032. C
1033. B
1034. A
1035. C D
1036. A D
1037. B
1038. A D
1039. D
1040. B
1041. C
1042. A
1043. A C D
1044. A C
1045. A D
1046. B
1047. D
1048. D
1049. A C
1050. D
1051. A B
1052. A D
1053. D
1054. C
1055. A
1056. C
1057. A D
1058. A C
1059. C
1060. B
1061. C
1062. C
1063. A D
1064. B
1065. B
1066. A B D
1067. A
1068. A
1069. B
1070. B D
1071. C
1072. A
1073. C
1074. C
1075. A
1076. A
1077. C D
1078. C
1079. B
1080. C D
1081. D
1082. D
1083. B
1084. B
1085. C
1086. D
1087. C
1088. A
1089. C
1090. D
1091. B C
1092. B C
1093. C
1094. A B
1095. D
1096. C
1097. B
1098. B
1099. A
1100. D
1101. C
1102. C
1103. C D
1104. A C
1105. C
1106. C
1107. D
1108. D
1109. C
1110. A
1111. C
1112. B
1113. C
1114. A B C
1115. B
1116. B
1117. C
1118. A
1119. B C
1120. B
1121. A B D
1122. B
1123. C D
1124. B
1125. A C
1126. C
1127. A B
1128. A C D
1129. A
1130. A
1131. A
1132. A
1133. B
1134. B D
1135. C
1136. A C D
1137. C
1138. A
1139. A
1140. B C
1141. B C
1142. A B D
1143. A C
1144. B D

1145. $\boxed{A}$	**1157**. $\boxed{C}$	**1169**. $\boxed{B}$	**1181**. $\boxed{B}$
1146. $\boxed{A}$	**1158**. $\boxed{A}$ $\boxed{C}$	**1170**. $\boxed{C}$	**1182**. $\boxed{C}$
1147. $\boxed{B}$ $\boxed{C}$ $\boxed{D}$	**1159**. $\boxed{B}$	**1171**. $\boxed{C}$	**1183**. $\boxed{B}$ $\boxed{D}$
1148. $\boxed{A}$ $\boxed{B}$ $\boxed{D}$	**1160**. $\boxed{D}$	**1172**. $\boxed{C}$ $\boxed{D}$	**1184**. $\boxed{C}$
1149. $\boxed{B}$	**1161**. $\boxed{B}$ $\boxed{D}$	**1173**. $\boxed{B}$	**1185**. $\boxed{B}$
1150. $\boxed{B}$ $\boxed{C}$	**1162**. $\boxed{A}$	**1174**. $\boxed{B}$	**1186**. $\boxed{A}$
1151. $\boxed{A}$ $\boxed{B}$ $\boxed{D}$	**1163**. $\boxed{B}$	**1175**. $\boxed{B}$ $\boxed{C}$ $\boxed{D}$	**1187**. $\boxed{A}$
1152. $\boxed{C}$	**1164**. $\boxed{A}$ $\boxed{D}$	**1176**. $\boxed{A}$	**1188**. $\boxed{B}$ $\boxed{C}$
1153. $\boxed{B}$	**1165**. $\boxed{B}$ $\boxed{C}$	**1177**. $\boxed{B}$	**1189**. $\boxed{B}$
1154. $\boxed{D}$	**1166**. $\boxed{A}$	**1178**. $\boxed{C}$	**1190**. $\boxed{B}$
1155. $\boxed{A}$ $\boxed{D}$	**1167**. $\boxed{C}$	**1179**. $\boxed{A}$ $\boxed{B}$	**1191**. $\boxed{C}$
1156. $\boxed{D}$	**1168**. $\boxed{A}$	**1180**. $\boxed{A}$ $\boxed{B}$	**1192**. $\boxed{C}$

9

Rezolvări

1. Pentru un $n \in A$, notăm y numărul cifrelor sale. Dacă $x = (n-6)/10$, atunci obţinem egalitatea $4(10x+6) = 6 \cdot 10^{y-1} + x$, adică $13x = 2(10^{y-1} - 4)$. Numărul $10^{y-1} - 4$ are forma $99\dots96$, deci e divizibil cu 3. Din $(3, 13) = 1$ rezultă $3 \mid x$, deci şi $3 \mid n$. Observăm că x trebuie să fie par. Deci n se termină în $06, 26, 46, 66$ sau 86 şi rezultă că $4 \nmid n$. Presupunem că $y = 8$, deci $13 \mid (10^7 - 4)$, ceea ce este fals. Se constată că ecuaţia în x şi y are soluţia (particulară) $y = 6$ şi $x = 15384$. De aici rezultă că $n = 153846 \in A$.

2. Folosim metoda reducerii la absurd. Presupunem că există n, $p \in \mathbb{N}$ cu proprietatea că $2n^3 + 13n + 2 = p^2$. Cum, pe de o parte, pătratul oricărui număr natural nu este multiplu de 3 plus 2 (dacă $p = \mathcal{M}_3 \Longrightarrow p^2 = \mathcal{M}_3$; dacă $p = \mathcal{M}_3 + 1 \Longrightarrow p^2 = \mathcal{M}_3 + 1$; dacă $p = \mathcal{M}_3 + 2 \Longrightarrow p^2 = \mathcal{M}_3 + 1$), iar, pe de altă parte, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, numărul $E = 2n^3 + 13n + 2$ este multiplu de 3 plus 2 (dacă $n = \mathcal{M}_3 \Longrightarrow E = \mathcal{M}_3 + 2$; dacă $n = \mathcal{M}_3 + 1 \Longrightarrow E = \mathcal{M}_3 + 2$; dacă $n = \mathcal{M}_3 + 2 \Longrightarrow E = \mathcal{M}_3 + 2$), suntem conduşi la o contradicţie.

3. Ultima cifră a numărului a_n este 7, $\forall n \geq 2$, deci a_n nu poate fi pătrat perfect.

4. Fie $\alpha = \dfrac{\sqrt{\sqrt{5}+2} + \sqrt{\sqrt{5}-2}}{\sqrt{\sqrt{5}+1}} \Rightarrow \alpha^2 = \dfrac{\sqrt{5}+2+\sqrt{5}-2+2\sqrt{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)}}{\sqrt{5}+1} = \dfrac{2\sqrt{5}+2\sqrt{5-2\sqrt{5}+2\sqrt{5}-4}}{\sqrt{5}+1} = \dfrac{2\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}+1} = 2 \Rightarrow \alpha = \sqrt{2}$. Deci $x = \alpha + \dfrac{\alpha}{2} - \sqrt{3-2\sqrt{2}} = \alpha + \dfrac{\alpha}{2} - \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2} = \dfrac{3\alpha}{2} - \sqrt{2} + 1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + 1$. De aici, $x^2 = \dfrac{3}{2} + \sqrt{2}$.

5. Adunăm 1 la ecuația dată, de unde rezultă $C+1 = \dfrac{a_{2n}+a_{2n-1}+...+a_{n+1}}{a_n+a_{n-1}+...+a_1} + \dfrac{a_n+a_{n-1}+...+a_1}{a_n+a_{n-1}+...+a_1} = \dfrac{S_{2n}}{S_n} = \dfrac{2n\cdot\dfrac{a_1+a_{2n}}{2}}{n\cdot\dfrac{a_1+a_n}{2}} = 2\cdot\dfrac{a_1+a_{2n}}{a_1+a_n} = 2\cdot\dfrac{2a_1+(2n-1)\cdot r}{2a_1+(n-1)\cdot r}$. Fie $R = \dfrac{C+1}{2}$, tot o constantă. $2a_1+(2n-1)\cdot r = (2a_1+(n-1)\cdot r)\cdot R \Rightarrow n\cdot r(R-2) = (R-1)(2-r)$, care trebuie să fie adevărat pentru $\forall n \Rightarrow \begin{cases} n\cdot r(R-2)=0 \\ (R-1)(2-r)=0 \end{cases}$, dar $n, r \neq 0 \Rightarrow R=2$, deci $r=2$. $a_{15} = a_1 + 14\cdot r = 29$.

6. Numerele trebuie să fie de forma $\overline{25xy}$, $\overline{x25y}$ sau $\overline{xy25}$, de asemenea știm că un număr este divizibil cu 75 atunci când este divizibil cu 3 și 25. Pentru cele de forma $\overline{25xy}$, ultimele două cifre trebuie să fie $00, 25, 50, 75$ pentru a fi divizibile cu 25, dar dintre acestea, doar 2550 este divizibil și cu 3, deci singura soluție pentru prima formă. Când vine vorba de $\overline{x25y}$, cifra unităților trebuie să fie 0 pentru ca numărul să fie divizibil cu 25, iar prima cifră a numărului trebuie să aducă suma cifrelor la un multiplu de 3 $(2, 5, 8)$, deci există 3 numere de această formă care respectă condițiile. Rămâne forma $\overline{xy25}$, care este divizibilă cu 25 pentru orice valori ale primelor două cifre. 7 este de forma $3k+1$, deci trebuie să adăugăm $3m+2$ pentru ca suma să fie divizibilă cu 3. Numerele $\overline{xy}$ vor fi deci într-o progresie aritmetică cu rația 3, cel mai mic număr fiind 11 iar cel mai mare $98 = 11 + 3\cdot(n-1)$. Dacă rezolvăm ecuația, aflăm că există $n = 30$ astfel de numere în interval. Deci în total avem $1+3+30 = 34$ numere de 4 cifre care satisfac condițiile.

7. $21a = 9b = 7c \Rightarrow a = \dfrac{k}{21}, b = \dfrac{k}{9}, c = \dfrac{k}{7}$. Astfel $\dfrac{k}{21} + 8 + \dfrac{k}{7} = \dfrac{2k}{9} \Rightarrow \dfrac{4k}{21} + 8 = \dfrac{2k}{9} \Rightarrow 12k + 504 = 14k \Rightarrow k = 252$.

8. Fiindcă n este un multiplu de 5, fie p, fie q trebuie să fie 5. Dacă $p = 5$, răspunsurile corecte ar fi $\boxed{\text{A}}$ $\boxed{\text{D}}$. Dacă $q = 5$, răspunsurile corecte ar fi $\boxed{\text{B}}$ $\boxed{\text{D}}$. Pentru a fi siguri că expresia este multiplu de 25, alegem ca ambele numere prime să fie ridicate la pătrat.

9. $p^2 - 1 = (p+1)(p-1)$. $p, p+1, p-1$ sunt 3 numere consecutive, astfel ca unul dintre numere trebuie sa fie divizibil cu 2, iar altul cu 3. p fiind prim, știm că este de asemenea impar, deci $p-1$ și $p+1$ sunt pare, unul divizibil cu 2 iar celălalt cu 4 (fiindcă sunt două numere pare consecutive). Din moment ce p nu e divizibil cu 3 (fiind prim), $p+1$ sau

$p-1$ este divizibil cu 3. De aici rezultă că $(p-1)(p+1)$ este divizibil cu $2\cdot 2\cdot 3=12$, dar din nou știm că $p-1$ sau $p+1$ este divizibil și cu 4, deci $(p-1)(p+1)$ este divizibil cu $2\cdot 4\cdot 3=24$ oricare ar fi p număr prim mai mare decât 3.

10. Dacă n este un număr prim, conform Micii Teoreme a lui Fermat $2^n \equiv 2 \pmod{n}$, adică $2^n-2\equiv 0 \pmod{n}$ (n divide 2^n-2). Fie $n=2^k$ pentru un $k\geq 1$. Pentru $k=1\Rightarrow n=2$ care divide 2^2-2. Presupunem că pentru $k=m, n=2^m$ divide $2^{2^m}-2$. Demonstrăm că $n=2^{m+1}$ divide $2^{2^{m+1}}-2$. Observăm că $2^{2^{m+1}}-2=(2^{2^m})^2-2$. Din moment ce $2^{2^m}\equiv 2 \pmod{2^m}$, $(2^{2^m})^2\equiv 2^2\equiv 2 \pmod{2^{m+1}}$. Deci 2^{m+1} divide $2^{2^{m+1}}-2$. Astfel orice putere a lui 2 divide $2^{2^{m+1}}-2$. Un contra-exemplu pentru $\boxed{\text{B}}$ ar fi $n=9$.

11. $a_{25}=a_1+24\cdot r\Rightarrow 121=1+24\cdot r\Rightarrow r=5$. De aici deducem $a_n=5n-4=k^2\Rightarrow n=\dfrac{k^2+4}{5}$. Astfel ca n să fie un număr întreg, k^2+4 trebuie să fie divizibil cu 5, deci $k\equiv 1(\mod 5)$ și $k\equiv 4(\mod 5)$. **Cazul 1.** $k\equiv 1(\mod 5)\Rightarrow k=1: k^2=1, n=1; k=6, k^2=36, n=8; k=11, k^2=121, n=25$. **Cazul 2.** $k\equiv 4(\mod 5)\Rightarrow k=4: k^2=16, n=4; k=9, k^2=81, n=17; k=14, k^2=196, n=40$. În total, **6** elemente.

12. $\begin{cases} a_5=3\cdot a_2 \\ a_9=a_3+24\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1+4r=3\cdot(a_1+r) \\ a_1+8r=a_1+2r+24\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a_1=r \\ 6r=24\Rightarrow r=4\end{cases}$ Astfel, $a_1=2$.

13. $a_k\in b_m\Rightarrow 3k+7=5m+2\Rightarrow 3k-5m=-5\Rightarrow 3k=5m-5\Rightarrow 3k=5(m-1)$. Notăm $m-1=n$, deci $k=\dfrac{5n}{3}$. Fiindcă k este un număr întreg, n trebuie să fie un multiplu de $3\Rightarrow n=3p$, $k=5p\Rightarrow m=3p+1$. Pentru a găsi cea mai mică valoare a lui k începem substituția: $p=1\Rightarrow k=5, m=3+1=4$. Verificăm $a_5=3\cdot 5+7=22$ și $b_4=5\cdot 4+2=22$, $a_5=b_4$, deci $k=5$ este varianta corectă.

14. Când formăm un triunghi ordinea de scriere a vârfurilor nu contează, prin urmare, ceea ce numărăm sunt mulţimi de forma $\{O,A,B\}$ cu $A,B\in\mathcal{M}$. Alegerea submulţimilor $\{A,B\}\subseteq\mathcal{M}$ se poate face în C_n^2 moduri, dar O, A şi B formează un triunghi $\triangle AOB$ dacă şi numai dacă O,A,B nu sunt puncte coliniare. Prin urmare, răspunsul corect este furnizat de $\boxed{\text{D}}$.

Chiar dacă orice 3 puncte din $\mathcal{M} \cup \{O\}$ ar fi necoliniare, răspunsurile celelalte ar fi greşite deoarece:

$\boxed{\text{A}}$ în numărul $A_n^2 = |\{(A, B) \mid A, B \in \mathcal{M}\}|$, fiecare triunghi OAB este numărat de 2 ori, o dată ca $\triangle OAB$, o dată ca $\triangle OBA$.

$\boxed{\text{B}}$ 2^n numără toate submulţimile lui $\mathcal{M}$, dar e evident că unele dintre acestea nu determină triunghiuri ca cele din enunţ.

$\boxed{\text{C}}$ C_{n+1}^3 numără toate submulţimile cu 3 elemente ale lui $\mathcal{M} \cup \{O\}$, deci şi (posibile) triunghiuri care nu au un vârf în O.

15. Fiecare element $m \in M$ aparține uneia dintre mulțimile A, B, C, $M \setminus (A \cup B \cup C)$.

Deci numărul configurațiilor posibile este egal cu numărul funcțiilor de la o mulțime cu n elemente la o mulțime cu 4 elemente.

16. Se ştie că pentru ca numărul C_m^k al combinărilor de m elemente luate câte k să fie definit trebuie ca $m, k \in \mathbb{N}$ şi $k \leq m$. Aşadar, o rezolvare începută cu stabilirea condiţiilor asupra lui $n \Rightarrow \begin{cases} n-1 \in \mathbb{N} \\ n-1 \geq 5 \\ n-1 \geq 4 \\ n-3 \in \mathbb{N} \\ n \geq n-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \in \mathbb{N} \\ n \geq 6 \end{cases}$, arată imediat că variantele de răspuns $\boxed{\text{A}}$ şi $\boxed{\text{B}}$ sunt false. Fie prin calcule, fie folosind formula de recurenţă pentru numărul de combinări, putem rescrie inegalitatea dată astfel: $C_n^5 < C_n^{n-3} \Leftrightarrow \dfrac{n!}{5!(n-5)!} < \dfrac{n!}{3!(n-3)!} \Leftrightarrow (n-4)(n-3) < 4 \cdot 5 \Leftrightarrow n^2 - 7n - 8 < 0$. Cum soluţiile din $\mathbb{R}$ ale ecuaţiei $x^2 - 7x - 8 = 0$ sunt $x_1 = -1$ şi $x_2 = 8$, în $\mathbb{R}$ avem $x^2 - 7x - 8 < 0 \Leftrightarrow x \in (-1, 8)$. În condiţiile deja stabilite asupra lui n, mulţimea soluţiilor inecuaţiei $n^2 - 7n - 8 < 0$ este $(-1, 8) \cap \mathbb{N} \cap [6, \infty) = \{6, 7\}$. Prin urmare, varianta de răspuns $\boxed{\text{C}}$ este adevărată şi $\boxed{\text{D}}$ este falsă.

17. Mulţimea $\mathcal{F}$ conţine 4^4 funcţii, pentru că domeniul şi codomeniul au patru elemente.

Funcţiile strict monotone din mulţimea $\mathcal{F}$ sunt

$$f : \{0, 1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3, 4\} \text{ definită prin } f(k) = k + 1, k \in \{0, 1, 2, 3\},$$

$$g:\{0,1,2,3\}\to\{1,2,3,4\} \text{ definită prin } g(k)=4-k, k\in\{0,1,2,3\}.$$

Mulţimea $\mathcal{F}$ conţine 4! funcţii injective.

Probabilitatea ca o funcţie f aleasă aleator din mulţimea $\mathcal{F}$ să verifice $f(0)=f(1)=1$ este $\frac{4^2}{4^4}=\frac{1}{16}$.

18. Dacă a şi b sunt numere reale strict pozitive, atunci din $0\le\left(a^2+b^2-2ab\right)^2=\left(a^2+b^2\right)^2-4ab\left(a^2+b^2\right)+(2ab)^2$ deducem că$\left(a^2+b^2\right)^2+4ab\left(a^2+b^2\right)+(2ab)^2\ge 8ab\left(a^2+b^2\right)$, de unde $\left(a^2+b^2+2ab\right)^2\ge 8ab\left(a^2+b^2\right)$. Aşadar,$\frac{(a+b)^4}{ab}\ge 8\left(a^2+b^2\right)$. Dacă aici luăm $a=C_n^k$ şi $b=C_n^{k+1}$, $k\in\{0,1,...,n-1\}$ şi apoi însumăm după $k\in\{0,1,...,n-1\}$ relaţiile obţinute, găsim că $x=\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{\left(C_{n+1}^{k+1}\right)^4}{C_n^kC_n^{k+1}}=\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{\left(C_n^k+C_n^{k+1}\right)^4}{C_n^kC_n^{k+1}}\ge 8\sum\limits_{k=0}^{n-1}\left\{\left(C_n^k\right)^2+\left(C_n^{k+1}\right)^2\right\}=8\left\{2\sum\limits_{k=0}^{n}\left(C_n^k\right)^2-2\right\}=16\left(C_{2n}^n-1\right)$ deoarece $\left(C_n^0\right)^2+\left(C_n^1\right)^2+...+\left(C_n^n\right)^2=C_{2n}^n$. oricare ar fi $n\ge1$, şi$C_n^k+C_n^{k+1}=C_{n+1}^{k+1}$, oricare ar fi $n\ge1$ şi $k\in\{0,1,...,n-1\}$.

19. Funcția aleasă trebuie sa ia valoarea 1 în 3 elemente din domeniu, iar restul iau valoarea 0. Cele 3 elemente din domeniu pot fi alese în C_n^3 moduri. Pentru $n=10$, $C_{10}^3=120$.

20. Mulțimea A are 4 elemente, iar mulțimea B are 6 elemente, deci există $C_6^4=15$ moduri de a construi funcții strict descrescătoare (pentru orice $x_1<x_2$ avem $f(x_1)>f(x_2)$). În ce privește funcțiile crescătoare, numărul funcțiilor crescătoare de la B la A este dat de numărul de moduri de a distribui 6 elemente în 4 clase ordonate cu ajutorul formulei C_{n+k-1}^k, unde n este numărul de elemente de împărțit (în acest caz 6), și k este numărul de clase (în acest caz 4).

21. $(k+1)C_n^k=C_n^k+n\cdot C_{n-1}^{k-1}$. Astfel $\sum\limits_{k=0}^{n}(k+1)\cdot C_n^k=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k+n\cdot\sum\limits_{k=1}^{n}C_{n-1}^{k-1}=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k+n\cdot\sum\limits_{k=0}^{n-1}C_{n-1}^k=2^n+n2^{n-1}=2^{n-1}(n+2)$.

22. $C_n^0+\frac{1}{2}C_n^1+\frac{1}{3}C_n^2+...+\frac{1}{n+1}C_n^n=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}C_n^k=\frac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n}C_{n+1}^{k+1}=\frac{1}{n+1}\Big(\sum\limits_{k=0}^{n}C_{n+1}^k-C_{n+1}^0\Big)=\frac{1}{n+1}\Big(2^{n+1}-C_{n+1}^0\Big)=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$.

23. Fiecare termen al dezvoltării are forma $C_n^k(\sqrt{2})^{n-k}(\sqrt[3]{3})^k$. Astfel, termenii raționali ai dezvoltării sunt toți cei care îndeplinesc simultan condițiile: $(n-k)\vdots 2$ și $k \vdots 3$. Concluzionăm că pentru $n = 15$, dezvoltarea are într-adevăr 3 termeni raționali (pentru $k = 3, 9, 15$), iar pentru $n = 24$, dezvoltarea are 19 termeni iraționali. Termenul corespunzător pentru $k = 18$ este $C_{30}^{18}(\sqrt{2})^{12}(\sqrt[3]{3})^{18}$, rațional, iar termenul corespunzător pentru $k = 9$ este $C_{18}^{9}(\sqrt{2})^{9}(\sqrt[3]{3})^{9}$, irațional.

24. Un triunghi format din aceste puncte vârf pe d_1 şi 2 vârfuri pe d_2 sau 2 vârfuri pe d_1 şi 1 vârf pe d_2. Fixând un punct pe d_1, există C_5^2 moduri de a alege alte 2 de pe $d_2 \implies 6 \cdot 10 = 60$ de triunghiuri care conţin un punct pe d_1. Fixând un punct pe d_2, există C_6^2 moduri de a alege alte 2 de pe $d_1 \implies 5 \cdot 15 = 75$ de triunghiuri care conţin un punct pe d_2. În total, $60 + 75 = 135$ de triunghiuri.

25. Separăm egalitățile astfel: $x \cdot \log_x(y) = 2\sqrt{\pi}$ și $ey \cdot \log_y(x) = 2\sqrt{\pi}$ după care le înmulțim: $e \cdot xy \cdot (\log_x(y) \cdot \log_y(x)) = 4\pi$ Cum $\log_x(y) \cdot \log_y(x) = 1 \Rightarrow xy = \dfrac{4\pi}{e}$.

26. Ne propunem să determinăm mulțimea $\mathbb{E}$. $x \in \mathbb{E} \Leftrightarrow x > 0$ și $x \neq 1$. Deci $\mathbb{E} = (0,1) \cup (1,\infty)$. Prin urmare $\boxed{\text{A}}$ este falsă. Ne propunem să rezolvăm ecuația $f(x) = 0$. Observăm că $\log_{\frac{1}{3}} x = -\log_3 x$ și $\log_{\sqrt{x}} x = 2$, deci $f(x) = 2\log_3 x - 4$, $\forall x \in \mathbb{E}$. $f(x) = 0 \Leftrightarrow \log_3 x = 2 \Leftrightarrow x = 9$. Observăm că $9 \in \mathbb{E}$. Deci $x = 9$ e singura soluție a ecuației $f(x) = 0$. Prin urmare, $\boxed{\text{B}}$ este adevărată. Ne propunem să rezolvăm inecuația $f(x) > 0$. Avem $2\log_3 x - 2 > 0 \Leftrightarrow \log_3 x > 2 \Leftrightarrow x > 9$. Mulțimea soluțiilor inecuației $f(x) > 0$ este $S = (9,\infty)$. Fie $x_n = n + 10, n \in \mathbb{N}^*$. Avem că (x_n) e nemărginit și $x_n \in (9,\infty), n \in \mathbb{N}^*$. Deci $f(x_n) > 0$. Prin urmare, $\boxed{\text{C}}$ este adevărată. Rezolvăm inecuația $f(x) < 0$. Avem $2\log_3 x - 4 < 0 \Leftrightarrow x < 9$. Cum $x \in \mathbb{E}$, deducem că mulțimea soluțiilor inecuației $f(x) < 0$ este $S = (0,1) \cup (1,9)$. Deducem că $\boxed{\text{D}}$ este falsă.

27. Folosind proprietăţile logaritmilor, avem că: $\log_6 16 = 4\log_6 2 = \dfrac{4}{\log_2 6} = \dfrac{4}{1+\log_2 3}$.

Din relaţia $a = \log_{12} 27 = 3\log_{12} 3 = \dfrac{3}{\log_3 12} = \dfrac{3}{1 + 2\log_3 2} = \dfrac{3\log_2 3}{2 + \log_2 3}$, rezultă că $\log_2 3 = \dfrac{2a}{3-a}$. Prin urmare, obţinem $\log_6 16 = \dfrac{4}{1+\log_2 3} = \dfrac{4}{1+\dfrac{2a}{3-a}} = \dfrac{4(3-a)}{3+a}$.

28. Pentru orice a, $b > 1$, avem $\log_{a^n} b = \dfrac{1}{n}\dfrac{\ln b}{\ln a}$ şi atunci, în baza inegalităţii mediilor:

$\log_{a_1^n} a_2+\log_{a_2^n} a_3+...+\log_{a_{n-1}^n} a_n+\log_{a_n^n} a_1 = \frac{1}{n}\left(\frac{\ln a_2}{\ln a_1}+\frac{\ln a_3}{\ln a_2}+...+\frac{\ln a_n}{\ln a_{n-1}}+\frac{\ln a_1}{\ln a_n}\right)$ $\geq \sqrt[n]{\frac{\ln a_2}{\ln a_1}\frac{\ln a_3}{\ln a_2}...\frac{\ln a_n}{\ln a_{n-1}}\frac{\ln a_1}{\ln a_n}} = 1$. Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $\frac{\ln a_2}{\ln a_1} = \frac{\ln a_3}{\ln a_2} = ... = \frac{\ln a_n}{\ln a_{n-1}} = \frac{\ln a_1}{\ln a_n}$, adică dacă şi numai dacă $a_1 = ... = a_n$.

29. Fie $f(x) = (\sqrt{x}-2)^3+\ln x$ și $I = [1,4]$. Funcția $f(x)$ este suma a două funcții continue pe intervalul $[1,4]$, prin urmare funcția este continuă pe intervalul I. Evaluând capetele intervalului, observăm că pentru $x = 1, f(x) = -1$ și pentru $x = 4, f(x) = \ln 4 > 0$. Aplicând proprietatea lui Darboux, putem spune că funcția intersectează axa Ox pe intervalul [1,4] în cel puțin un punct. Răspunsul $\boxed{\text{C}}$ este incorect deoarece proprietatea este valabilă doar pe un interval închis și mărginit, iar $0 \notin I$, motiv pentru care afirmația $\boxed{\text{D}}$ este doar parțial corectă.

30. Pentru funcția dată, $f(x) = c$ pe prima ramură ne dă $c < 2$, iar pe cea de-a doua $4 - \log_{\sqrt[4]{2}}(x) = c \Rightarrow \log_{\sqrt[4]{2}}(x) = 4 - c \Rightarrow 4\log_2(x) = 4 - c \Rightarrow x = 2^{\frac{4-c}{4}} \geq 1 \Rightarrow c \leq 4$. Pentru ca să fie îndeplinită condiția, funcția trebuie să ia valori pe ambele ramuri, motiv pentru care răspunsul $\forall c < 2$ este corect.

31. $\log_{3^k} x^k = k\cdot\log_{3^k} x = k\cdot\frac{1}{\log_x 3^k} = \frac{1}{\log_x 3} = \log_3 x \Rightarrow$ ecuația devine $n\cdot\log_3 x = n$, de unde singura soluție reală este $x = 1$.

32. $\begin{cases}\frac{y}{x}+\frac{x}{y} = \log_4 32\\ \log_9(x^2-y^2) = \frac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{y}{x}+\frac{x}{y} = \frac{5}{2}\\ x^2-y^2 = 3\end{cases}$. În prima ecuație facem substituția $z = \frac{x}{y}$, iar ecuația devine $2z^2 - 5z + 2 = 0$, de unde găsim două valori pentru z: $z_1 = 2$ și $z_2 = \frac{1}{2}$. **1)** $x = 2y$: $4y^2 - y^2 = 3 \Rightarrow y^2 = 1$, deci $y = \pm1$, $x = \pm2$. **2)** $x = \frac{y}{2}$: $\frac{y^2}{4} - y^2 = 3 \Rightarrow y^2 = -4$, ecuație care nu are soluții reale. Astfel $x_{1,2} = \pm2$ și $y_{1,2} = \pm1$, dintre care doar $(2,1)$ satisface toate condițiile de existență pentru logaritmi.

33. $\log_2 3\cdot\frac{\log_2 4}{\log_2 3}\cdot\frac{\log_2 5}{\log_2 4}\cdot...\cdot\frac{\log_2(n+1)}{\log_2 n} = 10 \Rightarrow \log_2(n+1) = 10 \Rightarrow n+1 = 2^{10}$

34. $3 + e^{2x} = 7e^{2x} \Rightarrow 6e^{2x} = 3 \Rightarrow e^{2x} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2x = \ln\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}\ln 2.$

35. Ridicând relația la puterea 10, obținem $\log_{10^a}(\log_{10^b}(10^{1000})) = 1$. Ridicând din nou la puterea 10^a, obținem $\log_{10^b} 10^{1000} = 10^a \Rightarrow \frac{1000}{b} = 10^a$. Astfel, obținem următoarele perechi (a, b sunt numere întregi pozitive) $\{(3,1),(2,10),(1,100)\}$.

36. Notăm $x + y = s$ și $xy = p$. Avem $(x, y) \in S \iff \begin{cases} s + p = 11 \\ sp = 30 \end{cases} \iff \{s, p\}$ e mulțimea rădăcinilor ecuației $z^2 - 11z + 30 = 0$. Deci $\{s, p\} = \{5, 6\}$. Avem două posibilități ($s = 6$ și $p = 5$) sau ($s = 5$ și $p = 6$). Pentru $s = 6$ și $p = 5$, avem $x + y = 6$ și $xy = 5 \iff \{x, y\}$ e mulțimea rădăcinilor ecuației $z^2 - 6z + 5 = 0$. Deci $\{x, y\} = \{1, 5\}$. Pentru $s = 5$ și $p = 6$, avem $x + y = 5$ și $xy = 6 \iff \{x, y\}$ e mulțimea rădăcinilor ecuației $z^2 - 5z + 6 = 0$. Deci $\{x, y\} = \{2, 3\}$. În concluzie $S = \{(1,5),(5,1),(2,3),(3,2)\}$. Astfel, sunt adevărate $\boxed{\text{A}}$ și $\boxed{\text{C}}$.

37. Observăm că nu pot exista 2 sau mai multe răspunsuri corecte, motiv pentru care ne propunem să aflăm mulțimea soluțiilor. Condițiile de definiție: $3 - x \geq 0 \iff x \leq 3$. Deci $D = (-\infty, 3]$ este domeniul de definiție. Cum ecuația se scrie $\sqrt{3 - x} = x$; impunem condiții de compatibilitate $x \geq 0$. Așadar ecuația nu are soluții în afara intervalului $[0, 3]$. Rezolvăm ecuația ridicând la putere: $3 - x = x^2 \iff x^2 + x - 3 = 0 \iff x_1 = \dfrac{-1 + \sqrt{13}}{2}$ și $x_2 = \dfrac{-1 - \sqrt{13}}{2}$, dar $x_2 \notin [0, 3]$. Verificăm dacă $0 \leq x_1 \leq 3 \iff 0 \leq -1 + \sqrt{13} \leq 6 \iff 1 \leq \sqrt{13} \leq 7 \iff 1 \leq 13 \leq 49$ adevărat. Prin urmare, $S = \{x_1\}$, iar singurul răspuns corect este $\boxed{\text{B}}$.

38. Combinând condițiile b) și c), $n \in S \Rightarrow n + 5 \in S$, iar fiindcă $2 \in S$ din b) concluzionăm că $7^2 = 49 \in S$, deci și $(49 + 5)^2 = 54^2 \in S$. Deoarece $54^2 \equiv 1 \pmod 5$, toate numerele întregi pozitive suficient de mari care dau restul 1 la împărțirea cu 5 sunt în S. Fie $a > 1$ un număr întreg, care nu este multiplu de 5. Secvența $a, a^2, a^4, a^8, a^{16}, ...$ nu este mărginită, iar folosind *Mica Teoremă a lui Fermat* (dacă p este un număr prim și a este un număr întreg care nu este multiplu al lui p, atunci $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$), toți termenii din șir, începând cu a^4 sunt $\equiv 1 \pmod 5$. De aici concluzionăm că $a \in S$. Este ușor să verificăm apoi că toate numerele întregi pozitive mai mari decât 1 și care nu sunt multiplii ai lui 5 satisfac condițiile a), b), c), motiv pentru care răspunsurile $\boxed{\text{A}}$ și $\boxed{\text{D}}$ sunt corecte.

39. Există 3 cazuri în care putem obține 1: **1)**$1^k = 1 \Rightarrow x^2 - 7x + 11 = 1 \Rightarrow x_{1,2} = \{2, 5\}$; **2)**$k^0 = 1 \Rightarrow x^2 - 13x + 42 = 0 \Rightarrow x_{3,4} = \{6, 7\}$; **3)** $(-1)^{2k} = 1 \Rightarrow x^2 - 7x + 11 = -1 \Rightarrow$

$x_{5,6} = \{3, 4\}$ **și** $3^2 - 13 \cdot 3 + 42 = 12$ par **și** $4^2 - 13 \cdot 4 + 42 = 6$ par .

40. Scriem termenii progresiei în cele doua ecuații date în funcție de a_1 și rația r:

$a_3 + a_4 + a_5 = 3a_1 + 9r = -6 \Rightarrow a_1 = -2 - 3r$; $-a_7a_9a_{11} = -(a_1 + 6r)(a_1 + 8r)(a_1 + 10r) = -105r^3 + 142r^2 - 50r + 8 = 13037 \Rightarrow r = -3$, deci $\boxed{\text{D}}$ este fals. Calculăm $a_1 = -2 - 3r = -2 - 3 \cdot (-3) = 7 \Rightarrow \boxed{\text{A}}$ este de asemenea fals. $a_4 = a_1 + 3r = 7 + 3 \cdot (-3) = -2 \Rightarrow (a_4)^3 = -8 \Rightarrow \boxed{\text{B}}$ este adevărat. Suma primilor 10 termeni ai progresiei este $10a_1 + 45r = 70 - 135 = -65$. Afirmațiile false sunt $\boxed{\text{A}}$, $\boxed{\text{C}}$ și $\boxed{\text{D}}$

41. Notăm $t = x^{\frac{1}{4}} \Rightarrow t^2 - 7t + 12 = 0 \Rightarrow t = 3, 4 \Rightarrow x = 81, 256, S = 337$

42. Pentru a obține valoarea minimă, vom lua x_1 (valoarea inițială) ca $-n \Rightarrow x_1 = -n, x_2 = -n + 1$, etc. Astfel avem $S = n - 1 + n - 2 + \ldots + 0 + 1 + 2 + \ldots + n$
Astfel suma finală va fi $2 \cdot \frac{n}{2} \cdot \left(\frac{n}{2} + 1\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{n^2 + 2n}{4}$.

43. Înlocuind $x^2 = ([x] + \{x\})^2$, obținem $([x] + 2\{x\})^2 = 4$, de unde rezultă faptul că $2\{x\} \in \mathbb{Z}$, deci $\{x\} = \left\{0, \frac{1}{2}\right\} \iff x \in \left\{-2, 2, \frac{3}{2}, -\frac{5}{2}\right\}$.

44. Pentru $a = 1$ și $b = -5$ $S_1 = 5$, $S_2 = (-\infty, 5]$. Pentru $a = 0$ și $b = -5$ $S_1 = \emptyset$, $S_2 = \mathbb{R}$. Pentru $a = -5$ și $b = -5$ $S_1 = -1$, $S_2 = (-1, +\infty)$. Pentru $a = 0$ și $b = 0$ $S_1 = \mathbb{R}$, $S_2 = \mathbb{R}$.

45. Observăm că $-1, 0 \in S$, $\forall m \in \{R\}$. Căutăm soluții în $(0, \infty)$, deci ecuația devine $x^2 - x = mx(x+1) \Rightarrow x - 1 = m(x+1) \Rightarrow x(m-1) = -m-1$. Pentru $m = 1$ ecuația devine $0 = -2$, deci nu are nicio soluție. Pentru $m \neq 1$ avem $x = \frac{-m-1}{m-1}$. Aceasta este soluție, doar dacă $\frac{-m-1}{m-1} > 0 \iff \frac{m+1}{m-1} < 0 \iff m \in (-1, 1)$. Deci, $S \cap (0, \infty) \neq \emptyset$ pentru fiecare $m \in (-1, 1)$. Mai mult, pentru $m \in (-1, 1)$ avem că $S \cap (0, \infty) = \{\frac{-m-1}{m-1}\}$, iar pentru $m \in \mathbb{R} - (-1, 1)$ avem că $S \cap (0, \infty) = \emptyset$. Pentru $m = 1$ expresia $\frac{-m-1}{m-1}$ nu este bine definită: $x^2 - |x| = x^2 + x \iff |x| = -x \iff x \in (-\infty, 0]$, deci pentru $m = 1$ avem $S \in (-\infty, 0]$; iar pentru $m = -1$ expresia $\frac{-m-1}{m-1}$ are valoarea 0: $x^2 - |x| = -x^2 - x \iff 2x^2 + x - |x| = 0$. Știm deja că ecuația nu are soluții în $(0, \infty)$ și că $0 \in S$, deci căutăm soluții în $(-\infty, 0)$: $2x^2 + x + x = 0 \iff 2x(x + 1) = 0 \iff x = -1$. Pentru $m = -1$ avem $S = \{0, -1\}$. Dacă D este adevărată, atunci $m \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$. Căutăm soluții în $(-\infty, 0)$, ecuația devine $x^2 - (-x) = mx(x + 1) \iff x^2 + x =$

$mx(x+1) \iff x+1 = m(x+1) \iff (x+1)(1-m) = 0 \iff x = -1$. Atunci $S \cap (-\infty, 0) = \{-1\}, S \cap (0, \infty) = \emptyset$ și $0 \in S$, prin urmare, în acest caz $S = \{-1, 0\}$, deci $\boxed{\text{D}}$ este fals.

46. Deoarece $x^2 - 3x + 5$ nu are rădăcini reale ($\Delta = -11$), aceasta este mereu pozitivă, astfel putem rescrie inecuația $\dfrac{x+1}{x^2-3x+5} \leq 1 \iff x+1 \leq x^2 - 3x + 5 \iff 0 \leq x^2 - 4x + 4 \iff 0 \leq (x-2)^2$ - adevărat pentru $\forall x \in \mathbb{R}$. De aici, concluzionăm că $E = S = \mathbb{R}$.

47. Notăm $x+y = s$, $xy = p$. $(x, y) \in S \iff s+p = 4$ și $sp = 4 \iff \{s, p\}$ e mulțimea rădăcinilor ecuației $z^2 - 4z + 4 = 0 \iff \{s, p\} = \{2, 2\} \iff s = p = 2 \iff \{x, y\}$ e mulțimea rădăcinilor reale ale ecuației $z^2 - 2z + 2 = 0 \iff \{x, y\} = \emptyset$. Prin urmare $S = \emptyset$, iar unicul răspuns este $\boxed{\text{D}}$.

48. Notăm cu $t = x^2 + 18x + 30 \Rightarrow t = 2\sqrt{t+15}$, de unde obținem soluțiile valide $x = \pm\sqrt{61} - 9 \Rightarrow$. Produsul lor este $81 - 61 = 20$.

49. Dacă înmulțim $(x + \dfrac{1}{z}) \cdot (y + \dfrac{1}{x}) \cdot (y + \dfrac{1}{z})$ obținem $80t = \dfrac{27}{z}\Big(y + \dfrac{1}{z}\Big) + xy \cdot t$, unde $t = (y + \dfrac{1}{z}) \Rightarrow 27 + xyz = 80z \Rightarrow z = \dfrac{7}{20} \Rightarrow x + \dfrac{20}{7} = 3 \Rightarrow x = \dfrac{1}{7} \Rightarrow y = 20 \Rightarrow t = \dfrac{160}{7}$.

50. Verificăm dacă $x = m$ este soluție. $\sqrt{2|m| - 2m} = 0 \iff m = |m| \iff m \in [0, \infty)$, deci $\boxed{\text{A}}$ este falsă. Ne propunem să găsim S în funcție de m. **1)** Căutăm soluțiile din $[0, \infty)$: avem $|x| = x, \forall x \in [0, \infty)$. Ecuația devine $x = m$, deci dacă $m \in (-\infty, 0)$, ecuația nu are soluții. Dacă $m \in [0, \infty)$, ecuația are o singură soluție, anume $x = m$. **2)** Căutăm soluții în $(-\infty, 0)$: Avem $|x| = -x, x \in (-\infty, 0)$, ecuația devine $\sqrt{-4x} = m - x$. Căutăm soluții $x \leq m$ și obținem $-4x = (m-x)^2 \iff x^2 - 2(m-2)x + m^2 = 0(*)$; $\Delta = 4(m-2)^2 - 4m^2 = 16(1-m)$. Dacă $m \in (1, \infty)$ atunci $\Delta < 0$ și $S \cap (-\infty, 0) = \emptyset$. Dacă $m = 1$, ecuația devine $x^2 + 2x + 1 = 0$, adică $(x+1)^2 = 0$. Prin urmare $S \cap (-\infty, 0) = \{-1\}$. Dacă $m \in (-\infty, 1)$ atunci $\Delta > 0$. Notând cu $\{x_1, x_2\}$ rădăcinile ecuației $(*)$ avem $x_1 + x_2 = m - 2 < 0$ și $x_1x_2 = m^2 > 0$. Astfel, $x_1 < 0$ și $x_2 < 0$. Verificăm dacă $x_1 \leq m$ și $x_2 \leq m$. Cum $x_1 = m - 2 + 2\sqrt{1-m}$ și $x_2 = m - 2 - 2\sqrt{1-m}$. Observăm că $x_2 \leq m$, iar $x_1 \leq m \iff -2 + 2\sqrt{1-m} \leq 0 \iff \sqrt{1-m} \leq 1 \iff 1 - m \leq 1 \iff m \geq 0$. Prin urmare dacă: **1)**$m \in (-\infty, 0)$ atunci $S \cap (-\infty, 0) = \{x_2\}$; **2)**$m \in [0, 1)$ atunci

$S \cap (-\infty, 0) = \{x_1, x_2\}$.

51. Rezolvăm inecuația $x \leq \dfrac{8}{x^2}$ înmulțind cu x^2 (presupunând că $x^2 \neq 0$, împărțirea la 0 fiind nedefinită). Astfel, ajungem la $x^3 \leq 8 \Rightarrow x \leq \sqrt{8} \Rightarrow x \leq 2$. Astfel, $S = (-\infty, 3]$, însă când substituim $x = 0$ în inecuația inițială ajungem la o situație nedefinită, deci 0 nu face parte din mulțimea soluțiilor $\Rightarrow S = (-\infty, 0) \cup (0, 2]$. Afirmația $\boxed{\text{A}}$ este, evident, adevărată, deoarece pentru $f(y) = \sqrt[3]{y}$, $f'(y) = \frac{1}{3y^{\frac{2}{3}}}$ pozitivă pentru $\forall y \neq 0$, iar inversa $f^{-2}(y) = y^3$, care este de asemenea strict crescătoare.

52. Pentru $a = 0$ ecuația $f(x) = 0 \iff x^3 + x = 0 \iff x(x^2 + 1) = 0 \iff x_1 = 0; x_2 = i; x_3 = -i$. Cum $S \subset \mathbb{R}$ avem $S = \{0\}$, deci $\boxed{\text{A}}$ este falsă. Funcția f este polinomială, deci este continuă și ori de câte ori derivabilă. Calculăm $f^{'}(x) = 3x^2 + 1$. Observăm că $f^{'}(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ și deducem că f este strict crescătoare, deci $\boxed{\text{B}}$ este adevărată. Dacă prin absurd ar exista: $x_1, x_2 \in S, x_1 \neq x_2$, atunci $f(x_1) = f(x_2)$, ceea ce ar contrazice injectivitatea lui f. Deci, $\boxed{\text{C}}$ este adevărată. Avem că $\boxed{\text{D}}$ este adevărată pentru că o ecuație de gradul 3 are cel puțin o rădăcină reală.

53. $D = (-\infty, 3]$, iar $x + a \geq 0 \iff x \geq -a$. Dacă $a < -3$ avem că $(-\infty, 3] \cap [-a, +\infty) = \emptyset$, adică ecuația nu are nicio soluție. Deci $\boxed{\text{A}}$ și $\boxed{\text{B}}$ sunt false. Dacă $a = -3$ avem ecuația $\sqrt{3 - x} = x - 3$, care au unica soluție $x = 3$. Dacă $a > -3$ avem că ecuația nu are soluție în afara intervalului $[-a, 3]$. Rezultă că $3 - x = (x + a)^2 \iff 3 - x = x^2 + 2ax + a^2 \iff x^2 + (2a+1)x + a^2 - 3 = 0 (*)$ $\Delta = (2a+1)^2 - 4(a^2 - 3) = 4a^2 + 4a + 1 - 4a^2 + 12 = 4a + 13$. Cum $a > -3$, avem că $\Delta > 1$ deci ecuația $(*)$ are 2 rădăcini reale, $x_1 = \dfrac{-(2a+1) + \sqrt{4a+13}}{2}$ și $x_2 = \dfrac{-(2a+1) - \sqrt{4a+13}}{2}$. Avem de verificat dacă $-a \leq x_1 \leq 3$ sau $-a \leq x_2 \leq 3$. $-a \leq \dfrac{-(2a+1) + \sqrt{4a+13}}{2} \leq 3 \iff -2a \leq -2a - 1 + \sqrt{4a+13} \leq 6 \iff 1 \leq \sqrt{4a+13} \leq 2a + 7 \iff 1 \leq 4a + 13 \leq (2a+7)^2 \iff a \geq -3$ și $4a^2 + 28a + 29 - 4a - 13 \geq 0 \iff 4a^2 + 24a + 36 \geq 0 \iff a^2 + 6a + 9 \geq 0 \iff (a+3)^2 \geq 0$ - adevărat. Deci $x_1 \in [-a, 3]$. Deducem că pentru fiecare $a > -3$ ecuația dată are cel puțin o soluție reală. Am arătat că pentru $a = -3$ ecuația dată are, de asemenea, cel puțin o soluție reală. Prin urmare, $\boxed{\text{C}}$ și $\boxed{\text{D}}$ sunt adevărate.

54. Se folosesc expresiile: $x + 3 - 4\sqrt{x-1} = x - 1 - 4\sqrt{x-1} + 4 = (\sqrt{x-1} - 2)^2$,

$x+8-6\sqrt{x-1} = x-1-6\sqrt{x-1}+9 = (\sqrt{x-1}-3)^2$. Condiţiile de existenţă sunt: $x-1 \geq 0$, de unde $x \in [1,\infty)$, $x+3-4\sqrt{x-1} = (\sqrt{x-1}-2)^2 \geq 0$, evident pentru $x \in [1,\infty)$, $x+8-6\sqrt{x-1} = (\sqrt{x-1}-3)^2 \geq 0$, evident pentru $x \in [1,\infty)$. Deci, $x \in [1,\infty)$. Ecuaţia poate fi scrisă astfel: $|\sqrt{x-1}-2|+|\sqrt{x-1}-3| = |\sqrt{x-1}-2|+|3-\sqrt{x-1}| = 1 = |\sqrt{x-1}-2+3-\sqrt{x-1}|$. Avem deci egalitate în inegalitatea triunghiului, de unde rezultă că $\sqrt{x-1}-2$ și $3-\sqrt{x-1}$ au același semn sau una dintre ele este zero. Obținem că mulţimea soluţiilor ecuaţiei este $S=[5,10]$.

55. Pentru T, avem $T = \sum_{k=1}^{2023} \frac{1}{k^2+k} = \sum_{k=1}^{2023} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{2023} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{2024} = \frac{2023}{2024}$, de unde rezultă că afirmația $\boxed{\text{A}}$ este falsă. Deci, $x_n = \left[\frac{2023}{2024}+\frac{n}{2024}\right]$. Adică, $x_1+x_2+x_3 = \left[\frac{2023}{2024}+\frac{1}{2024}\right]+\left[\frac{2023}{2024}+\frac{2}{2024}\right]+\left[\frac{2023}{2024}+\frac{3}{2024}\right] = 1+1+1 = 3$, deci $\boxed{\text{C}}$ este adevărată. Cum $T \in \mathbb{R}$ și $2024 \in \mathbb{N}$, putem aplica Identitatea lui Hermite și avem $\sum_{i=1}^{2023} x_i = [2024T]-[T] = 2023$. Adăugând $x_{2024} = \left[\frac{2023}{2024}+1\right] = 1$, obținem că afirmațiile $\boxed{\text{B}}$ și $\boxed{\text{D}}$ sunt ambele false.

56. (Adaptare după OLM Cluj 2024, cls. VIII P2) Avem $(a_n-1)^2 > 0$ pentru orice n și cum numerele sunt pozitive, rezultă că $a_n + \frac{1}{a_n} \geq 2$, deci $\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \geq 2n$. Aplicând inegalitatea menționată anterior strict pentru a_1 și a_2, avem $a_1+a_2+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2} \geq 4$. Aducând la numitor comun, înmulțim cu a_1a_2 și obținem $(a_1+a_2)(1+a_1a_2) \geq 4a_1a_2$, deci $a_1+a_2 \geq 3$, de unde rezultă că afirmațiile $\boxed{\text{A}}$ și $\boxed{\text{B}}$ sunt adevărate. Dacă șirul de numere reprezintă rădăcinile polinomului f, putem aplica Relațiile lui Viete și avem $S_1 = \sum_{i=1}^{n} a_i = -\frac{-n}{1} = n$, $S_{n-1} = a_2a_3\ldots a_n + a_1a_3\ldots a_n + \cdots + a_1a_2\ldots a_{n-1} = -\frac{n}{1} = -n$ și $S_n = \prod_{i=1}^{n} a_i = -1$ (de remarcat este faptul că n este par, conform cerinței, deci avem un număr par de Relații ale lui Viete, fapt care ne ajută să determinăm semnul sumelor). Putem deci, în relația $\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}$ să aducem la numitor comun și să grupăm termenii și avem $\frac{\prod_{i=1}^{n} a_i \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) + S_{n-1}}{\prod_{i=1}^{n} a_i} = \frac{(-1)\cdot n - n}{-1} = 2n$, de unde rezultă că și afirmația $\boxed{\text{C}}$ este adevărată.

57. Evident, inecuaţia are sens pentru $x > 0$. Deoarece $8^{\log_7 x} = x^{\log_7 8}$ şi $11^{1+\log_7 x} = 11 \cdot x^{\log_7 11} \Rightarrow x^{\log_7 10} + x^{\log_7 8} + 10 \cdot x^{\log_7 9} \leq 12 \cdot x^{\log_7 11}$, care este echivalentă cu inecuaţia

$x^{\log_7 \frac{10}{11}} + x^{\log_7 \frac{8}{11}} + 10 \cdot x^{\log_7 \frac{9}{11}} \leq 12$, deoarece $x^{\log_7 11} > 0$, oricare ar fi $x > 0$. Pe de altă parte funcţia $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = x^{\log_7 \frac{10}{11}} + x^{\log_7 \frac{8}{11}} + 10 \cdot x^{\log_7 \frac{9}{11}}, \forall x > 0$ este strict descrescătoare. Întrucât $f(1) = 12$, deducem că soluţia inecuaţiei date este multimea $[1, +\infty)$.

58. Ecuaţia poate fi scrisă sub forma $(5^x)^2 + (3x-7)5^x + 2x^2 - 13x + 6 = 0 \implies 5^x = \dfrac{7 - 3x \pm \sqrt{(3x-7)^2 - 4(2x^2 - 13x + 6)}}{2} = \dfrac{7 - 3x \pm \sqrt{(x+5)^2}}{2} = \dfrac{7 - 3x \pm |x+5|}{2}$. Deci $5^x = -x + 6$ sau $5^x = -2x + 1$. Întrucât funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = 5^x + x - 6$, $\forall x \in \mathbb{R}$ este strict crescătoare, deducem că ecuaţia $5^x + x - 6 = 0$ are o singură soluţie reală, $x = 1$. Analog, ecuaţia $5^x + 2x - 1 = 0$ are o singură soluţie reală; $x = 0$. Aşadar, ecuaţia dată are soluţiile $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

59. Ecuaţia are sens pentru $x > 0$. Evident $x = 1$ este soluţie a ecuaţiei; să arătăm că este singura. Deoarece $8^{\log_7 x} = x^{\log_7 8}$, ecuaţia devine $x^{\log_7 10} + x^{\log_7 8} + 2 \cdot x^{\log_7 9} = 4 \cdot x^{\log_7 12}$. Împărţind ambii membrii ai ecuaţiei cu $x^{\log_7 12}$ obţinem $x^{\log_7 \frac{5}{6}} + x^{\log_7 \frac{2}{3}} + 2 \cdot x^{\log_7 \frac{3}{4}} = 4$. Deoarece $\log_7 \frac{5}{6} < 0$, $\log_7 \frac{2}{3} < 0$, şi $\log_7 \frac{3}{4} < 0$ deducem că funcţiile $f, g, h : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definite prin $f(x) := x^{\log_7 \frac{5}{6}}, \quad g(x) := x^{\log_7 \frac{2}{3}}, \quad h(x) := x^{\log_7 \frac{3}{4}}, \ \forall x > 0$,
sunt strict descrescătoare. Atunci şi funcţia $f + g + h$ este strict descrescătoare şi deci ecuaţia are soluţia unică $x = 1$.

60. Dacă punem $2^x = u$, $3^x = v$, $5^x = w$ ecuaţia dată devine $u^3w + uv^2 + 3vw + 4u^2v + 3u^3 = uvw + u^3v + 3u^2w + u^4 + 3v^2 + 3uv$, care este echivalentă cu ecuaţia $\left(u^2 - v\right)(u-3)(w-u-v) = 0$. Obţinem: 1) $4^x = 3^x$ de unde rezultă $x = 0$. 2) $2^x = 3$ de unde rezultă $x = \log_2 3$. 3) $5^x = 2^x + 3^x$ sau echivalent $\left(\dfrac{2}{5}\right)^x + \left(\dfrac{3}{5}\right)^x = 1$. Cum funcţia $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ definită prin $f(x) = \left(\dfrac{2}{5}\right)^x + \left(\dfrac{3}{5}\right)^x$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$ este strict descrescătoare, deci injectivă şi $f(1) = 0$, deducem că $x = 1$ este unica soluţie a ecuaţiei $5^x = 2^x + 3^x$. Prin urmare, ecuaţia dată are soluţiile 0, 1 şi $\log_2 3$.

61. Ultima cifră a numărului $2f(6)$ este 2, deci nu poate fi pătrat perfect. Folosind Binomul lui Newton, ultimul termen al dezvoltării $f(x)$ este singurul care nu depinde de valoarea parametrului x. $f(0) = 2024 \cdot 0 + 1$. Prin urmare, afirmațiile $\boxed{\text{A}}$, $\boxed{\text{B}}$ și $\boxed{\text{D}}$ sunt false. De asemenea, aplicând Inegalitatea lui Bernoulli pentru $f(x)$, obținem că afirmația $\boxed{\text{C}}$ e adevărată.

62. Ecuaţia dată este echivalentă cu ecuaţia $(x-1)(2y-1)(z+1) = 1 \times 2 \times 3$.

Cum $2y-1$ este impar, urmează că avem următoarele cazuri:

a) $\begin{cases} x-1 = & 1 \\ 2y-1 = & 1 \\ z+1 = & 6 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \\ z=5 \end{cases}$ soluţie; b) $\begin{cases} x-1 = & 6 \\ 2y-1 = & 1 \\ z+1 = & 1 \end{cases} \Longrightarrow$ imposibil în $\mathbb{N}^*$;

c) $\begin{cases} x-1 = & 1 \\ 2y-1 = & 3 \\ z+1 = & 2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=2 \\ z=1 \end{cases}$ soluţie; d) $\begin{cases} x-1 = & 2 \\ 2y-1 = & 1 \\ z+1 = & 3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=1 \\ z=2 \end{cases}$ soluţie;

e) $\begin{cases} x-1 = & 2 \\ 2y-1 = & 3 \\ z+1 = & 1 \end{cases} \Longrightarrow$ imposibil în $\mathbb{N}^*$; f) $\begin{cases} x-1 = & 3 \\ 2y-1 = & 1 \\ z+1 = & 2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=1 \\ z=1 \end{cases}$ soluţie;

63. Pentru fiecare $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, avem $(k+(k+1)^x)\left(k+(k+1)^{-x}\right) = k^2 + k\left[(k+1)^x + (k+1)^{-x}\right] + 1 = (k+1)^2 + k\left[(k+1)^{x/2} - (k+1)^{-x/2}\right]^2 \geq (k+1)^2$; egalitatea având loc dacă şi numai dacă $x = 0$. Urmează că$(1+2^x)(1+2^{-x})$ $+ (2+3^x)(2+3^{-x}) + ... + (n+(n+1)^x)\left(n+(n+1)^{-x}\right) \geq 2^2 + 3^2 + ... + (n+1)^2 = \dfrac{2n^3+9n^2+13n}{6}$; egalitatea având loc dacă şi numai dacă $x = 0$.

64. Variantele $\boxed{\text{A}}$ și $\boxed{\text{B}}$ se referă strict la inegalitatea Cauchy–Bunyakovsky–Schwarz, care este corect enunțată în varianta $\boxed{\text{A}}$. Variantele $\boxed{\text{C}}$ și $\boxed{\text{D}}$ se referă la Lema lui Titu Andreescu, derivată din inegalitatea menționată anterior. Astfel, conform acestei leme, vom avea $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{b_i} \geq \frac{(\sum_{i=1}^n a_i)^2}{\sum_{i=1}^n b_i} = \frac{3}{3} = 1$.

65. Impunem condiţiile: $x^2 - 6 \geq 0 \implies x \in (-\infty, -\sqrt{6}] \cup [\sqrt{6}, \infty)$, $x^2 - 8 \geq 0 \implies x \in (-\infty, -\sqrt{8}] \cup [\sqrt{8}, \infty)$. Aşadar, domeniul de definiţie este $D = (-\infty, -\sqrt{8}] \cup [\sqrt{8}, \infty)$.

Notăm $\sqrt{x^2-6} = t \geq 0 \implies t = t^2 - 2 \implies t^2 - t - 2 = 0 \implies \begin{cases} t = 2 \\ t = -1 \text{ nu convine.} \end{cases}$

Aşadar, $\sqrt{x^2-6} = 2 \implies x^2 = 10 \implies x = \pm\sqrt{10}$.

66. $(7-4\sqrt{3})^x - 2\cdot(2-\sqrt{3})^x = 3 \implies (2-\sqrt{3})^{2x} - 2\cdot(2-\sqrt{3})^x = 3$

Folosim substituţia $(2-\sqrt{3})^x = t > 0 \implies t^2-2t-3=0 \implies \begin{cases} t_1 = 3 > 0 \\ t_2 = -1 < 0 \text{ nu convine} \end{cases}$
$t = 3 \implies (2-\sqrt{3})^x = 3 \implies x = \log_{2-\sqrt{3}} 3$. $(3-2\sqrt{2})^y - 2(\sqrt{2}-1)^y = 3 \implies$
$(\sqrt{2}-1)^{2y} - 2(\sqrt{2}-1)^y = 3$; Folosim substituţia $(\sqrt{2}-1)^y = t > 0 \implies t^2-2t-3=0 \implies$
$\begin{cases} t_1 = 3 > 0 \\ t_2 = -1 < 0 \text{ nu convine} \end{cases}$ $t = 3 \implies (\sqrt{2}-1)^y = 3 \implies y = \log_{\sqrt{2}-1} 3 \Rightarrow x + y =$
$\log_{2-\sqrt{3}} 3 + \log_{\sqrt{2}-1} 3 \implies \implies x + y = \dfrac{\ln 3}{\ln(2-\sqrt{3})} + \dfrac{\ln 3}{\ln(\sqrt{2}-1)} \implies \implies x + y =$
$\ln 3 \cdot \left[\dfrac{\ln(\sqrt{2}-1) + \ln(2-\sqrt{3})}{\ln(\sqrt{2}-1)\cdot \ln(2-\sqrt{3})}\right]$. Similar, $x - y = \ln 3 \cdot \left[\dfrac{\ln(\sqrt{2}-1) - \ln(2-\sqrt{3})}{\ln(\sqrt{2}-1)\cdot \ln(2-\sqrt{3})}\right]$.

67. $\left[\dfrac{x+1}{2}\right] = 3 \implies 3 \le \dfrac{x+1}{2} < 4 \implies 5 \le x < 7 \overset{x\in\mathbb{Z}}{\implies} x \in \{5,6\} \implies$ suma este 11.

68. Fie $z = a + bi$ un număr complex scris în formă algebrică $(a, b \in \mathbb{R})$. Cum $z^2 = (a^2 - b^2) + 2abi \Rightarrow z^2 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 2ab = 0 \Leftrightarrow a = 0$ sau $b = 0$ ceea ce arată că afirmaţia $\boxed{\text{C}}$ este adevărată. Cum pentru $a = 0$ avem $z^2 = -b^2 \le 0$ se deduce imediat că pentru a avea $(z^2 \in \mathbb{R})$ şi $z^2 \ge 0$ e necesar ca $b = 0$, caz în care, evident, $z^2 = a^2 \ge 0$. Aşadar, $z^2 \in \mathbb{R}$ şi $z^2 \ge 0 \Leftrightarrow b = 0 \Leftrightarrow z = a \in \mathbb{R}$, ceea ce arată că şi afirmaţia $\boxed{\text{B}}$ este adevărată. Afirmaţiile $\boxed{\text{A}}$ şi $\boxed{\text{D}}$ sunt, evident, false deoarece există numere complexe de pătrat pozitiv (de exemplu, $1 \in \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$) şi există numere complexe de pătrat negativ (de exemplu, $i \in \mathbb{C}$ are pătratul -1).

69. $(a+bi)^n - (ai+b)^n = (a+bi)^n - i^n(a-bi)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}bi + \cdots + C_n^{n-1}ab^{n-1}i^{n-1} + b^n i^n - i^n(a^n - C_n^1 a^{n-1}bi + \cdots + (-1)^{n-1}C_n^{n-1}ab^{n-1}i^{n-1} + (-1)^n b^n i^n) \in \mathbb{R}$ pentru orice $a, b \in \mathbb{R} \Leftrightarrow n = 4k + 2, k \in \mathbb{N}$.

70. După înmulțirea primei ecuații cu z avem $az^4 + bz^3 + cz^2 + dz = 0$. Din aceasta scădem a doua ecuație pentru a obține $az^4 - a = 0$. Deoarece $a \neq 0$, trebuie să avem $z^4 = 1$. Rădăcinile unității de ordinul patru sunt următoarele: $1, i, -1, -i$. Putem obține toate acestea cu excepția 1 prin setarea $a = b = c = d = 1$, astfel încât ambele ecuații devin $z^3 + z^2 + z + 1 = 0$. Dacă $z = 1$, atunci trebuie să avem $a + b + c + d = 0$, si găsim foarte usor astfel de a, b, c și d. Deci toate cele patru valori pe care le-am găsit sunt valori posibile ale lui z.

71. Ecuaţia dată este echivalentă cu $50z^{2017}(z^2+1) = (z^2+1)(z^{96} - z^{94} + z^{92} - z^{90} + \ldots - z^2 + 1)$. Dacă $z^2 + 1 \neq 0$, atunci ecuaţia este echivalentă cu ecuaţia $50z^{2017} = z^{96} - z^{94} + z^{92} - z^{90} + \ldots - z^2 + 1$. Cum $|z| = 1$ obţinem că $50 = 50|z^{2017}| = |z^{96} - z^{94} + z^{92} - z^{90} + \ldots - z^2 + 1| \leq |z^{96}| + |z^{94}| + |z^{92}| + |z^{90}| + \ldots + |z^2| + 1 = 49$, ceea ce este fals. Rezultă că $z^2 + 1 = 0$, de unde $z \in \{i, -i\}$.

72. Notăm cu t $=\dfrac{1-iz}{1+iz}$ și ecuația devine $t^3+t^2+t+1=0$ care are soluțiile $-1, i, -i$. egalam pe rand fracția $\dfrac{1-iz}{1+iz}$ cu $-1, i, -i$ și obținem două soluții $z_1 = 1$, $z_2 = -1$.

73. Fie $z = a+bi$. Din $|z| = 1$ avem $a^2+b^2 = 1$. Atunci, $z^2+\overline{z}^2 = (a+bi)^2+(a-bi)^2 = 2a^2 - 2b^2$ Atunci când $|a^2 - b^2| = 1$, avem două cazuri: $1) a^2 - b^2 = 1 \Rightarrow$ Avem $a^2 - b^2 = 1$ și $a^2 + b^2 = 1$. Adunând cele două ecuații, avem $b = 0$ și $a = \pm 1$, obținem $z_1 = 1$ și $z_2 = -1$; $2) a^2 - b^2 = -1 \Rightarrow$ Avem $a^2 - b^2 = -1$ și $a^2 + b^2 = 1$ obținem $z_3 = i$ și $z_4 = -i$.

74. Cunoaștem faptul că, pentru un număr $k \in \mathbb{N}$, $i^{4k+1} = i, i^{4k+2} = -1, i^{4k+3} = -i, i^{4k} = 1$. Cum n este prim, nu este multiplu de 4, deci afirmația $\boxed{\text{A}}$ este falsă. Afirmațiile $\boxed{\text{B}}$ și $\boxed{\text{C}}$ rezultă imediat pentru numere precum $n = 3$ sau $n = 5$, de unde afirmația $\boxed{\text{D}}$ se exclude automat.

75. Știind că $z_1 = 0$ și $z_2 = a \Rightarrow |z_3 - z_1| = a$, $|z_3 - z_2| = a \Rightarrow \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^3} = a^2$ și $\sqrt{(x-a)^2 + (y-o)^2} = a^2$, unde x, y sunt coordonatele lui z_3. Asta înseamnă că $(x-a)^2 + y^2 - (x^2+y^2) = a^2 - a^2(x-a)^2 - x^2 = 0 \Rightarrow y = \pm\dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow z_3 = \dfrac{a}{2} \pm i \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Astfel, $(z_1)^2 + (z_2)^2 + (z_3)^2 = \dfrac{a^2}{2}(1+i\sqrt{3})$. Centrul de greutate este $z_0^2 = \dfrac{a^2}{6}(1+i\sqrt{3})$.

76. Știm că $i + i^2 + i^3 + i^4 = 0$, deci $S_{2024} = 0$ pt că 2024 este multiplu de 4; $S_{102} = S_{100} + i^{101} + i^{102} = 0 + i + i^2 = i - 1 = S_2, S_{33} = S_{32} + i^{33} = i$.

77. Raționalizăm numărul complex $z = \dfrac{1+i\sqrt{7}}{\alpha + (\alpha + \frac{1}{2})i}$ și ajungem la $z = \dfrac{\alpha + \sqrt{7}(\alpha + \frac{1}{2})}{\alpha^2 + (\alpha + \frac{1}{2})^2} + i * \dfrac{\sqrt{7}\alpha - (\alpha + \frac{1}{2})}{\alpha^2 + (\alpha + \frac{1}{2})^2}$. Egalăm coeficientul părții imaginare cu 0 pentru a satisface condiția din enunț și aflăm $\alpha = \dfrac{1}{2\sqrt{7} - 2}$, având în vedere că $\alpha^2 + (\alpha + \frac{1}{2})^2 \neq 0$.

78. Pt. $z = a+bi$, avem $\text{Re}(z^2+1+i) = \text{Re}((a+bi)^2+1+i) = a^2-b^2+1, \text{Im}(3i*\bar{z}+z*\bar{z}) = \text{Im}(3i*(a-bi)+(a+bi)(a-bi)) = \text{Im}(3ai+3b+a^2+b^2) = 3a, \text{Im}(z)^2 = b^2 \Rightarrow \text{Re}(z^2+1+i) - \text{Im}(3i*\bar{z}+z*\bar{z}) + \text{Im}(z)^2 = a^2-b^2+1-3a+b^2 = a^2-3a+1$. Egalăm cu $1 \Rightarrow a^2-3a=0 \Rightarrow$ a=0 sau a=3.

79. Pt. $z = a+bi$, avem $\begin{cases} (a-2)^2+b^2=1, \\ a^2+b^2=3, \end{cases}$ deci $a = \frac{3}{2}$, $b = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, $card(M) = 2$.

80. $z^2 = 2\sqrt{13}+12i \notin \mathbb{R}. |z| = \sqrt{14} \Rightarrow |z|^n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow n$ este par. $|z|^{2024} = \sqrt{14}^{2024} = 14^{1012}, |(6+4i\sqrt{10})^{1012}| = \sqrt{36+160}^{1012} = \sqrt{196}^{1012} = 14^{1012}$. $|z*\bar{z}| = 14 \Rightarrow |z*\bar{z}|^4 = 14^4, \dfrac{2|z^2|^3}{3} = \dfrac{2*14^3}{3} \Rightarrow |z*\bar{z}|^4 \geq \dfrac{2|z^2|^3}{3}$.

81. $\dfrac{z_1+z_2}{1+z_1z_2} - \dfrac{7}{3} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \dfrac{z_1+z_2}{1+z_1z_2} \in \mathbb{R}$ astfel, $Im(\dfrac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}) = 0$. Din enunț știm că $|z_1| = |z_2| = 1$, deci $|\bar{z}| = \frac{1}{z}$. Un număr complex este real dacă și numai dacă este egal cu conjugatul său: $z = \bar{z}$. Astfel $\overline{(\dfrac{z_1+z_2}{1+z_1z_2})} = \dfrac{\overline{z_1}+\overline{z_2}}{1+\overline{z_1z_2}} \Rightarrow \overline{(\dfrac{z_1+z_2}{1+z_1z_2})} = \dfrac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}$. De aceea $\dfrac{z_1+z_2}{1+z_1z_2} - \dfrac{7}{3} \in \mathbb{R} \Rightarrow \dfrac{z_1+z_2}{1+z_1z_2} + i \notin \mathbb{R}$.

82. $|z_1| = \sqrt{12n^2+(1-3n^2)^2} = \sqrt{(3n^2+1)^2} = 3n^2+1 \in \mathbb{N}$. Calculăm modulul și pentru numărul $z_2 \Rightarrow |z_2| = \sqrt{8n^2+(n^2-2)^2} = \sqrt{8n^2+n^4-4n^2+4} = \sqrt{n^4+4n^2+4} = \sqrt{(n^2+2)^2} = n^2+2 \in \mathbb{N} \Rightarrow |z_1z_2| \in \mathbb{N}$.

83. Rădăcinile de ordin 2 ale lui z sunt $z_0 = \sqrt[4]{2}\Big(\cos\dfrac{\pi}{8} + i\sin\dfrac{\pi}{8}\Big), z_1 = \sqrt[4]{2}\Big(cos\dfrac{9\pi}{8} + i\sin\dfrac{9\pi}{8}\Big) \Rightarrow z_0+z_1 = 0$. Rădăcinile de ordin 3 ale lui z sunt $z_0 = \sqrt[6]{2}\Big(\cos\dfrac{\pi}{12} + i\sin\dfrac{\pi}{12}\Big), z_1 = \sqrt[6]{2}\Big(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i\sin\dfrac{3\pi}{4}\Big), z_2 = \sqrt[6]{2}\Big(\cos\dfrac{17\pi}{12} + i\sin\dfrac{17\pi}{12}\Big) \Rightarrow z_0+z_1+z_2 = \sqrt[6]{2}\Big(1+2\cos\dfrac{2\pi}{3}\Big)\Big(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i\sin\dfrac{3\pi}{4}\Big)$.

84. Scriem $z = x+yi; x,y \in \mathbb{R} \Rightarrow |z-3| = \sqrt{(x-3)^2+y^2} = 2 \Rightarrow (x-3)^2+y^2 = 4$. Verificăm $\text{Im}\Big(\dfrac{z+2}{z-2i}\Big) = 0 \Leftrightarrow \text{Im}\Big(\dfrac{x+2+yi}{x+(y-2)i}\Big) \Leftrightarrow \text{Im}\Big(\dfrac{(x+2+yi)(x-(y-2)i)}{x^2+(y-2)^2}\Big) = 0 \Leftrightarrow 2x-2y+4 = 0 \Leftrightarrow y = x+2$. Înlocuim $y = x+2$ în $(x-3)^2+y^2 = 4 \Rightarrow$ nu există nicio soluție reală.

85. Calculăm modulul și ajungem la relația $b = \dfrac{2}{3}a^2 - \dfrac{17}{3}$. Știm din enunț că $b < \dfrac{7}{3} \Rightarrow \dfrac{2}{3}a^2 - \dfrac{17}{3} < \dfrac{17}{3} \Rightarrow a^2 < 12 \Rightarrow \sqrt{\dfrac{7}{2}} \leq |a| < \sqrt{12}$.

86. Notăm numărul complex z cu $a+bi \Rightarrow$ și ajungem la relația $\text{Im}\Big(\dfrac{a-3+bi}{a+3+bi}\Big) = 0 \Leftrightarrow$

$\frac{z-3}{z+3} \in \mathbb{R}$. Raționalizăm și rezultă $6b = 0 \Rightarrow b = 0 \Rightarrow z = \bar{z}$.

87. $\det(A) = 8 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rang}(A) = 2$. Matricea $\frac{1}{2\sqrt{2}}A = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix}$ este o matrice de rotație, de unde $A^n = (2\sqrt{2})^n * \begin{pmatrix} \cos\frac{n\pi}{4} & -\sin\frac{n\pi}{4} \\ \sin\frac{n\pi}{4} & \cos\frac{n\pi}{4} \end{pmatrix}$, obținând astfel formula generala a termenilor a_n și b_n: $a_n = (2\sqrt{2})^n \cos\frac{n\pi}{4}$, $b_n = (2\sqrt{2})^n \sin\frac{n\pi}{4}$, care satisfac relația: $a_n^2 + b_n^2 = 8^n$.

88. $\det(A) = 0 \Rightarrow$matricea A nu e inversabilă. Folosind Teorema Cayley-Hamilton pentru o matrice pătratică, avem: $A^2 - \operatorname{tr}(A) * A + \det(A) * I_2 = O_2$, dar $\det(A) = 0 \Rightarrow$ $A^2 = 4iA, A^3 = (4i)^2A, \ldots, A^n = (4i)^{n-1}A$.

89. $\det(A) = -1 \neq 0 \Rightarrow$ matricea A e inversabilă și $\operatorname{rang}(A) = 3$. Din faptul că A este inversabilă, se poate determina că ecuația $A * X = I_3$ are cel puțin o soluție în $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

90. $\det(A) = 2y(x-y)^3 \Rightarrow$ matricea nu e inversabilă pentru $x = y$ sau $y = 0$. $A^2(10,10) = 40A(10,10), A^3 = 40^2A(10,10), \ldots A^{100}(10,10) = 4^{99}A(10,10) = 4^{99} * 10 * A(1,1) = 4^{100}A\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$. Nu există $A^{-50}(2,2)$ deoarece suntem în cazul $x = y$ și nu există $A^{-1}(2,2)$.

91. $\det(A(x)) = 0 \Rightarrow$ matricea are rangul diferit de 3. $f(z)*f(w) = \frac{1}{2}*A(z)*\frac{1}{2}*A(w) = \frac{1}{4}*\begin{pmatrix} 2zw & 0 & 2zw \\ 0 & 0 & 0 \\ 2zw & 0 & 2zw \end{pmatrix} \Rightarrow f(z)*f(w) = \frac{1}{2}*\begin{pmatrix} zw & 0 & zw \\ 0 & 0 & 0 \\ zw & 0 & zw \end{pmatrix} = \frac{1}{2}*A(zw) = f(zw)$. Pe baza explicațiilor anterioare, $f(z^3) = f(z*z^2) = f(z)*f(z^2) = f(z)*f(z)*f(z) = (f(z))^3$. Pentru a verifica dacă funcția f este injectivă, trebuie să urmărim relația: $f(z_1) = f(z_2), z_1, z_2 \in \mathbb{C} \Leftrightarrow z_1 = z_2$. Relația se poate verifica ușor: $f(z_1) = \frac{1}{2}*\begin{pmatrix} z_1 & 0 & z_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ z_1 & 0 & z_1 \end{pmatrix}$,

$f(z_2) = \frac{1}{2}*\begin{pmatrix} z_2 & 0 & z_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ z_2 & 0 & z_2 \end{pmatrix} \Rightarrow z_1 = z_2$.

92. $I_2 = I_2 + 0 * A \Rightarrow I_2 \in G$. $X(a) = I_2 + a * A = \begin{pmatrix} 1+a & a \\ 2a & 1+2a \end{pmatrix} \Rightarrow X(a) * X(b) =$

$\begin{pmatrix} 1+a & a \\ 2a & 1+2a \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1+b & b \\ 2b & 1+2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+(a+b+3ab) & a+b+3ab \\ 2(a+b+3ab) & 1+2(a+b+3ab) \end{pmatrix} = X(a+$
$b+3ab)$. Pentru a verifica răspunsul C, folosim relația de la subpunctul B și căutăm $X(a)$ a.î. $X(a) * X(x) = X(x) * X(a) = X(a), \forall x \in \mathbb{R}$. $X(a) * X(b) = X(b) * X(a) \Rightarrow$ comutativitate $\Rightarrow X(a) * X(x) = X(x) * X(a) \Rightarrow X(a) * X(x) = X(a) \Rightarrow X(a + x + 3ax) = X(a) \Rightarrow a + x + 3ax = a \Rightarrow x(1 + 3a) = 0 \Rightarrow a = -\dfrac{1}{3}$. De aici rezultă faptul că $X\left(\dfrac{-50}{3}\right) * X\left(\dfrac{-49}{3}\right) * \cdots * X\left(\dfrac{49}{3}\right) * X\left(\dfrac{50}{3}\right) = X\left(\dfrac{-50}{3}\right) * X\left(\dfrac{-49}{3}\right) * \cdots * X\left(\dfrac{-1}{3}\right) * \cdots * X\left(\dfrac{49}{3}\right) * X\left(\dfrac{50}{3}\right) = X\left(\dfrac{-1}{3}\right)$.

93. $\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & x & 3 \\ a & x-1 & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = (2-a)x^2 - 4x + 3a + 1$. Determinantul trebuie să fie diferit de 0 pentru ca matricea A să fie inversabilă sau să îndeplinească egalitatea $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(B) \Rightarrow \Delta < 0 \Rightarrow 3a^2 - 5a + 2 < 0 \Rightarrow a \in \left(\dfrac{2}{3}, 1\right)$.

94. Se urmăresc pașii de la exercițiul anterior. Pentru ca A să fie inversabilă $\delta < 0 \Rightarrow -2a^2 + 5a - 2 < 0 \Rightarrow a \in \left(-\infty, \dfrac{1}{2}\right) \bigcup (1, \infty)$.

95. $\det(E_n) = 0$, pentru că avem 2 coloane/linii egale $\Rightarrow \operatorname{rang}(E_n) < n \Rightarrow \det(I_n * E_n) = 0$, E_n nu este inversabilă.

$$E_n^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ 1 & 1 & ... & 1 \\ ... & ... & ... & ... \\ 1 & 1 & ... & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ 1 & 1 & ... & 1 \\ ... & ... & ... & ... \\ 1 & 1 & ... & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & n & ... & n \\ n & n & ... & n \\ ... & ... & ... & ... \\ n & n & ... & n \end{pmatrix} = n * E_n.$$

96. $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = 3 * A \Rightarrow A^3 = A * A^2 = A * 3 * A = 3 * A^2 = 3 * 3 * A = 9 * A \Rightarrow x = 9$.

Pe baza relației care se poate observa între A^n și A, $\forall n \in \mathbb{N}$: $A^n = 3^{n-1} * A, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$ suma cerută este egală cu $3^0 A + 3^1 A + 3^2 A + \cdots + 3^{n-1} A = \dfrac{3^n - 1}{2} A$.

97. $\det(A) = 1 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rang}(A) = 3$. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ -x & 1 & -\frac{x^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & y \\ -y & 1 & -\frac{y^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$A * B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x+y \\ -x-y & 1 & -xy - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x+y \\ -(x+y) & 1 & \frac{(x+y)^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G \Rightarrow$ matricea I_2 îndeplinește condiția $A * I_2 = A$.

98. Există un minor care nu depinde de parametrul x, de dimensiune 2 diferit de 0: $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rang}(A) \geq 2, A \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{R}) \Rightarrow \operatorname{rang}(A) \leq 3$. Pentru $x = 0$ matricea este egală cu $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, din care putem alege minorul $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \Rightarrow$ $\operatorname{rang}(A) = 3$.

99. $\det(B) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & 0 & 0 \\ b & b & 0 \end{vmatrix} = b^2 \neq 0 \Leftrightarrow b \neq 0$. $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

100. $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & xz \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O_3 \Leftrightarrow xz = 0$. $\det(I_3 - A) = \begin{vmatrix} 1 & -x & -y \\ 0 & 1 & -z \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow I_3 - A$ e inversabilă. Pentru a verifica dacă inversa ei este $I_3 + A$, observăm că $(I_3 - A)(I_3 + A) = I_3$.

101. $\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ a & a \end{vmatrix} = -a, \det(A) = 0 \Leftrightarrow a = 0$. $\det(B) = 4 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rang}(B) = 3$.

Din Teorema Cayley-Hamilton avem relația $A^2 - \operatorname{tr}(A)A + \det(A)I_2 = O_2$, care se poate regăsi în varianta B. $A^3 = -1 * I_2$.

102. $f(A) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} * C \Rightarrow C = -I_2$. $f(I_2) = -I_2 \Rightarrow f(I_2) - f(A) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Egalăm $f(I_2) - f(A)$ cu $(I_2 - A) * D$, unde $D \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \Rightarrow D = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

103. Întrucât coloana 3 este egală cu jumătate din suma coloanelor 2 și 4, $\det A = 0$.

104. Urmărind liniile 2 și 4 ale matricei A avem $\det A = 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$. Adunând liniile 2, 3 și 4 la prima linie, avem $\det A = 4 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \overset{l_1 + l_2}{=}$
$16 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 16 \cdot (-2) \cdot 2 = -64$. Cum $\det A \neq 0$, matricea A este inversabilă.

Cum inversa matricei A este rezultatul înmulțirii scalarului $\frac{1}{\det A} = -\frac{1}{64}$ cu adjuncta matricei A, elementul matricei A^{-1} situat în linia 2 și coloana 3 este produsul lui $-\frac{1}{64}$ cu complementul algebric al elementului lui A situat în linia 3 și coloana 2, adică

$$-\frac{1}{64} \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{64} \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \overset{l_1 + l_2}{=} \frac{1}{16} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4},$$

iar elementul matricei A^{-1} situat în linia 3 și coloana 2 este produsul lui $-\frac{1}{64}$ cu complementul algebric al elementului lui A situat în linia 2 și coloana 3, adică

$$-\frac{1}{64}\cdot(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix}1&1&1\\1&-1&-1\\2&-2&2\end{vmatrix}=\frac{1}{64}\cdot 2\cdot\begin{vmatrix}1&1&1\\1&-1&-1\\1&-1&1\end{vmatrix}\overset{l_1+l_2}{=}\frac{1}{32}\cdot\begin{vmatrix}2&0&0\\1&-1&-1\\1&-1&1\end{vmatrix}=-\frac{1}{8}.$$

105. Matricile X care verifică (1), dacă există, sunt matrici coloană de forma $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$ (2). Rezultă imediat că varianta de răspuns $\boxed{\text{A}}$ este adevărată. Pentru ca X din (2) să fie o soluție a ecuației (1) este necesar și suficient ca $(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4$ să fie o soluție a sistemului de 3 ecuații liniare cu 4 necunoscute $\begin{cases}2x_1+3ax_2+x_3-x_4=1\\x_1+2x_2+ax_3+2x_4=1\\x_1+x_2+4x_3+3x_4=1\end{cases}$ (3).

Matricele $A=\begin{pmatrix}2&3a&1&-1\\1&2&a&2\\1&1&4&3\end{pmatrix}$ și $\overline{A}=\begin{pmatrix}2&3a&1&-1&1\\1&2&a&2&1\\1&1&4&3&1\end{pmatrix}$ sunt matricea sistemului (3), respectiv matricea extinsă a sistemului (3), iar Teorema Kronecker-Capelli ne spune că sistemul (3) este compatibil dacă și numai dacă $\operatorname{rang}A=\operatorname{rang}\overline{A}$. Cum minorul $\begin{vmatrix}2&-1\\1&2\end{vmatrix}=5$, ,,decupat" din prima și ultima coloană a lui A, este nenul, $\operatorname{rang}A\geq 2$. Putem borda acest minor în două moduri pentru a obține un minor de ordinul 3 al lui A. Avem $\begin{vmatrix}2&1&-1\\1&a&2\\1&4&3\end{vmatrix}\overset{c_1+2c_3}{\underset{c_2+c_3}{=}}\begin{vmatrix}0&0&-1\\5&a+2&2\\7&7&3\end{vmatrix}=-7(5-a-2)=7(a-3)$. Dacă $a\in\mathbb{R}\setminus\{3\}$ atunci $\operatorname{rang}A=3=\operatorname{rang}\overline{A}$. În caz contrar, adică dacă $a=3$, pentru a stabili rangul lui A mai trebuie calculat minorul de ordinul 3 $\begin{vmatrix}2&3\cdot 3&-1\\1&2&2\\1&1&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&9&-1\\1&2&2\\1&1&3\end{vmatrix}\overset{l_1-2l_3}{\underset{l_2-l_3}{=}}\begin{vmatrix}0&7&-7\\0&1&-1\\1&1&3\end{vmatrix}\overset{l_1=7l_2}{=}$

0. Rezultă că rang $A = 2$ și pentru a afla rangul matricei $\overline{A}$ trebuie calculat minorul său de ordinul 3 (care este, în acest caz, singurul minor caracteristic corespunzător minorului principal $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ al sistemului (3)) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} \overset{c_1 - c_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -1$. Acest minor fiind nenul, rang $\overline{A} = 3 \neq 2 =$ rang A. Așadar, sistemul (3) și, implicit, ecuația (1) au soluții dacă și numai dacă $a \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$ și astfel afirmația $\boxed{\text{B}}$ este adevărată, iar $\boxed{\text{C}}$ este falsă.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3a & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \overset{l_1 - 2l_3}{\underset{l_2 - l_3}{\Leftrightarrow}} \begin{vmatrix} 0 & 3a-2 & -7 \\ 0 & 1 & a-4 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 3a^2 - 14a + 15 = 0 \Leftrightarrow a \in \left\{ \frac{5}{3}, 3 \right\}.$$

Cum pentru $a = \dfrac{5}{3}$ ecuația (1) are soluție, sistemul (3) fiind compatibil, afirmația $\boxed{\text{D}}$ este falsă.

106. Dezvoltând determinantul se obține ecuația $f(x) = x^3 - 3x + m = 0$. Ea admite rădăcină dublă $\alpha \in \mathbb{R}$ dacă $f(\alpha) = f'(\alpha) = 0$. Obținem $\alpha \in \{-1, 1\}$, ce ce conduce la $m \in \{-2, 2\}$.

107. Fie $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{X}$. Din $\det(X) = 0$ rezultă că $X = \begin{pmatrix} a & b \\ \lambda a & \lambda b \end{pmatrix}$, unde $\lambda \in \mathbb{Q}$.

Din condiția $\det(A + X) = 0$ rezultă $a = 3b$ sau $\lambda = \frac{1}{2}$. Deci $X = \begin{pmatrix} 3b & b \\ 3d & d \end{pmatrix}$ cu $b, d \in \mathbb{Z}$ sau $X = \begin{pmatrix} 2c & 2d \\ c & d \end{pmatrix}$ cu $c, d \in \mathbb{Z}$. Pentru $\boxed{\text{A}}$, constatăm că X are forma a doua, de unde rezultă că $X^2 = 4bX$. De aici se deduce că $X^6 = 4^5 b^5 X$, deci $\boxed{\text{A}}$ este adevărată. Afirmația $\boxed{\text{B}}$ este falsă pentru că ipoteza din enunț implică $d = 3b^2$. Și $\boxed{\text{C}}$ este falsă. De exemplu, $X = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{X}$, $Y = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{X}$, deci $\det(X + Y) \neq 0$. Afirmația $\boxed{\text{D}}$ este evident adevărată.

108. Adunăm coloana a doua la coloana întâi în determinant și obținem ecuația sub forma: $\begin{vmatrix} 2 & \cos^2\theta & 4\sin 4\theta \\ 2 & 1+\cos^2\theta & 4\sin 4\theta \\ 1 & \cos^2\theta & 1+4\sin 4\theta \end{vmatrix} = 0$. Scădem acum prima linie din liniile doi și trei și obținem $\begin{vmatrix} 2 & \cos^2\theta & 4\sin 4\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$ sau, dacă dezvoltăm după linia a doua, $4\sin 4\theta + 2 = 0$, adică $\sin 4\theta = -\frac{1}{2}$. Soluția generală a acestei ecuații este $4\theta = n\pi + (-1)^n\left(-\frac{\pi}{6}\right), n \in \mathbb{Z}$, de unde $\theta = \frac{n\pi}{4} + (-1)^{n+1}\frac{\pi}{24}$. Este ușor de constatat că soluțiile aflate în intervalul considerat sunt cele care corespund lui $n = 1$: $\theta = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{24} = \frac{7\pi}{24}$ și $n = 2$: $\theta = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{24} = \frac{11\pi}{24}$. Dacă $n \leq 0$, soluția este negativă, în timp ce dacă $n > 2$, soluția este mai mare decât $\dfrac{\pi}{2}$. Astfel, răspunsurile corecte sunt $\boxed{\text{A}}$ şi $\boxed{\text{C}}$ (numerele de la $\boxed{\text{B}}$ și $\boxed{\text{D}}$ sunt în interval, dar nu sunt soluții).

109. Scădem oricare linie (sau coloană) din oricare alta, apoi aplicăm metoda Laplace (și inducție după n pentru $\boxed{\text{D}}$).

110. Soluțiile ecuației sunt $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ \frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow A_1 * A_2 = -A_1^2$.

111. $\det(X) = b(1-a) \Rightarrow \det(X) = 0 \Leftrightarrow b = 0$ sau $a = 1$. Știm că $\det(X^k) = \det(X)^k \Rightarrow \det(X^3) = b^3(1-a)^3 = -b^3(a-1)^3$.

112. Observăm că $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ n & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ .. & .. & .. & .. & ... & .. & .. \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ n & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ .. & .. & .. & .. & ... & .. & .. \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A^n = O_n$. De asemenea, suma elementelor de pe linia 5 a matricei A^5 este egală cu 0.

113. Aplicăm un artificiu clasic pentru a afla forma generală a matricei A^n, scriind A ca suma a 2 matrici astfel: $A = I_2 + X, X = \begin{pmatrix} 4 & -8 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. Se poate observa folosind teorema Cayley-Hamilton că $X^2 - \text{tr}(X)X + \det(X)I_2 = O_2 \Rightarrow X^2 = 2X \Rightarrow X^n = 2^{n-1}X$.

Ridicăm A la puterea n folosind binomul lui Newton: $A^n = (I_2 + X)^n = C_n^0 I_2^n + C_n^1 I_2^{n-1} X + C_n^2 I_2^{n-2} X^2 + \cdots + C_n^k I_2^{n-k} X^k + \cdots + C_n^n X^n \Leftrightarrow A^n = I_2 + C_n^1 X + C_n^2 2X + \cdots + C_n^k 2^{k-1} X + \cdots + C_n^n s^{n-1} X \Leftrightarrow A^n = I_2 + (C_n^1 + 2C_n^2 + \cdots + 2^{k-1} C_n^k + \cdots + 2^{n-1} C_n^n) X$. Notăm cu $S = C_n^1 + 2C_n^2 + ... + 2^{k-1} C_n^k + ... + 2^{n-1} C_n^n = \frac{3^n - 1}{2} [3^n = (1+2)^n = 1 + 2S] \Rightarrow A^n = I_2 + S * X = \begin{pmatrix} 2 * 3^n - 1 & 4(1 - 3^n) \\ \frac{3^n - 1}{2} & 2 - 3^n \end{pmatrix}$. $\operatorname{tr}(A^n) = 3^n + 1, \det(A^n) = 3^n \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} \frac{\operatorname{tr}(A^n)}{\det(A^n)} = 1$.

114. Prin inducție aflăm $X^n = \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^n \end{pmatrix}$ și se ajunge, calculând partea stângă a ecuației, la egalitatea $3^{n+1} * \alpha^n = 1 \Rightarrow \alpha^n = \frac{1}{3^{n+1}} \Rightarrow$ ecuația nu are soluții raționale, doar reale.

115. $A^{4k} = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}, A^{4k+1} = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{1} \\ \hat{4} & \hat{0} \end{pmatrix}, A^{4k+2} = \begin{pmatrix} \hat{4} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{4} \end{pmatrix}, A^{4k+3} = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{4} \\ \hat{1} & \hat{0} \end{pmatrix}$.

$A^{4k} + A^{4k+1} + A^{4k+2} + A^{4k+3} = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix} \Rightarrow \det\left(A^{4k} + A^{4k+1} + A^{4k+2} + A^{4k+3}\right) = \hat{0}$.

116. $\det(A) = \alpha^3 - \alpha(\alpha - 1) = \alpha^3 - \alpha^2 + \alpha$. Din faptul că α e o rădăcină a ecuației $x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow \alpha^2 = -\alpha - 1 \Rightarrow \alpha^3 = \alpha * \alpha^2 = \alpha * (-\alpha - 1) = -\alpha^2 - \alpha = 1 \Rightarrow \det(A) = 1 + \alpha + 1 + \alpha = 2\alpha + 2$. Din teorema Cayley-Hamilton rezultă relația $A^2 - \operatorname{tr}(A)A + \det(A) I_2 = O_2 \Leftrightarrow A^2 - (\alpha^2 + \alpha)A + (2\alpha + 2) I_2 = O_2 \Leftrightarrow A^2 + A + (2\alpha + 2) I_2 = O_2$.

117. Fie $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \Rightarrow X^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + dc & d^2 + bc \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a^2+bc=0 \\ b(a+d)=2 \\ c(a+d)=-2 \\ d^2+bc=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=-c \\ b\neq 0 \\ c\neq 0 \\ a+d\neq 0 \\ (a-c)(a+c)=0 \\ (d-c)(d+c)=0 \end{cases} \Rightarrow \text{Cazul I} \begin{cases} a-c=0 \\ d-c=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$a=c=d=i, \quad b=\mp i \Rightarrow X_1 = \begin{pmatrix} i & -i \\ i & i \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} -i & i \\ -i & -i \end{pmatrix}$; Cazul II $\begin{cases} a+c=0 \\ d+c=0 \end{cases}$ $-\ c\cdot(-2c) = 2 \implies c^2 = 1 \implies c = \pm 1 \Rightarrow a = b = d = \mp 1 \Rightarrow X_3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad X_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; Cazul III $\begin{cases} a-c=0 \\ d+c=0 \end{cases}$; Cazul IV $\begin{cases} a+c=0 \\ d-c=0 \end{cases} \Rightarrow$

Soluțiile sunt: $X_1 = \begin{pmatrix} i & -i \\ i & i \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} -i & i \\ -i & -i \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad X_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

118. $\det A(m) = 1-3m^2+m-2m = -3m^2-m+1 = 0 \iff \begin{cases} m_1 = \dfrac{-1+\sqrt{13}}{6} \notin \mathbb{Q} \\ m_2 = \dfrac{-1-\sqrt{13}}{6} \notin \mathbb{Q} \end{cases}$.

Așadar, $A(m)$ este inversabilă, $\forall m \in \mathbb{Q}$. Mai mult de atât, $\operatorname{rang} A(3) = 3, \forall m \in \mathbb{Q}$.

$$A(0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 + \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = I_3 + B \implies A(0)^n = I_3 + n\cdot B + \frac{n!}{2!\cdot(n-2)!}\cdot$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2n & -3n \\ 0 & 0 & -n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -n^2+n \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2n & -n^2-2n \\ 0 & 1 & -n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

119. Fie A matricea sistemului. $\det(A) = -12a-6 \Rightarrow \det(A) = 0$ pentru $a = -\dfrac{1}{2}$.

Pentru $a = -\dfrac{1}{2}$, cu minorul principal ales din ecuațiile 2 și 3, cu necunoscutele principale y

și z: $m_p=\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$, iar minorul caracteristic $m_c = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 7+b \\ -2 & 7 & 1 \end{vmatrix} = -24-3b$.

Sistemul este compatibil nedeterminat pentru $a = -\dfrac{1}{2}$ și pentru $b = -8$.

120. Dacă $\text{rang}\,(A) = \text{rang}\,(\bar{A})$, unde A este matricea sistemului, iar $\bar{A}$ este matricea extinsă a sistemului, sistemul este compatibil, $\bar{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & 3 & : & 2 \\ 3 & 1 & a & -1 & : & 1 \\ 1 & 2 & 1 & b & : & c \end{pmatrix}$. Avem $d := \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \Rightarrow \text{rang}\,(A) \geq 2$. Calculăm $d_1 := \begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & a \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 10 - a$.

Caz 1: $d_1 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 10$. Atunci $\text{rang}\,(A) = \text{rang}\,(\bar{A}) = 3 \Rightarrow$ sistem compatibil.

Caz 2: $d_1 = 0 \Leftrightarrow a = 10$. Calculăm $d_2 := \begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & b \end{vmatrix} = -4(b+5)$. **Caz 2.1**: $d_2 \neq 0 \Leftrightarrow b \neq -5$. Atunci $\text{rang}\,(A) = \text{rang}\,(\bar{A}) = 3 \Rightarrow$ sistem compatibil. **Caz 2.2**: $d_2 = 0 \Leftrightarrow b = -5 \Rightarrow \text{rang}\,(A) = 2$. Calculăm determinantul caracteristic $d_c := \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & c \end{vmatrix} = -(4c+15)$. **Caz 2.2.1**: $d_c \neq 0 \Leftrightarrow c \neq -\dfrac{15}{4}$. Atunci sistemul este incompatibil. **Caz 2.2.2**: $d_c = 0 \Leftrightarrow c = -\dfrac{15}{4}$. Atunci $\text{rang}\,(A) = \text{rang}\,(\bar{A}) = 2 \Rightarrow$ sistem compatibil.

121. Avem $d := \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$, fiind un determinant Vandermonde.

Caz 1: $d \neq 0 \Leftrightarrow a, b, c$ distincte două câte două și obținem un sistem Cramer. **Caz 2**: $d = 0 \Rightarrow \text{rang}\,(A) < 3$. **Caz 2.1**: $a \neq b = c$ (se rezolvă la fel pentru $b \neq a = c$, $c \neq a = b$) $\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & : & 1 \\ a & b & c & : & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & : & d^2 \end{pmatrix}$, $d_p = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{vmatrix} = b - a \neq 0 \Rightarrow \text{rang}\,(A) =$

$2, d_c = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & d \\ a^2 & b^2 & d^2 \end{vmatrix} = (b-a)(d-a)(d-b)$. Știm că $b-a$ nu este egal cu 0. **Caz 2.1.1**: $d_c \neq 0 \Leftrightarrow d \neq a$ și $d \neq b \Rightarrow$ sistem incompatibil. **Caz 2.1.2**: $d_c = 0 \Rightarrow$ și considerăm $d = b$ (analog cu $d = a$). Atunci $\operatorname{rang}(\bar{A}) = 2 \Rightarrow$ sistem compatibil. **Caz 2.2**: $a = b = c$. Atunci $\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & : & 1 \\ a & a & a & : & d \\ a^2 & a^2 & a^2 & : & d^2 \end{pmatrix}$. Avem 2 determinanți caracteristici: $d_{c1} := \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & d \end{vmatrix} = d - a; d_{c2} := \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a^2 & d^2 \end{vmatrix} = (d-a)(d+a)$. **Caz 2.2.1**: $d_{c1} \neq 0 \Leftrightarrow d \neq a \Rightarrow$ sistem incompatibil. **Caz 2.2.1**: $d = a \Rightarrow d_{c1} = d_{c2} = 0 \Rightarrow \operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(\bar{A}) = 1 \Rightarrow$ sistem compatibil.

122. Dacă $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(\bar{A})$, unde A este matricea sistemului, iar $\bar{A}$ este matricea extinsă a sistemului, sistemul este compatibil. $\bar{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 & -1 & : & -1 \\ 1 & 9 & a & 3 & : & 3 \\ 5 & -6 & 10 & b & : & c \end{pmatrix}$. Avem $d := \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = 21 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rang}(A) \geq 2$. Calculăm $d_1 := \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 9 & a \\ 5 & -6 & 10 \end{vmatrix} = -3a + 6$. **Caz 1**: $d_1 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 2$. Atunci $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(\bar{A}) = 3 \Rightarrow$ sistem compatibil. **Caz 2**: $d_1 = 0 \Leftrightarrow a = 2$. Calculăm $d_2 := \begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 9 & 3 \\ 5 & -6 & b \end{vmatrix} = 21(b+2)$. **Caz 2.1**: $d_2 \neq 0 \Leftrightarrow b \neq -2$. Atunci $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(\bar{A}) = 3 \Rightarrow$ sistem compatibil. **Caz 2.2**: $d_2 = 0 \Leftrightarrow b = -2 \Rightarrow \operatorname{rang}(A) = 2$. Calculăm determinantul caracteristic $d_c := \begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 9 & 3 \\ 5 & -6 & c \end{vmatrix} = 21(c+2)$. **Caz 2.2.1**: $d_c \neq 0 \Leftrightarrow c \neq -2$. Atunci sistemul este incompatibil. **Caz 2.2.2**: $d_c = 0 \Leftrightarrow c = -2$. Atunci $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(\bar{A}) = 2 \Rightarrow$ sistem compatibil nedeterminat: ecuații principale $\to (1), (2)$; necunoscute principale $\to x_1, x_2$; necunoscute secundare $\to x_3 = \alpha, x_4 = \beta, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

123. Avem $d := \begin{vmatrix} b & a & 0 \\ c & 0 & a \\ 0 & c & b \end{vmatrix} = -2abc$. **Caz 1**: $d \neq 0 \Leftrightarrow a, b, c \neq 0$ și obținem un sistem compatibil determinat Cramer. **Caz 2**: $d = 0 \Rightarrow abc = 0$. **Caz 2.1**: $a = b = c = 0 \Rightarrow$ soluția: $\begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \\ z = \gamma \end{cases}$ **Caz 2.2**: $a = b = 0, c \neq 0$. Atunci sistemul este incompatibil (dacă înlocuim datele în a prima ecuație a sistemului, avem $0 = c$ care este o contradicție). **Caz 2.3**: $a = 0, b, c \neq 0 \Rightarrow$ sistemul $\begin{cases} bx = c \\ cx = b \\ cy + bz = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{c}{b} \\ x = \dfrac{b}{c} \\ y = -\dfrac{b}{c} z \end{cases}$. **Caz 2.3.1**: $a = 0, \dfrac{c}{b} \neq \dfrac{b}{c} \Leftrightarrow b^2 \neq c^2 \Leftrightarrow c \neq \pm b \Rightarrow$ sistem incompatibil. **Caz 2.3.2**: $a = 0, c = \pm b \Rightarrow \dfrac{c}{b} = \dfrac{b}{c} = \pm 1$. Obţinem sistemul: $\begin{cases} x = \pm 1 \\ y = \mp \alpha \\ z = \alpha \end{cases}$,unde $\alpha \in \mathbb{R}$ **Caz 2.3.2.1**: mulţimea soluţiilor $\begin{cases} x = 1 \\ y = -\alpha \\ z = \alpha \end{cases}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. **Caz 2.3.2.2**: mulţimea soluţiilor $\begin{cases} x = -1 \\ y = \alpha \\ z = \alpha \end{cases}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
Analog se discută și celelalte cazuri.

124. Dacă $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(\bar{A})$, unde A este matricea sistemului, iar $\bar{A}$ este matricea extinsă a sistemului, sistemul este compatibil. $\bar{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 & : & -1 \\ -1 & 1 & a & 2 & : & 2 \\ -1 & -3 & 2 & b & : & c \end{pmatrix}$. Avem $d := \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rang}(A) \geq 2$. Calculăm $d_1 := \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & a \\ -1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 7a + 14$.
Caz 1: $d_1 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq -2$. Atunci $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(\bar{A}) = 3 \Rightarrow$ sistem compatibil cu toate ecuațiile principale, necunoscute principale x_1, x_2, x_3 și necunoscuta secundară

$x_4 = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$. **Caz 2**: $d_1 = 0 \Leftrightarrow a = -2$. Calculăm $d_2 := \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & -3 & b \end{vmatrix} = b + 18$.
Caz 2.1: $d_2 \neq 0 \Leftrightarrow b \neq -18$. Atunci $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(\bar{A}) = 3 \Rightarrow$ sistem compatibil cu toate ecuațiile principale, necunoscute principale x_1, x_2, x_4 și necunoscuta secundară $x_3 = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$. **Caz 2.2**: $d_2 = 0 \Leftrightarrow b = -18 \Rightarrow \operatorname{rang}(A) = 2$. Calculăm determinantul caracteristic $d_c := \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & -3 & c \end{vmatrix} = c + 10$. **Caz 2.2.1**: $d_c \neq 0 \Leftrightarrow c \neq -10$. Atunci sistemul este incompatibil. **Caz 2.2.2**: $d_c = 0 \Leftrightarrow c = -10$. Atunci $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(\bar{A}) = 2 \Rightarrow$ sistem compatibil nedeterminat: ecuații principale$\rightarrow (1), (2)$; necunoscute principale $\rightarrow x_1, x_2$; necunoscute secundare $\rightarrow x_3 = \alpha, x_4 = \beta, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

125. Dacă $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(\bar{A})$, unde A este matricea sistemului, iar $\bar{A}$ este matricea extinsă a sistemului, sistemul este compatibil. $\bar{A} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 & 4 & : & 1 \\ 1 & -2 & a & 3 & : & 0 \\ 3 & 2 & -1 & b & : & c \end{pmatrix}$. Avem $d := \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rang}(A) \geq 2$. Calculăm $d_1 := \begin{vmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & a \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = a + 11$.
Caz 1: $d_1 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq -11$. Atunci $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(\bar{A}) = 3 \Rightarrow$ sistem compatibil cu toate ecuațiile principale, necunoscute principale x_1, x_2, x_3 și necunoscuta secundară $x_4 = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$. **Caz 2**: $d_1 = 0 \Leftrightarrow a = -11$. Calculăm $d_2 := \begin{vmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & b \end{vmatrix} = 5b + 35$.
Caz 2.1: $d_2 \neq 0 \Leftrightarrow b \neq -7$. Atunci $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(\bar{A}) = 3 \Rightarrow$ sistem compatibil cu toate ecuațiile principale, necunoscute principale x_1, x_2, x_4 și necunoscuta secundară $x_3 = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$. **Caz 2.2**: $d_2 = 0 \Leftrightarrow b = -7 \Rightarrow \operatorname{rang}(A) = 2$. Calculăm determinantul caracteristic $d_c := \begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & c \end{vmatrix} = 5c + 8$. **Caz 2.2.1**: $d_c \neq 0 \Leftrightarrow c \neq -\frac{8}{5}$. Atunci sistemul

este incompatibil. **Caz 2.2.2**: $d_c = 0 \Leftrightarrow c = -\dfrac{8}{5}$. Atunci rang$(A) =$ rang$(\bar{A}) = 2 \Rightarrow$ sistem compatibil nedeterminat: ecuații principale$\rightarrow (1), (2)$; necunoscute principale $\rightarrow$ x_1, x_2; necunoscute secundare $\rightarrow x_3 = \alpha, x_4 = \beta, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

126. Avem $d := \begin{vmatrix} a & b & 2 \\ a & 2b-1 & 3 \\ a & b & b+3 \end{vmatrix} = a(b-1)(b+1)$. **Caz 1**: $d \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 0, b \neq 1, b \neq -1$ și obținem un sistem Cramer, compatibil determinat. **Caz 2**: $d = 0 \Rightarrow$ rang$(A) < 3$. **Caz 2.1**: $a = 0$, $\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & b & 2 & : & 1 \\ 0 & 2b-1 & 3 & : & 1 \\ 0 & b & b+3 & : & 2b-1 \end{pmatrix}$, $d_1 = \begin{vmatrix} b & 2 \\ 2b-1 & 3 \end{vmatrix} = -b+2$. **Caz 2.1.1**: $a = 0, d_1 \neq 0 \Leftrightarrow b \neq 2$, atunci rang$(A) = 2$. $d_c = \begin{vmatrix} b & 2 & 1 \\ 2b-1 & 3 & 1 \\ b & b+3 & 2b-1 \end{vmatrix} =$ $(b-1)(-b+5)$. **Caz 2.1.1.1**: $a = 0, b \neq 2, d_c \neq 0 \Leftrightarrow b \neq 1, b \neq 5$, atunci sistemul este incompatibil. **Caz 2.1.1.2**: $a = 0, b = 1$ sau $b = 5$ $(d_c = 0)$, atunci sistemul este compatibil. Ecuații principale : 1 și 2; necunoscute principale : y, z; necunoscute secundare: $x = \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow$ sistem Cramer $\begin{cases} by + 2z = 1 \\ (2b-1)y + 3z = 1 \end{cases}$ cu $b = 1$ sau $b = 5$. **Caz 2.1.2**: $a = 0, d_1 = 0 \Rightarrow b = 2$ $\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & : & 1 \\ 0 & 3 & 3 & : & 1 \\ 0 & 2 & 5 & : & 3 \end{pmatrix}$, $d_2 = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 7 \neq 0 \Rightarrow$ rang$(A) = 2$. Calculăm determinantul caracteristic: $d_c = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \Rightarrow$ sistemul este incompatibil. **Caz 2.2**: $d = 0, a \neq 0 \Rightarrow b = 1$ sau $b = -1$. **Caz 2.2.1**: $a \neq 0, b = 1$ $\bar{A} = \begin{pmatrix} a & 1 & 2 & : & 1 \\ a & 1 & 3 & : & 1 \\ a & 1 & 4 & : & 1 \end{pmatrix}$, $d_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. Calculăm determinantul caracteristic: $d_c = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ sistem compatibil. **Caz 2.2.2**: $a \neq 0, b = -1$

$\bar{A} = \begin{pmatrix} a & -1 & 2 & : & 1 \\ a & -3 & 3 & : & 1 \\ a & -1 & 2 & : & -3 \end{pmatrix}, d_2 = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0.$ Calculăm determinantul caracteristic:

$d_c = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -12 \neq 0 \Rightarrow$ sistem incompatibil.

127. Adunând cele două ecuaţii rezultă $x^2 + 14x + 49 = 0 \Leftrightarrow (x+7)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -7$.

Înlocuind în oricare dintre cele două ecuaţii, rezultă $y = 14$. Se verifică uşor că perechea găsită $(-7, 14)$ este soluţie a sistemului. Deci singura afirmaţie adevărată este $\boxed{\text{C}}$.

128. Matricea sistemului şi matricea extinsă sunt $A = \begin{pmatrix} 2 & \alpha & 0 & 2 \\ 4 & -1 & \alpha+2 & 5 \\ 2 & 10 & -5 & 1 \end{pmatrix}$, respectiv

$\overline{A} = \begin{pmatrix} 2 & \alpha & 0 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & \alpha+2 & 5 & 1 \\ 2 & 10 & -5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Minorul matricei A de ordin 2: $d = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 10-8 =$ 2 este nenul şi poate fi bordat în două moduri la un minor de ordinul 3 al matricei A.

Să considerăm minorul $d' = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 4 & \alpha+2 & 5 \\ 2 & -5 & 1 \end{vmatrix} \overset{c_3-c_1}{=} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & \alpha+2 & 1 \\ 2 & -5 & -1 \end{vmatrix} = 2(-\alpha - 2 + 5) =$ $2(3-\alpha)$.

Dacă $\alpha \neq 3$ atunci $d' \neq 0$, prin urmare $\operatorname{rang} A = 3 = \operatorname{rang} \overline{A}$ şi, conform Teoremei Kronecker-Capelli, sistemul dat este compatibil. Dacă $\alpha = 3$ atunci, pentru a decide care este rangul matricei A (şi, implicit, compatibilitatea sistemului dat) trebuie să calculăm celălalt minor de ordinul 3 ce se obţine din bordarea lui d: $d'' = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 5 \\ 2 & 10 & 1 \end{vmatrix} \overset{\substack{l_1-l_3 \\ l_2-2l_3}}{=}$

$\begin{vmatrix} 0 & -7 & 1 \\ 0 & -21 & 3 \\ 2 & 10 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-21 + 21) = 0$. Aceasta arată că d este minor principal şi, echivalent, $\operatorname{rang} A = 2$. Cum minorul caracteristic corespunzător lui d este $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{c_1-2c_3}{=}$ $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-2)(2-1) = -2 \neq 0$. Fie folosind teorema lui Rouché şi constatând că acest minor caracteristic este nenul, fie aplicând teorema Kronecker-Capelli şi constatând că $\operatorname{rang} \overline{A} = 3 \neq 2 = \operatorname{rang} A$, deducem că sistemul dat este incompatibil. Deci sistemul dat este compatibil dacă şi numai dacă $\alpha \neq 3$. În particular, dacă $\alpha = -5 \neq 3$ atunci sistemul este compatibil. Aşadar, afirmaţiile $\boxed{\text{B}}$ şi $\boxed{\text{C}}$ sunt adevărate, iar $\boxed{\text{A}}$ şi $\boxed{\text{D}}$ sunt false.

129. Scăzând cele două ecuaţii obţinem $(x-z)(x-2y) = -3$. Cum numerele x, y şi z sunt întregi, trebuie să avem $\begin{cases} x - z = 1 \\ x - 2y = -3 \end{cases}$ (1) ; $\begin{cases} x - z = 3 \\ x - 2y = -1. \end{cases}$ (2)

a) În cazul (1) suntem conduşi la $7x^2 + 3x - 10 = 0$ sau echivalent $(x-1)(7x+10) = 0$, de unde rezultă $x = 1$ şi apoi $y = 2$ şi $z = 0$. ($x = -\dfrac{7}{10} \notin \mathbb{Z}$). **b)** În cazul (2) suntem conduşi la $7x^2 - 15x - 10 = 0$, pentru care $\delta = 505$, care nu este pătrat perfect, astfel x nu va fi întreg. Aşadar, sistemul dat are o singură soluţie $x = 1$, $y = 2$, $z = 0$.

130. Avem relația $ax^2 + c = bx^2 - d \Leftrightarrow (a-b)x^2 = -(d+c)$. Dacă $a - b = 0$, există două cazuri: $c \neq d \Rightarrow$ ecuația nu are nicio soluție, sau $c = d \Rightarrow$ ecuația are o infinitate de soluții. Putem elimina cazul $a = b$ și putem împărți cu $(a-b) \Rightarrow x^2 = -\dfrac{d+c}{a-b} \Rightarrow$ există 2 rădăcini distincte pentru $-\dfrac{d+c}{a-b} > 0 \Rightarrow \dfrac{d+c}{a-b} < 0$. Înmulțind cu $(a-b)^2 > 0 \Rightarrow (d+c)(a-b) < 0$.

131. Din prima ecuație scădem a doua $\Rightarrow y + z - yz = -9 \Rightarrow (z-1)(y-1) = 10$. Soluțiile $\in \mathrm{N} \Rightarrow$ 4 posibilități: $\begin{cases} y - 1 = 1 \\ z - 1 = 10 \end{cases}$, $\begin{cases} y - 1 = 2 \\ z - 1 = 5 \end{cases}$, $\begin{cases} y - 1 = 5 \\ z - 1 = 2 \end{cases}$, $\begin{cases} y - 1 = 10 \\ z - 1 = 1 \end{cases}$ Rezolvând sistemul $\Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \\ z = 11 \end{cases}, \begin{cases} x = 8 \\ y = 3 \\ z = 6 \end{cases}, \begin{cases} x = 8 \\ y = 6 \\ z = 3 \end{cases}, \begin{cases} x = 4 \\ y = 11 \\ z = 2 \end{cases}$

132. Calculăm determinantul sistemului și egalăm cu 0: $m^2 - 2m - 3 = 0 \Leftrightarrow m_1 = -1, m_2 = 3$. Verificăm compatibilitatea sistemului pentru fiecare dintre cele 2 valori ale lui m: alegem determinantul principal $d_p = \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} = -18 \neq 0$; pentru m=-1 $\Rightarrow d_c = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & -6 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -12 \neq 0 \Rightarrow$ sistem incompatibil; pentru m=3 $\Rightarrow d_c = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & -6 & 4 \\ 1 & 0 & 9 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow$ sistem incompatibil. Observăm că pentru $m = -1$ și $m = 3$ sistemul este incompatibil, deci suma $S = 2$.

133. Din prima ecuație a sistemului aflăm următoarele date: $x = 25 - 2y, x > 0, x \neq 1; \log_x (x + 2y) = \dfrac{\log_5 (x + 2y)}{\log_5 x} \Rightarrow \log_5 (x + 2y) = 2 \Rightarrow x + 2y = 25 \Rightarrow x = 25 - 2y$. Înlocuim x în cea de-a doua ecuație și rezultă: $y(2y - 25) + 26y = y^3 \Leftrightarrow y^3 - 2y^2 - y = 0 \Leftrightarrow y(y^2 - 2y - 1) = 0 \Rightarrow y_1 = 0, y_2 = 1 + \sqrt{2}, y_3 = 1 - \sqrt{2} \Rightarrow x_1 = 25, x_2 = 23 - 2\sqrt{2}, x_3 = 23 + 2\sqrt{2}$.

134. Calculăm $d = \begin{vmatrix} a & a+1 & a+2 \\ b & b+1 & b+2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ b & 1 & 1 \\ 1 & c-1 & c^2-c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-b & 0 & 0 \\ b & 1 & 1 \\ 1 & c-1 & c^2-c \end{vmatrix} = (a-b)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ c-1 & c^2-c \end{vmatrix} = (a-b)(c-1)^2$. **Caz 1**: $d \neq 0 \Leftrightarrow c \neq 1,\ a \neq b$. Atunci sistemul este compatibil determinat. **Caz 2**: $d = 0 \Leftrightarrow a = b$ sau $c = 1$. **Caz 2.1**: $c = 1$. Atunci $\bar{A} = \begin{pmatrix} a & a+1 & a+2 & : & a+3 \\ b & b+1 & b+2 & : & b+3 \\ 1 & 1 & 1 & : & 1 \end{pmatrix}$, $d_1 = \begin{vmatrix} b & b+1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$. Calculăm determinantul caracteristic: $d_c = \begin{vmatrix} a & a+1 & a+3 \\ b & b+1 & b+3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 1 & 3 \\ b & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ sistem compatibil simplu nedeterminat. **Caz 2.2**: $c \neq 1, a = b$. Atunci $\bar{A} = \begin{pmatrix} a & a+1 & a+2 & : & a+3 \\ a & a+1 & a+2 & : & a+3 \\ 1 & c & c^2 & : & c^3 \end{pmatrix}$, $d_2 = \begin{vmatrix} a & a+1 \\ 1 & c \end{vmatrix} = ac - a - 1$. **Caz 2.2.1**: $c \neq 1$, $a = b$, $d_2 \neq 0 \Leftrightarrow ac - a - 1 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(\bar{A}) = 2$. Atunci sistemul este compatibil simplu nedeterminat. **Caz 2.2.2**: $c \neq 1$, $a = b$, $d_2 = 0 \Leftrightarrow ac = a + 1$. Calculăm $d_3 = \begin{vmatrix} a & a+2 \\ 1 & c^2 \end{vmatrix}$ $= ac^2 - a - 2 = (a+1)c - a - 2 = ac + c - a - 2 = c - 1 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(\bar{A}) = 2$. Atunci sistemul este compatibil simplu nedeterminat.

135. Ridicând prima ecuație la puterea $2x$, ajungem la egalitatea $x + y = 4^{2x} \Rightarrow$ $4^{2x} \cdot 3^x = 48 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 15 \Rightarrow S = 3 + 5 = 8$.

136. Calculăm determinantul sistemului: $d = \begin{vmatrix} \hat{1} & \hat{2} & -\hat{3} \\ \hat{2} & \hat{3} & \hat{1} \\ \hat{3} & \hat{1} & \hat{2} \end{vmatrix} = \widehat{24} = \hat{4} \neq \hat{0} \Rightarrow$ sistem de tip Cramer. $d_x = \begin{vmatrix} \hat{4} & \hat{2} & -\hat{3} \\ \hat{7} & \hat{3} & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{1} & \hat{2} \end{vmatrix} = -\widehat{18} = \hat{2}; d_y = \begin{vmatrix} \hat{1} & \hat{4} & -\hat{3} \\ \hat{2} & \hat{7} & \hat{1} \\ \hat{3} & \hat{1} & \hat{2} \end{vmatrix} = \widehat{66} = \hat{6}; d_z = \begin{vmatrix} \hat{1} & \hat{2} & \hat{4} \\ \hat{2} & \hat{3} & \hat{7} \\ \hat{3} & \hat{1} & \hat{1} \end{vmatrix} =$ $\hat{6} \Rightarrow x \in \{\hat{3}, \hat{8}\}, y \in \{\hat{4}, \hat{9}\}, z \in \{\hat{4}, \hat{9}\}$.

137. Notăm $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}; a, b, c, d, e, f, g, h \in \mathbb{R}$. Înlocuind în prima ecuație a sistemului rezultă sistemul (1): $\begin{cases} -a + b + e + 2g = -57 \\ -c + d + 2e - g = 34 \\ a + 2b + f + 2h = 76 \\ c + 2d + 2f - h = 221 \end{cases}$, iar din a doua ecuație a sistemului rezultă sistemul (2): $\begin{cases} a+c+f=51 \\ -a+h=36 \\ b+d-f=97 \\ -b-h=-42 \end{cases}$. Scriem toate necunoscutele din sistemul (2) în funcție de a și c: $\begin{cases} h=36+a \\ b=6-a \\ f=51-a-c \\ d=142-c \end{cases}$. Înlocuim în $a+2b+f+2h=76 \Rightarrow a+12-2a+51-a-c+72+2a=76 \Rightarrow c=59 \Rightarrow d=83$; $c+2d+2f-h=221 \Rightarrow a=-16 \Rightarrow h=20, b=22, f=8 \Rightarrow e=-15, g=-40$. $A=\begin{pmatrix} -16 & 22 \\ 59 & 83 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} -15 & 8 \\ -40 & 20 \end{pmatrix}$

138. Calculăm determinantul sistemului: $d=\begin{vmatrix} m & -\hat{1} & \hat{1} \\ \hat{1} & m & -\hat{1} \\ -\hat{1} & \hat{1} & m \end{vmatrix}=m^3+\hat{3}m=m(m^2+\hat{3})$; $d=\hat{0} \Leftrightarrow m=\hat{0}$ sau $m^2+\hat{3}=\hat{0}$. Nu există valoare m în $\mathbb{Z}_5$ pentru care $m^2+\hat{3}=\hat{0} \Rightarrow d=\hat{0} \Leftrightarrow m=\hat{0}$. Pentru $m=\hat{0}$ observăm, adunând toate ecuațiile sistemului, că rezultatul este incorect $\hat{0}=\hat{3} \Rightarrow$ sistem incompatibil.

139. Înlocuind în numitorul fracției din sumă, rămânem cu $\sum_{t=2}^{2024}\frac{1}{t(t+1)}=\sum_{t=2}^{k}\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}$ $=\frac{1}{2}-\frac{1}{2025}=\frac{2023}{4050}$, deci $b-a=2027$.

140. Aplicând funcția f pentru fiecare element din domeniu, $f(x_1)\neq f(x_2)$, de unde rezultă proprietatea de injectivitate. Cum $Imf=\mathbb{Z}_6$, funcția este și surjectivă, deci este bijectivă.

141. Două matrici arbitrare $A, A' \in M$ sunt determinate de numerele arbitrare $a,b,c,a',b',c' \in \mathbb{Q}$ cu ajutorul cărora pot fi scrise: $A=\begin{pmatrix} b & 0 \\ a & c \end{pmatrix}$, $A'=\begin{pmatrix} b' & 0 \\ a' & c' \end{pmatrix}$. Avem $A\cdot A'=\begin{pmatrix} bb' & 0 \\ ab'+ca' & cc' \end{pmatrix}$. Cum $bb', ab'+ca', cc' \in \mathbb{Q}$ şi $(bb')(cc')=(bc)(b'c')=$

$1 \cdot 1 = 1$, se deduce că $AA' \in M$. Prin urmare afirmaţia $\boxed{\text{A}}$ este adevărată, iar cum orice matrici $A, A', A'' \in M$ sunt din $\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ şi înmulţirea matricelor din $\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ este asociativă, avem, evident, $(A \cdot A') \cdot A'' = A \cdot (A' \cdot A'')$, $\forall A, A', A'' \in M$. Aşadar şi afirmaţia $\boxed{\text{B}}$ este adevărată. Elementul neutru $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ din monoidul $(\mathcal{M}_2(\mathbb{Q}), \cdot)$ aparţine lui M, ceea ce implică $A \cdot I_2 = I_2 \cdot A = A$, $\forall A \in M$. Deci şi afirmaţia $\boxed{\text{D}}$ este adevărată. Afirmaţia $\boxed{\text{C}}$ este falsă. De exemplu, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \in M$ şi

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

142. Mulţimea $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ este mulţimea funcţiilor reale cu domeniul $\mathbb{R}$, iar operaţiile din enunţ sunt operaţii foarte des utilizate la analiză matematică. Se ştie sau se deduce foarte uşor că adunarea funcţiilor reale din enunţ este asociativă, comutativă, admite element neutru pe $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\theta(x) = 0$ şi că orice $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ are opusă (pe $-f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(-f)(x) = -f(x)$), deci $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +)$ este grup abelian. Înmulţirea funcţiilor reale din enunţ este asociativă, comutativă, admite element neutru pe $\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varepsilon(x) = 1$ şi este distributivă faţă de adunare. Aşadar, $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, \cdot)$ este un inel. Rezultă imediat că afirmaţiile $\boxed{\text{A}}$ şi $\boxed{\text{D}}$ sunt false. O funcţie $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ are inversă în $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ (pe $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$) dacă şi numai dacă $f(x) \neq 0$ pentru toţi $x \in \mathbb{R}$, prin urmare există funcţii diferite de θ care nu sunt elemente inversabile în inelul nostru (de exemplu, $1_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care se anulează în $x = 0$). Prin urmare, $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, \cdot)$ nu este corp. Deci, afirmaţia $\boxed{\text{C}}$ este adevărată şi $\boxed{\text{B}}$ este falsă.

143. Din $x \circ e = x$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$ obţinem că elementul neutru este $e = 2$, deci $\boxed{\text{A}}$ este falsă. Rezolvând ecuaţia $4 \circ y = 2$ obţinem $y = \frac{8}{5}$, deci $\boxed{\text{B}}$ este adevărată. Ecuaţia $x \circ x' = 2$ cu necunoscuta x' nu are soluţie pentru $x = \frac{3}{2}$, deci $\boxed{\text{C}}$ este falsă. Funcţia f este bijectivă, dar nu avem $f(x \circ y) = f(x) \cdot f(y)$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{3}{2}\}$, deci $\boxed{\text{D}}$ este falsă.

144. Se verifică uşor că $-1 < \dfrac{x+y}{1+xy} < 1$ pentru orice $x, y \in (-1, 1)$. Avem $(x * y) * z = \dfrac{x+y+z+xyz}{1+xy+yz+zx} = x * (y * z)$, deci $\boxed{\text{C}}$ este adevărată. Pe baza acestei formule calculăm $\dfrac{1}{3} * (\dfrac{1}{3} * \dfrac{1}{3}) = \dfrac{7}{9}$, deci $\boxed{\text{B}}$ este falsă. Din $x * e = x$ pentru orice

$x \in (-1,1)$ obţinem că elementul neutru este 0, deci $\boxed{\text{A}}$ este falsă. Pentru $x \in (-1,1)$, din egalitatea $x * x' = 0$ obţinem că simetricul lui x este $x' = -x$, deci $\boxed{\text{D}}$ este falsă.

145. Cum $x, y \in G_2$, pornim de la inegalitățile $x > 2$ și $y > 2 \iff (x-2) > 0, (y-2) > 0$, deci $3(x-2)(y-2) > 0$ și cum, în acest caz, $\alpha = 2$, avem $3(x-2)(y-2) + 14 - 12 > 2$, deci "$*$" este bine definită pe G_2 (1). Comutativitatea și asociativitatea operației rezultă imediat, folosind definițiile (2). Fie $e \in G_2$ astfel încât $x * e = e * x = x, \forall x \in G_2$. Avem $3(x-2)(e-2) + 2 = x \iff 3(x-2)(e-2) - (x-2) = 0 \iff (x-2)(3(e-2)-1) = 0 \iff 3e - 7 = 0 \Rightarrow e = \dfrac{7}{3}$ este elementul neutru al legii de compoziție (3). Pentru elemente simetrice, vom căuta $x' \in G_2$ astfel încât $x * x' = x' * x = \dfrac{7}{3}, x \in G_2$ și obținem că simetricul fiecărui element $x \in G_2$ este $x' = \dfrac{1}{9(x-2)} + 2, \forall x \in G_2$ (4). Deci, din (1), (2), (3) și (4) rezultă că structura $(G, *)$ este grup abelian, deci afirmațiile $\boxed{\text{B}}$ și $\boxed{\text{D}}$ sunt adevărate. De asemenea, $(G, *)$ și $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$ sunt izomorfe prin izomorfismul $f : (2, \infty) \to \mathbb{R}_+^*, f(x) = 3(x-2)$.

146. Legea de compoziție se poate rescrie și $x * y = 3(x-2)(y-2) + 2 + 7(\alpha - 2)$, deci $\forall \alpha \geq 2$, G_α va fi parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu "$*$". (Sursa: Bacalaureat 2009 M1).

147. Pentru a determina dacă $(G, *)$ este grup abelian, vom verifica proprietățile de comutativitate, asociativitate, element neutru și elemente simetrizabile. Comutativitatea este directă datorită comutativității adunării. Pentru a demonstra asociativitatea, folosim definiția părții fracționare: $(x * y) * z = \{\{x+y\} + z\} = \{x + y - [x+y] + z\} = \{x + y + z\} = x * (y * z), \forall x, y, z \in G$. Elementul neutru este $e = 0$, iar simetricul fiecărui element $x \in (0,1)$ este de forma $1 - x$. Simetricul lui $x = 0$ este 0, deci grupul $(G, *)$ este abelian (implicit și monoid comutativ). Funcția $f : \mathbb{R} \to G, f(x) = \{x\}$ ar fi un morfism valid între grupurile $(G, *)$ și $(\mathbb{R}, +)$. Cu toate acestea, se observă că f nu este izomorfism, deoarece f nu este o funcţie injectivă. Să observăm că elementul $\dfrac{1}{2}$ are ordinul 2 în $(G, *)$. Pe de altă parte, toate elementele nenule din $(\mathbb{R}, +)$ au ordin infinit. Aşadar cele două grupuri nu sunt izomorfe.

148. Ecuația este, de fapt, $\{3x\} = \dfrac{1}{2}$ și, cum $x \in G$, avem $0 \leq 3x \leq 3$. Deci, singurele variante posibile sunt $3x \in \left\{\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}, \dfrac{5}{2}\right\}$, adică $x \in \{\dfrac{1}{6}, \dfrac{3}{6}, \dfrac{5}{6}\}$.

149. Legea de compoziție se poate rescrie ca $x * y = (x-12)(y-12) + 12, \forall x, y \in \mathbb{R}_+^*$.

Se observă faptul că $x * 12 = 12 * x = 12, \forall x \in \mathbb{R}_+^*$. Deoarece legea de compoziție este asociativă, putem nota $\alpha = 1 * 2 * 3 * \ldots * 11$ și $\beta = 13 * 14 * \ldots * 2024$, iar numărul a devine, conform observației de mai sus, $a = \frac{\alpha * 12 * \beta}{6} = \frac{12 * \beta}{6} = 2$, care este număr prim. Notăm mulțimea $G = (12, \infty)$ și avem $f : G \to \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = x - 12$ izomorfism între grupurile $(G, *)$ și $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$. Aplicând funcția f din cerința numărului x_{2024}, avem $f(x_{2024}) = f(\underbrace{x * x * x * \ldots * x}_{\text{2024 ori}})$. Rezultă $f(\underbrace{x * x * x * \ldots * x}_{\text{2024 ori}}) = (f(x))^{2024} = (x-12)^{2024}$, deci $x_{2024} = (x-12)^{2024} + 12$.

150. Pentru ca f să fie morfism de grupuri este nevoie să verifice condiţia $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$. $\boxed{\text{A}}$ este falsă deoarece în acest caz: $f(1+1) = f(2) = 2 \neq 1 = f(1) \cdot f(1)$. $\boxed{\text{B}}$ este falsă deoarece în acest caz: $f(1+1) = f(2) = 3 \neq 4 = f(1) \cdot f(1)$. $\boxed{\text{D}}$ este falsă deoarece în acest caz: $f(1+1) = f(2) = 4 \neq 1 = f(1) \cdot f(1)$. $\boxed{\text{C}}$ este adevărată deoarece pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$ avem: $f(x+y) = e^{x+y} = e^x \cdot e^y = f(x) \cdot f(y)$.

151. Fie $\alpha = \arg(w)$. Scriind w sub formă trigonometrică, $w = \cos(\alpha) + i\sin(\alpha)$, obţinem:$\cos(\alpha) = \dfrac{1}{2}$, $\sin(\alpha) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ De aici obţinem $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$ ca unică posibilitate. Fie $k \in \mathbb{Z}$ ordinul lui w în grupul $(U_{12}, \cdot)$. Din $|U_{12}| = 12$ deducem $k \mid 12$. Verificăm deci valorile divizorilor lui 12, în ordine crescătoare. $w \neq 1$, deci calculăm: $w^2 = \cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \neq 1$, ceea ce exclude cazul $\boxed{\text{A}}$. $w^3 = \cos\left(\dfrac{3\pi}{3}\right) + i\sin\left(\dfrac{3\pi}{3}\right) = -1 \neq 1$, ceea ce exclude cazul $\boxed{\text{D}}$. $w^6 = \cos\left(\dfrac{6\pi}{3}\right) + i\sin\left(\dfrac{6\pi}{3}\right) = 1$, ceea ce confirmă cazul $\boxed{\text{B}}$. $\boxed{\text{C}}$ este falsă, în virtutea minimalităţii ordinului unui element al unui grup.

152. $\oplus$ este o operaţie comutativă, deci $e \in \mathbb{Z}$ este element neutru pentru operaţia $\oplus$ dacă pentru orice $x \in \mathbb{Z}$ avem $x \oplus e = x$. Avem $x \oplus e = x$ dacă şi numai dacă $x + e + \alpha = x$, dacă şi numai dacă $e = -\alpha$. Aceasta înseamnă că $-\alpha \neq 0$ este singurul element neutru posibil al operaţiei $\oplus$, deci $\boxed{\text{A}}$ este falsă. Operaţia $\odot$ este asociativă dacă şi numai dacă pentru orice $x, y, z \in \mathbb{Z}$ avem $(x \odot y) \odot z = x \odot (y \odot z)$.
$(x \odot y) \odot z = ((x+7)(y+7)-7) \odot z = ((x+7)(y+7)-7+7)(z+7)-7 = (x+7)(y+7)(z+7)-7$.
$x \odot (y \odot z) = x \odot ((y+7)(z+7)-7) = (x+7)((y+7)(z+7)-7+7)-7 = (x+7)(y+7)(z+7)-7$.
Am arătat, deci, că operaţia $\odot$ este asociativă, aşa că afirmaţia $\boxed{\text{B}}$ este adevărată. Verificăm acum distributivitatea. Fie $x, y, z \in \mathbb{Z}$. $(x \oplus y) \odot z = (x + y + \alpha) \odot z =$

$(x+y+\alpha+7)(z+7)-7 = xz+yz+\alpha z+7z+7x+7y+7\alpha+42$. $(x \odot z) \oplus (y \odot z) = (x+7)(z+7)-7+(y+7)(z+7)-7+\alpha = xz+7x+7z+42+yz+7y+7z+42+\alpha$. Deci $\odot$ este distributivă faţă de $\oplus$ dacă şi numai dacă pentru orice $x, y, z \in \mathbb{Z}$ este adevărat că $\alpha z + 7\alpha = 7z + 42 + \alpha$, ceea ce este echivalent cu $(\alpha - 7)(z + 6) = 0$. Astfel $\odot$ este distributivă faţă de $\oplus$ dacă şi numai dacă $\alpha = 7$, deci $\boxed{\text{C}}$ este falsă. Pentru a putea discuta inversabilitatea faţă de legea $\odot$ trebuie să găsim elementul neutru faţă de această lege. $\odot$ este o operaţie comutativă, deci $e \in \mathbb{Z}$ este element neutru pentru operaţia $\odot$ dacă pentru orice $x \in \mathbb{Z}$ avem $x \odot e = x$. Avem $x \odot e = x$ dacă şi numai dacă $(x + 7)(e + 7) - 7 = x$, dacă şi numai dacă $(x+7)(e+6) = 0$. Aceasta înseamnă că $e = -6$ este singurul element neutru posibil al operaţiei $\odot$. Un element $x \in \mathbb{Z}$ este inversabil faţă de $\odot$ dacă şi numai dacă există $x' \in \mathbb{Z}$ astfel ca $x \odot x' = -6$, ceea ce este echivalent cu: $(x+7)(y+7) = 1$ Acest lucru înseamnă că $x \in \mathbb{Z}$ este inversabil faţă de $\odot$ dacă şi numai dacă $x + 7 \in \{-1, 1\}$, ceea ce înseamnă $x \in \{-8, -6\}$, adică $\boxed{\text{D}}$ este falsă.

153. Se verifică imediat că $\circ$ este asociativă, comutativă şi are elementul neutru pe $0 \in \mathbb{Q}$. Deoarece $x' = \dfrac{-x}{1+3x}$ rezultă că A este falsă. În plus, B. este adevărată, deoarece $(\mathbb{Q} \setminus \{-\frac{1}{3}\}, \circ)$ este grup.

154. Din proprietăţile corpului (nu are divizori ai lui zero) rezultă că $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha = 1$, $\alpha \cdot \alpha = \beta$. In plus, în orice inel $(A := \{0, 1, \alpha, \beta\}, +, \cdot)$ are loc relaţia $1 + 1 + 1 + 1 = 0$ (de exemplu, arătând că funcţia $f : A \to A$, $f(x) = 1 + x$ este bijecţie). Presupunând că $1 + 1 \neq 0$ rezultă $1 + 1 + 1 + 1 \neq 0$, o contradicţie. Din tabla adunării mai rezultă $\alpha + \beta = 1$.

155. Presupunem că există un grup G astfel încât G_2 să aibă trei elemente. Orice element din $G \setminus G_2$ este diferit de inversul său (având ordinul mai mare ca 2), deci $G \setminus G_2$ are un număr par de elemente, iar $|G| = 2k + 1$. Dacă $g \in G_2$, atunci $g^2 = e$, iar din $g^{2k+1} = e$ obţinem $g = e$, deci $G_2 = \{e\}$. În concluzie, G_2 nu poate să aibă 3 elemente, deci $\boxed{\text{A}}$ este falsă. În grupul permutărilor S_3 mulţimea G_2 este formată din permutarea identică şi din cele trei transpoziţii, deci $\boxed{\text{B}}$ este adevărată. Pentru orice grup finit G, avem $e \in G_3$. Dacă există $g \in G_3 \setminus \{e\}$, atunci $\operatorname{ord} g = 3$, deci $g \neq g^{-1}$ şi $g^{-1} \in G_3$. În concluzie, G_3 are un număr impar de elemente, şi $\boxed{\text{C}}$ este adevărată. Considerăm grupul $(Z_3, +)$, pentru care G_3 are 3 elemente, deci $\boxed{\text{D}}$ este adevărată.

156. Fie $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ cu $z_1 = a_1+ib_1$ şi $z_2 = a_2+ib_2$. Atunci: $f(z_1) = \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix}$, $f(z_2) = \begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix}$ Dacă $f(z_1) = f(z_2)$, atunci $\begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix}$ de unde deducem $a_1 = a_2$ şi $b_1 = b_2$, deci $z_1 = z_2$. Astfel f este injectivă şi $\boxed{\text{A}}$ este adevărată. Se poate arăta uşor că $\mathcal{M}$ este corp. Pentru a verifica dacă f este un morfism de corpuri, luăm ca înainte $z_1 = a_1 + ib_1,\ z_2 = a_2 + ib_2 \in \mathbb{C}$. Avem: $f(z_1 + z_2) = f((a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)) = \begin{pmatrix} a_1+a_2 & -(b_1+b_2) \\ b_1+b_2 & a_2+b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix} = f(z_1) + f(z_2)$; $f(z_1 \cdot z_2) = f((a_1a_2 - b_1b_2) + i(b_1a_2 + a_1b_2)) = \begin{pmatrix} a_1a_2 - b_1b_2 & -b_1a_2 - a_1b_2 \\ b_1a_2 + a_1b_2 & a_1a_2 - b_1b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix} = f(z_1) \cdot f(z_2)$, $f(1) = f(1 + i \cdot 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Acestea arată că f este un morfism de corpuri, deci $\boxed{\text{B}}$ este adevărată. Pentru orice $d \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ avem $f^{-1}(\mathcal{B}_d) \subseteq \mathbb{C}$. Vom arăta că $\mathbb{C} \subseteq \bigcup\limits_{d\in\mathbb{R}_{\geq 0}} f^{-1}(\mathcal{B}_d)$. Fie $z \in \mathbb{C}$, $z = a + ib$. Atunci: $f(z) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{B}_{a^2+b^2}$, de unde avem: $z \in f^{-1}(\mathcal{B}_{a^2+b^2})$. Pentru că z a fost ales arbitrar în $\mathbb{C}$, deducem că $\mathbb{C} \subseteq \bigcup\limits_{d\in\mathbb{R}_{\geq 0}} f^{-1}(\mathcal{B}_d)$, ceea ce arată că: $\mathbb{C} = \bigcup\limits_{d\in\mathbb{R}_{\geq 0}} f^{-1}(\mathcal{B}_d)$, de unde $\boxed{\text{C}}$ este adevărată. Avem $U_4 = \{1, -1, i, -i\}$ şi: $f(1) = f(1 + i \cdot 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $f(-1) = f(-1 + i \cdot 0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $f(i) = f(0 + i \cdot 1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $f(-i) = f(0 + i \cdot (-1)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. De aici rezultă că $\boxed{\text{D}}$ este falsă.

157. $(x, y) * (1, 0) = (1, 0) * (x, y) = (x, y), \forall (x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

158. Observăm că $(\alpha, \beta) * (0, 0) = (0, 0) * (\alpha, \beta) = (0, 0), \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Așadar, rezultatul expresiei se va rezuma la $(\alpha, \beta) * (0, 0) * (\alpha_1, \beta_1) = (0, 0)$.

159. Avem $xy = y^2$, deci $y^3 = y^2 \cdot y = (xy) \cdot y = x \cdot (yy) = xy^2 = x \cdot xy = x^2y = ey = y$.

Analog, obținem $y^4 = xy, y^5 = y$ și observăm că: $y^{2k+1} = y$, iar $y^{2k} = xy, k \in \mathbb{N}$. Atunci, $y^{2024} = xy = y^4 = y^2$. Cum $y \neq x$ și $x \neq e$, variantele $\boxed{\text{B}}$ și $\boxed{\text{C}}$ se exclud.

160. Mulțimea Z este generată de elementul 1, deci având $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ endomorfism, putem observa următoarele: $\varphi(2) = \varphi(1) + \varphi(1) = 2\varphi(1)$,$\varphi(3) = \varphi(1) + \varphi(1) + \varphi(1) = 3\varphi(1)$, ... $\varphi(n) = \underbrace{\varphi(1) + \varphi(1) + f \cdots + \varphi(1)}_{n \text{ ori}} = n\varphi(1)$. Așadar, notând $\varphi(1) = k$, $k \in \mathbb{Z}$, se verifică imediat că afirmația $\boxed{\text{B}}$ este adevărată. Cum automorfismele sunt bijective, se impune condiția ca $\varphi(1) = 1$ sau $\varphi(1) = -1$, deci și afirmația $\boxed{\text{D}}$ este adevărată.

161. Vom efectua calculul succesiv și observăm: $1 \oplus 2 = 1$, $1 \oplus 3 = 1 \ldots 1 \oplus 2024 = 1$.

162. Din nou, efectuăm calculul succesiv și avem $1 \oplus 2 = 1, 1 \odot 3 = 3, 3 \oplus 4 = 1, \ldots 1 \odot 2023 = 2023, 2023 \oplus 2024 = 1, 1 \odot 2025 = 2025$.

163. Înlocuind în legea de compoziție obținem imediat varianta $\boxed{\text{A}}$ ca fiind adevărată.

Folosim proprietatea modulului pentru 2 numere reale x, y: $|x| + |y| \geq |x + y|$ și obținem varianta $\boxed{\text{D}}$ ca fiind, de asemenea, adevărată.

164. Legea de compoziție se restrânge la $x * y = (x - 3)(y - 3) + 3$. Cum f izomorfism, $f(x*y) = f(x)+f(y)\forall x, y \in G$. Așadar, obținem $f((x-3)(y-3)+3) = f(x)+f(y) \iff \ln(a((x-3)(y-3)+3)^2 + b((x-3)(y-3)+3)+c) = \ln((ax^2+bx+c)(ay^2+by+c)) = (a((x-3)(y-3)+3)^2 + b((x-3)(y-3)+3)+c) = ((ax^2+bx+c)(ay^2+by+c))$. Pentru $a = 0$, desfacem parantezele și rămânem cu $b^2 = b$, deci $b = 1$ (altfel funcția ln nu ar fi corect definită) și $c = -3$. Obținem $f(x) = \ln(x - 3)$ care, într-adevăr, este un izomorfism. Pentru $a = 1$, desfăcând parantezele și efectuând calculele obținem $b = -6$ și $c = 9$ care nu se regăsesc printre variantele de răspuns.

165. Observăm că $\xi = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$, adică avem $\xi^3 = 1$, de unde $\xi^2 + \xi + 1 = 0$, deoarece $\xi \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Se poate ajunge la această relaţie şi prin calcul direct: $\xi^2 = \left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{-3}{4} + \frac{-2\sqrt{3}i}{4} = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} = -\xi - 1.$

Dacă Φ este un morfism de inele, atunci pentru orice $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Z}$ trebuie să avem: $\Phi\left((a_1 + b_1\xi) \cdot (a_2 + b_2\xi)\right) = \Phi(a_1 + b_1\xi) \cdot \Phi(a_2 + b_2\xi)$. Pe de altă parte, avem:

$(a_1 + b_1\xi) \cdot (a_2 + b_2\xi) = a_1a_2 + \xi(a_1b_2 + b_1a_2) + b_1b_2\xi^2$. Înlocuind $\xi^2 = -\xi - 1$, obţinem: $(a_1 + b_1\xi) \cdot (a_2 + b_2\xi) = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + b_1a_2 - b_1b_2)\xi$. De aici deducem că dacă Φ este un morfism de inele, atunci, pentru orice $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Z}$, avem: $\begin{pmatrix} a_1a_2 - b_1b_2 & -(a_1b_2 + b_1a_2 - b_1b_2) \\ a_1b_2 + b_1a_2 - b_1b_2 & f(a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + b_1a_2 - b_1b_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & f(a_1, b_1) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & f(a_2, b_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1a_2 - b_1b_2 & -a_1b_2 - b_1f(a_2, b_2) \\ a_2b_1 + f(a_1, b_1)b_2 & -b_1b_2 + f(a_1, b_1)f(a_2b_2) \end{pmatrix}$. Identificăm elementele de pe poziţia $(1, 2)$ din ambele matrici şi obţinem: $-(a_1b_2 + b_1a_2 - b_1b_2) = -a_1b_2 - b_1f(a_2, b_2) \Rightarrow b_1(a_2 - b_2 - f(a_2, b_2)) = 0$ Această identitate este valabilă pentru orice $b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{Z}$. Alegem $b_1 \neq 0$, deci pentru orice $a_2, b_2 \in \mathbb{Z}$ avem: $f(a_2, b_2) = a_2 - b_2$. Astfel, răspunsul $\boxed{\text{B}}$ este fals. Pentru a putea concluziona că $\boxed{\text{C}}$ este adevărat, mai trebuie să verificăm că pentru $f(a, b) = a - b$ funcţia Φ este, într-adevăr, un morfism de inele. Avem deci: $\Phi : \mathbb{Z}[\xi] \to \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$, $a + b\xi \mapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a - b \end{pmatrix}$.

Astfel: $\Phi\left((a_1 + b_1\xi) + (a_2 + b_2\xi)\right) = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & -(b_1 + b_2) \\ b_1 + b_2 & a_1 + a_2 - b_1 - b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 - b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 - b_2 \end{pmatrix} = \Phi(a_1 + b_1\xi) + \Phi(a_2 + b_2\xi)$ Avem şi: $\Phi\left((a_1 + b_1\xi) \cdot (a_2 + b_2\xi)\right) = \begin{pmatrix} a_1a_2 - b_1b_2 & -(a_1b_2 + a_2b_1 - b_1b_2) \\ a_1b_2 + a_2b_1 - b_1b_2 & a_1a_2 - a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$, $\Phi(a_1 + b_1\xi) \cdot \Phi(a_2 + b_2\xi) = \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 - b_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 - b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1a_2 - b_1b_2 & -a_1b_2 - b_1a_2 + b_1b_2 \\ b_1a_2 + a_1b_2 - b_1b_2 & -b_1b_2 + a_1a_2 - b_1a_2 - a_1b_2 + b_1b_2 \end{pmatrix}$ Deci pentru orice elemente $a_1 + b_1\xi$ şi $a_2 + b_2\xi$ din $\mathbb{Z}[\xi]$ avem: $\Phi\left((a_1 + b_1\xi) \cdot (a_2 + b_2\xi)\right) = \Phi(a_1 + b_1\xi) \cdot \Phi(a_2 + b_2\xi)$ Este uşor de văzut că $\Phi(1) = \Phi(1 + 0 \cdot \xi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, care e elementul unitate din inelul $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$. Am arătat, deci, că Φ este, într-adevăr, morfism de inele pentru $f(a, b) = a - b$, deci afirmaţia $\boxed{\text{C}}$ este adevărată. În ceea ce priveşte afirmaţiile $\boxed{\text{A}}$ şi $\boxed{\text{D}}$, am fi putut să le analizăm chiar înainte de a găsi funcţia f. Într-adevăr, din faptul că Φ trebuie să fie morfism de inele deducem: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \Phi(0) = \Phi(\xi^2 + \xi + 1) =$

$\Phi(\xi^2)+\Phi(\xi)+\Phi(1)$ Pentru că $\Phi(1)=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, avem: $\Phi(\xi)=-\Phi(\xi^2)-\Phi(1)$ deci $\boxed{\text{A}}$ este adevărată. În acelaşi timp, din $\Phi(\xi^2+\xi+1)=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$, avem: $\Phi(\xi+1)=\Phi(-\xi^2)$, deci afirmaţia $\boxed{\text{D}}$ este adevărată.

166. **1)** Condiţia din enunţ este echivalentă cu faptul că 1 este rădăcină a polinomului f. $f(1)=0$; **2)** $f=(X-1)[X^2+(\alpha+1)X+1]$, $A\in M_3(\mathbb{R})\Leftrightarrow$ soluţiile ecuaţiei $x^2+(\alpha+1)x+1=0$ sunt reale. Calculul lui $\Delta=(\alpha-1)(\alpha+3)$. $\Delta\geq 0\Leftrightarrow \alpha\in(-\infty,-3]\cup[1,\infty)$; **3)** Scrierea relaţiilor lui Viète pentru f: $\det A=\alpha^3+3\alpha^2\in\mathbb{R},\ \forall\alpha\in\mathbb{R}$.

167. Scriind Relațiile lui Viète, avem $(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3-x_1)^2=-4(m-1)^2$. Pentru ca toate rădăcinile polinomului să fie numere reale, în ecuația $(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3-x_1)^2=-4(m-1)^2,\forall m\in\mathbb{R}$, trebuie să avem $(x_1-x_2)^2\geq 0,(x_2-x_3)^2\geq 0$ și $(x_3-x_1)^2\geq 0$. Prin urmare, și $-4(m-1)^2\geq 0$, deci $(m-1)^2\leq 0$. Cum $m\in\mathbb{R}$, rezultă că $(m-1)^2=0$, adică $m=1$.

168. Polinoamele f şi g au o rădăcină comună $\alpha\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\alpha|12$ şi $\alpha|5\Leftrightarrow\alpha|(12,5)=1$ $\Leftrightarrow\alpha\in\{-1,1\}$. **1)** $\alpha=1$ este rădăcină comună $\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=-12\\3a+2b=-6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=18\\b=-30\end{cases}$ **2)** $\alpha=-1$ este rădăcină comună $\Leftrightarrow\begin{cases}a-b=-12\\3a-2b=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=28\\b=40\end{cases}$

169. Funcţia f are o infinitate de zerouri. Presupunând că $p\in\mathbb{R}[X]$ ar induce pe f, rezultă că p ar avea ca rădăcini zerourile lui f, prin urmare ar avea o infinitate de rădăcini. Dar atunci $p=0$ şi funcţia polinomială asociată $\widetilde{p}=f$ e funcţia nulă, contradicţie.

170. Polinomul f are rădăcină în $\mathbb{Z}_3=\{\widehat{0},\ \widehat{1},\ \widehat{2}\}$ dacă şi numai dacă $f\left(\widehat{0}\right)=\widehat{0}$ sau $f\left(\widehat{1}\right)=\widehat{0}$ sau $f\left(\widehat{2}\right)=\widehat{0}$. Întrucât $f\left(\widehat{0}\right)=a+\widehat{1}$, deducem că $f\left(\widehat{0}\right)=\widehat{0}$ dacă şi numai dacă $a+\widehat{1}=\widehat{0}$ adică dacă şi numai dacă $a=-\widehat{1}=\widehat{2}$. Întrucât $f\left(\widehat{1}\right)=\widehat{1}$ rezultă că f nu are rădăcina $\widehat{1}$ pentru niciun $a\in\mathbb{Z}_3$. Întrucât $f\left(\widehat{2}\right)=\widehat{2}a+\widehat{1}$, deducem că $f\left(\widehat{2}\right)=\widehat{0}$ dacă şi numai dacă $\widehat{2}a+\widehat{1}=\widehat{0}$ adică dacă şi numai dacă $a=\widehat{1}$. Aşadar polinomul f are rădăcină în $\mathbb{Z}_3$ dacă şi numai dacă $a\in\{\widehat{1},\widehat{2}\}$.

171. Analizăm cele trei cazuri posibile pentru a. Pentru $a = \widehat{0}$ obţinem $f = X^4+\widehat{2}X^2+\widehat{1} = (X^2 + \widehat{1})^2$. Astfel, deducem că f este reductibil în $\mathbb{Z}_3[X]$. Pentru $a = \widehat{1}$ obţinem $f = X^4 + X^3 + \widehat{2}X^2 + X + \widehat{2}$ şi cum $f\left(\widehat{2}\right) = \widehat{0}$, înseamnă că f are rădăcină $\widehat{2}$ în $\mathbb{Z}_3$, deducem că f este reductibil în $\mathbb{Z}_3[X]$. Pentru $a = \widehat{2}$ obţinem $f = X^4+\widehat{2}X^3+\widehat{2}X^2+\widehat{2}X$. Cum $f\left(\widehat{0}\right) = \widehat{0}$, rezultă că f este reductibil în $\mathbb{Z}_3[X]$. În concluzie, f este reductibil în $\mathbb{Z}_3[X]$ pentru orice $a \in \mathbb{Z}_3$.

172. Deoarece w, x, y, z sunt rădăcini ale polinomului $h \Rightarrow h(t) = (t-w)(t-x)(t-y)(t-z)$.

Dacă înlocuim $t = 4 \Rightarrow S = (4-w)(4-x)(4-y)(4-z) = h(4) = 180$.

173. Dând factor comun, raportul devine, de fapt, $\dfrac{1}{(1-a^2)} + \dfrac{1}{(1-b^2)} + \dfrac{1}{(1-c^2)}$. $\dfrac{1}{(1-a^2)}$ poate fi scris ca $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1-a} + \dfrac{1}{1+a}\right)$, analog pentru b, c. Obținem astfel raportul $\dfrac{1}{2}\cdot\left(\frac{(1-a)(1-b)+(1-a)(1-c)+(1-b)(1-c)}{(1-a)(1-b)(1-c)} + \frac{(1+a)(1+b)+(1+a)(1+c)+(1+b)(1+c)}{(1+a)(1+b)(1+c)}\right)$. Folosind relațiile lui Viète, obținem $a+b+c = 2025,\ ab+ab+ac = 2024,\ abc = -2023$. Astfel, efectuând calculele obținem $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{-2023}{2023} + \dfrac{6077}{2027}\right) = \dfrac{2025}{2027}$.

O soluție alternativă folosește $f(1) = (1-a)(1-b)(1-c)$, $-f(-1) = (1+a)(1+b)(1+c)$ și $f'(1) = (1-a)(1-b) + (1-a)(1-c) + (1-b)(1-c)$.

174. $x = -1$ rădăcină a lui f, deci f este divizibil cu $X - (-1) = X + 1$.

175. Din relațiile lui Viete, suma rădăcinilor va fi -7, iar produsul acestora va fi 3 (gradul polinomului este un număr par, deci vom avea un număr par de relații). De aici, rezultă varianta $\boxed{\text{D}}$.

176. Pentru ca f să fie divizibil cu $X - m$ trebuie să avem $x_1 = m$ rădăcină a lui f. Așadar avem $f(m) = 2m^2 - 2 = 0$ și cum $m > 0$, avem $m = 1$.

177. Raportul este, de fapt, echivalent cu $\dfrac{x_1^2 + x_2^2}{x_1x_2(x_1 + x_2)}$. Scriind Relațiile lui Viète, avem $S_1 = x_1 + x_2 = -m$ și $S_2 = x_1x_2 = -2$. Cum $x_1^2 + x_2^2 = S_1^2 - 2S_2$, avem $(m-2)^2 = 0$, deci $m = 2$.

178. Inițial avem $f = X^3 + aX^2 + bX + c$. Cum $f(0) = c$ și $f(1) = 1 + a + b + c$, avem $a + b = -1$. De asemenea, avem $f(i+1) = i(2a + b + 2) + b + c - 2 = 0$, deci $a = -1,\ b = 0,\ c = 2$. Așadar, polinomul f este, de fapt, $f = X^3 - X^2 + 2$, cu rădăcinile

$x_1 = i+1,\ x_2 = -i+1$ și $x_3 = -1$.

179. Fie $x_1 = \alpha - r,\ x_2 = \alpha$ și $x_3 = \alpha + r$ rădăcinile polinomului f, $\alpha \in \mathbb{R}$ și r rația progresiei aritmetice. Scriind Relațiile lui Viète, avem $x_1+x_2+x_3 = 3a$, deci $\alpha = a$. Cum $f(a) = -10a^3+12a-2$, avem $(a-1)(10a^2+10a-2) = 0$, deci $a = 1$ sau $a = \dfrac{-5\pm 3\sqrt{5}}{10}$.

180. Scăzând $4x$ din expresia inițială, avem $(x+2)^3 = -4x$, adică $x+2 = -\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{x}$, de unde rezultă sistemul: $\begin{cases} a+2 = -\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{a} \\ b+2 = -\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{b} \\ c+2 = -\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{c} \end{cases}$ Din prima relație a lui Viète, avem $a+b+c = -6$, deci adunând egalitățile din sistem obținem $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c} = 0$.

181. $X^2+2X-63 = (X+9)(X-7)$, deci putem rescrie $P = Q(X+9)(X-7)+aX+b$, unde $Q \in \mathbb{R}[X]$, $a, b \in \mathbb{R}$. Pentru $x = -9$, avem $(-9)^n = -9a+b$, iar pentru $x = 7$, avem $7^n = 7a+b$. Scăzând relațiile, urmează că $16a = (-1)^{n+1}\cdot 9^n + 7^n$, deci $a = \dfrac{(-1)^{n+1}\cdot 9^n+7^n}{16}, b = \dfrac{7\cdot(-9)^n+9\cdot 7^n}{16}$.

182. Avem $a = P_1(0) = P_2(0)$. Pentru $x = 0$, $P_1(P_2(0)) - P_2(P_1(0)) = P_1(a) - P_2(a) = 0$.

183. $P(1) = \dfrac{1}{a_n a_{n-1}} + \dfrac{1}{a_{n-1}a_{n-2}} + \cdots + \dfrac{1}{a_2 a_1} + \dfrac{n}{a_1 a_n}$. Fie r rația progresiei $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Avem $P(1) = \dfrac{1}{r}(a_n - a_{n-1} + a_{n-1} - a_{n-2} + \ldots a_2 - a_1) + \dfrac{n}{a_1 a_n} = \dfrac{a_n - a_1}{r} + \dfrac{n}{a_1 a_n} = n-1+\dfrac{n}{a_1 a_n}$.

184. Adunând coloanele, avem $(x_1+x_2+x_3-1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & x_2 & x_3-1 \\ 1 & x_2-1 & x_3 \\ 1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = (x_1+x_2+x_3-1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & x_2 & x_3-1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (x_1+x_2+x_3-1)\cdot(-1)$. Din prima Relație a lui Viète, $x_1+x_2+x_3 = -\dfrac{2022}{2021}$, deci determinantul este egal cu $\dfrac{4043}{2021}$.

185. Pentru $x = 1$, avem $a_0+a_1+\ldots+a_{25} = 2^{25}$, iar pentru $x = -1$, avem $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots - a_{25} = 0$. Deci, scăzând cele două relații, $a_1+a_3+\ldots+a_{25} = 2^{24}$. Conform Binomului lui Newton, $T_{k+1} = C_{25}^k \cdot x^{25-k}$, deci $a_{19} = C_{25}^6 = C_{25}^{19} = a_6$.

186. Fie $f(x) = x^n + x^{n-1} + \ldots x + 1 = (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n) \Rightarrow f'(x) =$

$nx^{n-1}+\ldots 2x+1=\sum_{i=1}^{n}\frac{f(x)}{x-x_i}$. Pentru $x=1$ suma este egală cu $\frac{n}{2}$. Pentru $\boxed{\text{D}}$, avem $\sum_{i=1}^{10}\frac{f(x)}{x-x_i}\frac{1}{1-x_i}=5$. Similar se procedează pentru $\boxed{\text{B}}$, în cazul $n=100$. Pentru $\boxed{\text{A}}$, folosim relațiile lui Viète. Avem $x_1+x_2+x_3=\frac{11}{5}$, $x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=\frac{7}{5}\Rightarrow$ suma este egală cu 5. Pentru $\boxed{\text{C}}$, $x_1+x_2=\frac{-7}{3}, x_1x_2=\frac{q}{3}\Rightarrow q=-3$.

187. $x_2P'(x_2)+x_3P'(x_3)+x_1P'(x_1)+x_4P'(x_4)=\sum_{i=1}^{4}x_i(4x_i^3+3ax_i^2+b)=4\sum_{i=1}^{4}x_i^4+3a\sum_{i=1}^{4}x_i^3+b\sum_{i=1}^{4}x_i => (x_i^4=-ax_i^3-bx_i-c)$ suma devine $-a\sum_{i=1}^{4}x_i^3-3b\sum_{i=1}^{4}x_i-4c$. Știm din formulele lui Viete că $\sum_{i=1}^{4}x_i=-a, \sum_{i=1}^{4}x_i^3=-a^3+3ab-3c\Rightarrow P'(x_2)+x_3P'(x_3)+x_1P'(x_1)+x_4P'(x_4)=-a(-a^3+3ab-3c)-3b(-a)-4c=a^4-3a^2b+3ab+3ac-4c$.

188. Pentru $x=0 => 0=-4P(-1) => P \vdots (X+1)$. Pentru $x=4 => 4P(2)=0 => P \vdots (X-2) => P=(X+1)(X-2)F$, unde $F\in\mathbb{R}[X]$. Folosim relația inițială $x(x-1)(x-4)F(x-2)=(x-4)x(x-3)F(x-1) <=> (x-1)F(x-2)=(x-3)F(x-1)$. Pentru $x=1 => F(0)=0 => F \vdots X$. Pentru $x=3 => 2F(1)=0 => F \vdots (X-1) => F=X(X-1)Q$, unde $Q\in\mathbb{R}[X] => P=X(X+1)(X-1)(X-2)Q$. Înlocuim din nou în relația inițială $x(x-1)(x-4)(x-3)(x-2)Q(x-2)=(x-4)(x-3)x(x-2)(x-1)Q(x-1) => Q(x-2)=Q(x-1),\ \forall x\in\mathbb{R} => Q(x)=c\in\mathbb{R}$ (constantă) $=> c=2$ (coeficientul dominant) $=> P=2X(X+1)(X-2)(X-1) => P(4)=240,\ P(3)=48$.

189. (Problemă dată inițial la Canadian Math Olympiad, 1969) Notăm $t=a^2+b^2$. În $\mathbb{Z}_8$ avem $a^2,b^2\in\{0,1,4\}$, numere care nu pot forma în nicio combinație suma 6, deci ecuația nu are nicio soluție.

190. Mulțimea $\mathcal{F}$ conține 4^4 funcții, pentru că domeniul și codomeniul au patru elemente. Funcțiile strict monotone din mulțimea $\mathcal{F}$ sunt $f:\{0,1,2,3\}\to\{1,2,3,4\}$ definită prin $f(k)=k+1, k\in\{0,1,2,3\}$, $g:\{0,1,2,3\}\to\{1,2,3,4\}$ definită prin $g(k)=4-k, k\in\{0,1,2,3\}$. Mulțimea $\mathcal{F}$ conține 4! funcții injective. Probabilitatea ca o funcție f aleasă aleator din mulțimea $\mathcal{F}$ să verifice $f(0)=f(1)=1$ este $\frac{4^2}{4^4}=\frac{1}{16}$.

191. Inegalitatea din enunţul problemei poate fi scrisă sub forma $\sum_{k=1}^{n}a^{(2n+1)x_k}+$

$(n-1)\sum\limits_{k=1}^{n} a^{x_k} \geq n\sum\limits_{k=1}^{n} a^{2x_k}$, ceea ce ne sugerează următoarea abordare a rezolvării. Deoarece $x_1+x_2+...+x_n=0$, în baza inegalităţii mediilor, avem $a^{(2n+1)x_1}+a^{x_2}+a^{x_3}+...+a^{x_n}=$ $\dfrac{a^{(2n+1)x_1}}{a^{x_1+x_2+...+x_n}}+a^{x_2}+a^{x_3}+...+a^{x_n}\geq n\sqrt[n]{\dfrac{a^{(2n+1)x_1}}{a^{x_1+x_2+...+x_n}}\cdot a^{x_2}\cdot a^{x_3}\cdot ...\cdot a^{x_2}}=n\sqrt[n]{a^{2nx_1}}=$ na^{2x_1}, egalitatea având loc dacă şi numai dacă $a^{(2n+1)x_1}=a^{x_2}=a^{x_3}=...=a^{x_n}$. Prin urmare, pentru fiecare $k\in\{1,2,...,n\}$ avem $a^{(2n+1)x_k}+a^{x_1}+...a^{x_{k-1}}+a^{x_{k+1}}+...+a^{x_n}\geq$ na^{2x_k}, egalitatea având loc dacă şi numai dacă $a^{(2n+1)x_k}=a^{x_1}=...=a^{x_{k-1}}=a^{x_{k+1}}=$ $...=a^{x_n}$, adică dacă şi numai dacă $(2n+1)\,x_k=x_1=...=x_{k-1}=x_{k+1}=...=x_n$. Adunând ultimele n inegalităţi, obţinem că $P\geq Q$; egalitatea având loc dacă şi numai dacă $(2n+1)\,x_k=x_j$, oricare ar fi $k,j\in\{1,2,...,n\}$ de unde deducem că $x_k=0$, oricare ar fi $k\in\{1,2,...,n\}$.

192. Dacă notăm cu x_1 şi x_2 rădăcinile ecuaţiei, atunci $b+ak+k^2=x_1x_2-k\,(x_1+x_2)+$ $k^2=(x_1-k)\,(x_2-k)$. Deoarece x_1-k şi x_2-k sunt întregi, diferite de -1, 0 şi 1, deducem că $b+ak+k^2$ este produsul a două numere întregi (x_1-k) şi (x_2-k).

193. Pentru început observăm că pentru orice $a\geq 2$, $2\leq 1+a^t\leq a^{t+1}$, oricare ar fi $t\geq 0$. Atunci, pentru orice $a\geq 2$ şi $t,\ s\geq 0$, avem $1+a^t+a^{s+1}\leq a^{t+1}+a^{s+1}=$ $\frac{2-a^{s+1}}{2}a^{t+1}+\frac{2-a^{t+1}}{2}a^{s+1}+a^{t+s+2}\leq a^{t+s+2}$. De aici deducem inegalităţile $1+a^{x_1}+a^{x_2+1}\leq$ $a^{x_1+x_2+2}$; $1+a^{x_2}+a^{x_3+1}\leq a^{x_2+x_3+2}$; $...1+a^{x_{n-1}}+a^{x_n+1}\leq a^{x_{n-1}+x_n+2}$; $1+a^{xn}+a^{x_1+1}\leq$ $a^{x_n+x_1+2}$ care, prin înmulţire membru cu membru, ne conduc la $\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+a^{x_k}+a^{x_{k+1}+1}\right)\leq$ $a^{2(n+x_1+x_2+...+x_n)}$.

194. Relaţia din enunţul problemei poate fi scrisă sub forma $(x-1)^2+(2x-y)^2+$ $(x-2z)^2=2$; $(*)$ Urmează că $(x-1)^2\leq 2$, deci $x\in\{0,\ 1,\ 2\}$. **a)** Dacă $x=0$, relaţia $(*)$ devine $y^2+4z^2=1$. Aşadar $y^2\leq 1$, deci $y\in\{-1,\ 0,\ 1\}$. **a$_1$)** Dacă $y=-1$, obţinem $4z^2=$ 0, deci $z=0$. **a$_2$)** Dacă $y=0$, obţinem $4z^2=1$ imposibil pentru că $z\in\mathbb{Z}$. **a$_3$)** Dacă $y=1$, obţinem $4z^2=0$ deci $z=0$. **b)** Dacă $x=1$, relaţia $(*)$ devine $(2-y)^2+(1-2z)^2=2$. Urmează că $(2-y)^2\leq 2$, deci $y\in\{1,\ 2,\ 3\}$. **b$_1$)** Dacă $y=1$ obţinem $(1-2z)^2=1$ şi deci $z=0$ sau $z=1$. **b$_2$)** Dacă $y=2$ obţinem $(1-2z)^2=2$ imposibil pentru că $z\in\mathbb{Z}$. **b$_3$)** Dacă $y=3$ obţinem $(1-2z)^2=1$ şi deci $z=0$ sau $z=1$. **c)** Dacă $x=2$ relaţia $(*)$ devine $(4-y)^2+(2-2z)^2=1$. Urmează că $(4-y)^2\leq 1$, deci $y\in\{3,\ 4,\ 5\}$. **c$_1$)** Dacă $y=3$ obţinem $(2-2z)^2=0$ deci $z=1$. **c$_2$)** Dacă $y=4$ obţinem $(2-2z)^2=1$ imposibil pentru că $z \in \mathbb{Z}$. **c$_3$)** Dacă $y = 5$ obţinem $(2-2z)^2 = 0$ deci $z = 1$. Prin urmare $(x,y,z) \in \{(0,-1,0),\ (0,1,0),\ (1,1,0),\ (1,1,1),\ (1,3,0),\ (1,3,1),\ (2,3,1),\ (2,5,1)\}$. De aici deducem că cea mai mică valoare a expresiei $E(x,y,z)$ este -2 şi este atinsă pentru $(x,y,z) = (0,-1,0)$.

195. Fie $y = g(f(x))$; obţinem inecuaţia $f(y) \le 0$, adică inecuaţia $y^2 - 3y + 2 \le 0$, cu soluţia $y \in [1,2]$. Fie $z = f(x)$; obţinem $g(z) = y \in [1,2]$,deci $1 \le \frac{z+1}{z^2+1} \le 2$ adică $\begin{cases} z^2 - z \le 0 \\ 2z^2 - z + 1 \ge 0 \end{cases}$. Urmează că $z \in [0,1]$ Prin urmare $0 \le z = f(x) = x^2 - 3x + 2 \le 1$. Inecuaţia $0 \le x^2 - 3x + 2$ ne conduce la $x \in (-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$ iar inecuaţia $x^2 - 3x + 2 \le 1$, adică inecuaţia $x^2 - 3x + 1 \le 0$ ne conduce la $x \in \left[\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}, \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right]$ Obţinem $x \in \left[\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}, 1\right] \cup \left[2, \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right]$.

196. Din relaţia $4x + 7z = 7y + 9$ rezultă că $2x + y + 5z = 6(x - y + 2z - 2) + 3$ şi deci restul împărţirii lui $2x + y + 5z$ la 6 este 3.

197. Grupăm termenii astfel: $(1^2 - 2^2) + (3^2 - 4^2) + \ldots + (99^2 - 100^2)$. Cum $n^2 - (n+1)^2 = -(2n+1) \Rightarrow$ suma devine egală cu $-(3 + 7 + 11 + \ldots + 199)$. Aceasta este o progresie aritmetică cu rația 4 $\Rightarrow$ suma este egală cu $-\dfrac{50}{2} \cdot (3 + 199) = -5050$.

198. Presupunem că p nu este pătrat perfect; atunci $\sqrt{p} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Notăm $\sqrt[n]{\sqrt{p} + \sqrt{p-1}}$ cu a. Întrucât $\sqrt[n]{\sqrt{p} - \sqrt{p-1}} = \frac{1}{a}$, obţinem că $x = a + \frac{1}{a}$ şi $a^n + \frac{1}{a^n} = 2\sqrt{p} \notin \mathbb{Q}$. Presupunem prin absurd că $x \in \mathbb{Q}$. Cum $x = a + \frac{1}{a}$, deducem că $a^2 + \frac{1}{a^2} = x^2 - 2 \in \mathbb{Q}$. Deoarece $a^{k+1} + \frac{1}{a^{k+1}} = \left(a + \frac{1}{a}\right)\left(a^k + \frac{1}{a^k}\right) - \left(a^{k-1} + \frac{1}{a^{k-1}}\right)$, $k \ge 2$, folosind metoda inducţiei matematice, deducem imediat că $a^k + \frac{1}{a^k} \in \mathbb{Q}$, oricare ar fi $k \ge 2$. Urmează că $a^n + \frac{1}{a^n} = 2\sqrt{p} \in \mathbb{Q}$, fals.

199. *b*) Din *a*) rezultă că p trebuie să fie pătrat perfect; fie $p = q^2$, cu $q \in \mathbb{N}$, $q \ge 2$. Atunci $x = \sqrt{\sqrt{p} + \sqrt{p-1}} + \sqrt{\sqrt{p} - \sqrt{p-1}} = \sqrt{q + \sqrt{q^2-1}} + \sqrt{q - \sqrt{q^2-1}} = \sqrt{q + \sqrt{q^2-1}} + \frac{1}{\sqrt{q+\sqrt{q^2-1}}} = \frac{q+1+\sqrt{q^2-1}}{\sqrt{q+\sqrt{q^2-1}}} = \left(q + 1 + \sqrt{q^2-1}\right)\sqrt{q - \sqrt{q^2-1}}$
$= \sqrt{2(q+1)}$. Urmează că $x \in \mathbb{Q}$ dacă şi numai dacă $q + 1 = 2r^2$, cu $r \in \mathbb{N}$, $r \ge 2$. Aşadar, $x \in \mathbb{Q}$ dacă şi numai dacă există $r \in \mathbb{N}$, $r \ge 2$ astfel încât $p = \left(2r^2 - 1\right)^2$.

200. Aria cercului $= 25\pi$, iar aria zonei negre este $9\pi - 1\pi = 8\pi$. Probabilitatea $=$

$\dfrac{\text{favorabil}}{\text{posibil}} = \dfrac{8\pi}{25\pi} = 0,32 \Rightarrow 32\%.$

201. Aplicăm logaritmul și obținem $\ln x_{n+1} = \dfrac{n+1}{n}\ln x_n$, adică $\dfrac{1}{n+1}\ln x_{n+1} = \dfrac{1}{n}\ln x_n$. Notăm $y_n := \dfrac{1}{n}\ln x_n$ și obținem $y_{n+1} = y_n$, deci $y_n = y_1 = \ln x_1$ și $x_n = x_1^n$.

202. Rescriem $\dfrac{1}{x_{n+2}} = \dfrac{1}{x_{n+1}} - \dfrac{1}{4x_n}$. Notăm $\dfrac{1}{x_n} =: y_n$ și obținem relația de recurență de ordinul doi: $y_{n+2} = y_{n+1} - \frac{1}{4}y_n$ Ecuația caracteristică este $r^2 - r + \frac{1}{4} = 0$ cu rădăcinile $r_1 = r_2 = \frac{1}{2}$ Deci soluția generală este $y_n = a\dfrac{1}{2^n} + bn\dfrac{1}{2^n}$. Înlocuim pentru $n = 1$ și $n = 2$ și obținem $a = 0$ și $b = 1$ Astfel, rezultă $y_n = \dfrac{n}{2^n}$ și $x_n = \dfrac{2^n}{n}$

203. Scăzând x_n^3 în ambii mebri avem $x_{n+1}^3 - x_n^3 < 3x_n - 2 - x_n^3 = -(x_n+2)(x_n-1)^2 \leq 0$, de unde $x_{n+1}^3 \leq x_n^3$, $x_{n+1} \leq x_n$, deci șirul este descrescător și mărginit superior. Cum șirul are termeni pozitivi, el este și mărginit inferior, deci convergent. Notăm limita șirului cu ℓ și obținem $\ell^3 \leq 3\ell - 2$, de unde $-(\ell+2)(\ell-1)^2 \geq 0$, deci $\ell = 1$.

204. $x_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k^4+k^2+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k^2+1)^2 - k^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k^2+k+1)(k^2-k+1)} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{(k^2+k+1)-(k^2-k+1)}{(k^2+k+1)(k^2-k+1)} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{1}{k^2-k+1} - \frac{1}{k^2+k+1}\Big) = \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7}\cdots + \frac{1}{n^2-n+1} - \frac{1}{n^2+n+1}\Big) = \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{1}{n^2+n+1}\Big)$. Prin urmare, șirul este mărginit superior și inferior, cu $x_n < \dfrac{1}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

205. Observăm că putem rescrie $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}\Big) = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$, deci $a_n = 1 - \dfrac{1}{(n+1)^2}$. Avem $L = \displaystyle\lim_{n\to\infty}\Big(1 - \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n(n+1)}\Big)^n = \lim_{n\to\infty}\Big(1 + \frac{1}{n(n+1)^2}\Big)^n = e^0 = 1.$

206. $x_n = \dfrac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}}{\sqrt{n+\sqrt{n+1}}+\sqrt{n+\sqrt{n+2}}} \Rightarrow \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} = 1.$

207. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\Big(\frac{a\cdot n^2 + b\cdot n + 5}{b\cdot n^2 + 4\cdot n + 7}\Big)^{\frac{n^2+3}{n+1}}$ este finită dacă și numai dacă avem cazul de nedeterminare 1 la infinit, ceea ce implică $a = b$. Avem $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\Big(\frac{a\cdot n^2 + a\cdot n + 5}{a\cdot n^2 + 4\cdot n + 7}\Big)^{\frac{n^2+3}{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\Big(1 + \frac{n(a-4)-2}{a\cdot n^2 + 4\cdot n + 7}\Big)^{\frac{n^2+3}{n+1}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(a-4)-2}{a\cdot n^2+4\cdot n+7}\cdot\frac{n^2+3}{n+1}} = e^{\frac{a-4}{a}}$, de unde $\dfrac{a-4}{a} = -1$, deci $a = b = 2$.

208. Reamintim că $c_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{n} - \ln n$ converge la constanta Euler $\gamma \in (0,1)$.

Avem $x_n = (c_{2n} + \ln(2n)) - (c_n + \ln n)$, de unde $x_n = c_{2n} - c_n + \ln(2n) - \ln(n) \to \ln(2)$, căci c_n și c_{2n} converg ambele la γ.

209. Observăm că expresia $x = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots}}}}$ este limita șirului (x_n) definit recursiv prin $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$, cu $x_1 = \sqrt{2}$. Putem arăta prin inducție că $x_n < 2$, deci șirul e mărginit. Cum $x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1) < 0$ pentru $x \in (-1, 2)$, avem că $x_n < x_{n+1}$, deci șirul e crescător. Așadar șirul (x_n) este convergent. Trecând la limită în relația de recurență obținem $x^2 = 2 + x$, de unde $x = 2$ (cazul $x = -1$ este imposibil).

210. Pentru valori mari ale lui n avem $(n+2)^2 < n^2 + 5n < (n+3)^2$, de unde $\lfloor \sqrt{n^2 + 5n} \rfloor = n+2$. Atunci $\{\sqrt{n^2+5n}\} = \sqrt{n^2+5n} - (n+2) = \dfrac{n^2+5n-n^2-4n-4}{\sqrt{n^2+5n}+(n+2)} = \dfrac{n-4}{\sqrt{n^2+5n}+(n+2)} \to \dfrac{1}{2}$.

211. Cum $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ și f e continuă (deci are proprietatea lui Darboux), rezultă că $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, deci f e surjectivă. Cum $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$, avem că f e crescătoare, deci f e injectivă. Așadar f e bijectivă și inversa f^{-1} e continuă. Avem $x_n = f^{-1}\Big(\dfrac{n+1}{n}\Big) \to f^{-1}\Big(\dfrac{n+1}{n}\Big) = f^{-1}(1) = 1$.

212. $x_0 > 0 \Rightarrow x_n > 0$ și $x_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{x_n} > x_n$. Fiind crescător, șirul are limită și o vom nota cu ℓ. Dacă $\ell \in \mathbb{R}$, trecând la limită în relația de recurență obținem $\ell^2 = \ell^2 + 1$, imposibil. Prin urmare, presupunerea făcută este falsă, deci $\ell = \infty$. Folosind Stolz-Cesaro avem $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n^2}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}^2 - x_n^2}{1} = \lim\limits_{n\to\infty} (x_{n+1} - x_n)(x_{n+1} + x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{x_n}(x_{n+1} + x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \Big(\dfrac{x_{n+1}}{x_n} + 1\Big) = 2 + \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{x_n^2} = 2$. Deci limita căutată este $\sqrt{2}$.

213. $(1+\sqrt{5})^n = a_n + b_n\sqrt{5}$, $(1-\sqrt{5})^n = a_n - b_n\sqrt{5}$, $a_n = \dfrac{(1+\sqrt{5})^n + (1-\sqrt{5})^n}{2}$, $b_n = \dfrac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{2\sqrt{5}}$, deci $\frac{a_n}{b_n} = \sqrt{5}\Big(\dfrac{(1+\sqrt{5})^n + (1-\sqrt{5})^n}{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}\Big)$. Dând factor comun forțat $(1+\sqrt{5})$ și simplificând, se obține prin trecere la limită valoaea $\sqrt{5}$.

214. $0 < x_n = \dfrac{\sqrt{1\cdot 3}\cdot\sqrt{3\cdot 5}\cdot\ldots\cdot\sqrt{(2n-3)\cdot(2n-1)}\cdot\sqrt{2n-1}}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n}$ Folosind inegalitatea mediilor, avem că numărătorul este mai mic decât $\dfrac{1+3}{2}\cdot\dfrac{3+5}{2}\cdot\dfrac{2n-3+2n-1}{2}\cdot\sqrt{2n-1}$. Deci $x_n < \dfrac{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n-2)\cdot\sqrt{2n-1}}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n} = \dfrac{\sqrt{2n-1}}{2n} \to 0$, de unde folosind criteriul cleștelui rezultă că $x_n \to 0$.

215. Avem $x_n \geq 1$ și $x_{n+1} > x_n$. Cum șirul e crescător, acesta are o limită ℓ. Presupunând că $l \in \mathbb{R}$, din relația de recurență rezultă $l = l + l^2$, adică $l = 0$, ceea ce reprezintă o contradicție, căci $x_n \geq 1$, $\forall n$. Rezultă deci că $l = \infty$. Folosind $\frac{1}{1+x_k} = \frac{x_k}{x_k \cdot (x_k+1)} = \frac{x_k}{x_{k+1}} = \frac{x_k^2}{x_k \cdot x_{k+1}} = \frac{x_{k+1}-x_k}{x_k \cdot x_{k+1}} = \frac{1}{x_k} - \frac{1}{x_{k+1}}$ avem o sumă telescopică și $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{1+x_k} = \frac{1}{x_1} - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{x_{n+1}} = \frac{1}{a}$.

216. Avem $\frac{a_{n+1}}{(n+1)\cdot 2^{n+1}} = \frac{a_n}{n \cdot 2^n} + 1$. Fie $b_n = \frac{a_n}{n\cdot 2^n}$, cu $b_1 = 1$. Atunci $b_{n+1} = b_n + 1$, de unde $b_n = n$, deci $a_n = n^2 \cdot 2^n$.

217. $a_n = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = f\left(\frac{1}{n}\right), \forall n \in \mathbb{N}^*$, unde $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(1+x) + \frac{1}{1+x}$, $x \geq 0$. Cum $f'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{x}{(1+x)^2} \geq 0, \forall x \geq 0$, avem că f este crescătoare. Așadar șirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este monoton descrescător, mărginit inferior de $f(0) = 1$, mărginit superior de $f(1)$ și convergent.

218. Se observă că $x_n = \frac{1}{n!}$, $n \in \mathbb{N}^*$, verifică relaţia de recurenţă, folosind binomul lui Newton. Deoarece avem valoarea iniţială $x_1 = \frac{1}{1!}$, acesta este unicul şir care satisface condiţiile problemei.

219. Fie $n \geq 2$. Scriem $a_n = \sqrt{n+2} - 2\sqrt{n} + \sqrt{n-2} = \frac{(\sqrt{n+2}+\sqrt{n-2})^2 - 4n}{\sqrt{n+2}+2\sqrt{n}+\sqrt{n-2}}$

$$= \frac{2\sqrt{n^2-4} - 2n}{\sqrt{n+2}+2\sqrt{n}+\sqrt{n-2}} = \frac{-8}{(\sqrt{n+2}+2\sqrt{n}+\sqrt{n-2})(\sqrt{n^2-4}+n)}.$$

Obţinem $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, deci şirul $(a_n)_{n\geq 2}$ este convergent. Pentru orice $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$, are loc inegalitatea $a_n < \frac{-8}{(\sqrt{n+3}+2\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})(\sqrt{(n+1)^2-4}+n+1)}$, aşadar şirul $(a_n)_{n\geq 2}$ este strict crescător.

Calculăm limitele $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot a_n = -8 \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{(\sqrt{n+2}+2\sqrt{n}+\sqrt{n-2})\left(\sqrt{1-\frac{4}{n^2}}+1\right)} = 0$;

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\cdot n \cdot a_n = -8 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}}+2+\sqrt{1-\frac{2}{n}}\right)\left(\sqrt{1-\frac{4}{n^2}}+1\right)} = -1\,.$$

220. Relaţia dată se mai scrie $2\sqrt{a_{n+1}} = 1 - \sqrt{a_n}$ şi cu substituţia $b_n = \sqrt{a_n} - \frac{1}{3}$ ea devine $2b_{n+1} = -b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ şi $b_0 = -\frac{1}{3}$. Soluţia acestei recurenţe este $b_n = -\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Deci $a_n = \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Astfel rezultă $a_n \to \frac{1}{9}$. Şirul are limită finită, deci este mărginit şi convergent. Şirul este oscilant în jurul valorii $\frac{1}{9}$, deci nu este monoton.

221. $a_2 = 1$ şi inductiv rezultă $a_n > 1, \forall n > 2$. Apoi $a_{n+1} - a_n = \dfrac{1}{n} + a_n(a_n - 1) > 0$, astfel şirul este strict crescător, deci monoton şi are limita $l > 1$. Dacă şirul ar fi mărginit atunci ar fi şi convergent (l finit). Trecând la limită în relaţia dată obţinem $l \in \{0, 1\}$, ceea ce este absurd. Deci şirul nu este nici mărginit nici convergent.

222. Inductiv se obţine că $a_n \notin \mathbb{Q}$, $\forall n \in \mathbb{N}$; Apoi $a_{n+4} = \dfrac{2}{2 - a_{n+3}} = \dfrac{2 - a_{n+2}}{1 - a_{n+2}} = 2 - \dfrac{2}{a_{n+1}} = a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, deci şirul este periodic; Cum $a_n \in \{a_0, a_1, a_2, a_3\}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, sirul este mărginit, iar din faptul că $a_1 = \dfrac{2}{2 - a_0} \neq a_0$, $\forall a_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, rezultă că şirul este periodic neconstant, deci nu are limită, deci nu este convergent.

223. Cum $a_1 = 1 > \dfrac{1}{2} = a_2$, şirul nu este strict crescător. Folosind inegalitatea $n! \leq n^{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, rezultă că $0 \leq a_n \leq \dfrac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, de unde se obţine că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

224. Întrucât $a_0 < a_1$ şi $a_3 < a_2$, şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nu este monoton. Se poate arăta prin inducţie matematică faptul că $3^n < n!$, oricare ar fi $n \geq 7$. De aici rezultă că $a_n < (\frac{2}{3})^n$, oricare ar fi $n \geq 7$. Cum $a_n > 0$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, şi $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^n = 0$, teorema cleştelui implică $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

225. Din definiţie, este evident că $x_n > 0$, $\forall n \geq 1$.

<u>Monotonia</u>: Din relaţia de recurenţă, avem pentru orice $n \geq 2$, $x_n^2 = a + x_{n-1}$, deci $a = x_n^2 - x_{n-1} = x_{n-1}^2 - x_{n-2}$, de unde rezultă că $(x_n + x_{n-1})(x_n - x_{n-1}) = x_{n-1} - x_{n-2}$. Cum $(x_n + x_{n-1}) > 0$, rezultă că $\operatorname{sgn}(x_n - x_{n-1}) = \operatorname{sgn}(x_{n-1} - x_{n-2}) = \ldots = \operatorname{sgn}(x_2 - x_1)$. Dar $x_2 - x_1 = \sqrt{a + \sqrt{a}} - \sqrt{a} = \dfrac{a + \sqrt{a} - a}{\sqrt{a + \sqrt{a}} + \sqrt{a}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a + \sqrt{a}} + \sqrt{a}} > 0$. Deci şirul (x_n) este strict crescător.

<u>Mărginirea</u>: Din faptul că $\{x_n\}$ este strict crescător, deducem $x_n^2 = a + x_{n-1} < a + x_n$, deci $x_n^2 - x_n - a < 0$. Rădăcinile polinomului $x^2 - x - a$ sunt $\alpha = \dfrac{1 - \sqrt{1 + 4a}}{2} < 0$ şi $\beta = \dfrac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2} > 0$. Atunci $x^2 - x - a < 0$ pentru $x \in \left(\dfrac{1 - \sqrt{1 + 4a}}{2}, \dfrac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}\right)$. Cum $x_n > 0$, $\forall n \geq 1$, pentru ca $x_n^2 - x_n - a$ să fie strict negativ, trebuie să avem $x_n \in \left(0, \dfrac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}\right)$. Aşadar şirul (x_n) este mărginit şi, deci, convergent. Din cele de mai sus rezultă că răspunsurile corecte sunt $\boxed{\text{B}}$, $\boxed{\text{D}}$.

226. Pentru fiecare $k \in \{1, ..., n\}$, avem $a_{2n+1-k} = -\sqrt{p + k - \sqrt{2p + 2k - 1}}$ şi $(a_k + a_{2n+1-k})^2 = 2(p + k) - 2\sqrt{(p + k - 1)^2} = 2$. Cum $|a_k| > |a_{2n+1-k}|$, avem

$a_k+a_{2n+1-k} = \sqrt{2}$, iar $a_k a_{2n+1-k} = 1-p-k$. Deducem că $A = \Big(\dfrac{a_1+a_2+...+a_{2n}}{2n}\Big)^{2n} = \Big(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Big)^{2n} = \dfrac{1}{2^n}$ şi $G = \Big(-1\Big)^n p\Big(p+1\Big)...\Big(p+n-1\Big)$. Aşadar, **a)** dacă n este par, atunci $A < G$, sau **b)** dacă n este impar, atunci $A > 0 > G$.

227. Metoda inducţiei matematice ne permite să afirmăm că $n-1 \le x_n \le n$, $\forall n \ge 1$. $(*)$ Într-adevăr, pentru $n = 1$, afirmaţia $(*)$ este adevărată. Presupunând că afirmaţia $(*)$ este adevărată pentru numărul natural $k \ge 1$, adică avem $k-1 \le x_k \le k$, atunci, pe de o parte $x_{k+1} = 1+\dfrac{k^2}{1+x_k} \ge 1+\dfrac{k^2}{1+k} \ge 1+\dfrac{k^2-1}{1+k} = 1+k-1 = k$, iar, pe altă parte, $x_{k+1} = 1+\dfrac{k^2}{1+x_k} \le 1+\dfrac{k^2}{1+k-1} = 1+k$, ceea ce ne artă că afirmaţia $(*)$ este adevărată pentru $k+1$. Din $(*)$ urmează imediat că $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{n} = 1$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} \Big(1-\dfrac{x_n}{n}\Big)^n = 0$.

228. Fie $\varepsilon > 0$. Din $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1-\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^2}{8}}{x^2} = 0 \Rightarrow$ există un număr real $\delta > 0$ astfel încât pentru orice $x \in \Big(0,\delta\Big)$, avem $\left|\dfrac{\sqrt{1+x}-1-\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^2}{8}}{x^2}\right| < \dfrac{\varepsilon}{p^2}$, sau echivalent $\left|\sqrt{1+x}-1-\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^2}{8}\right| < \dfrac{\varepsilon}{p^2}x^2$. Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n} = 0$, deducem că există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât $\dfrac{1}{n} < \Big(\dfrac{\delta}{p}\Big)^2$, $\forall n \ge n_0$. Urmează că, pentru orice $k \in \{1,...,n\}$, avem $0 < p\dfrac{\sqrt{k^3}}{n^2} \le p\dfrac{\sqrt{n^3}}{n^2} = p\sqrt{\dfrac{1}{n}} < p\dfrac{\delta}{p} = \delta$ şi atunci $\left|\sqrt{1+p\dfrac{\sqrt{k^3}}{n^2}}-1-\dfrac{p}{2}\dfrac{\sqrt{k^3}}{n^2}+\dfrac{1}{8}p^2\dfrac{k^3}{n^4}\right| < \dfrac{\varepsilon}{p^2}p^2\dfrac{k^3}{n^4} \le \dfrac{\varepsilon}{n}$, $\forall k \in \{1,...,n\} \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{n}\left|\sqrt{1+p\dfrac{\sqrt{k^3}}{n^2}}-1-\dfrac{p}{2}\dfrac{\sqrt{k^3}}{n^2}+\dfrac{1}{8}p^2\dfrac{k^3}{n^4}\right| < \varepsilon$, $\forall n \ge n_0$. Din $\left|\sum\limits_{k=1}^{n}\Big(\sqrt{1+p\dfrac{\sqrt{k^3}}{n^2}}-1-\dfrac{p}{2}\dfrac{\sqrt{k^3}}{n^2}+\dfrac{1}{8}p^2\dfrac{k^3}{n^4}\Big)\right| \le \sum\limits_{k=1}^{n}\left|\sqrt{1+p\dfrac{\sqrt{k^3}}{n^2}}-1-\dfrac{p}{2}\dfrac{\sqrt{k^3}}{n^2}+\dfrac{1}{8}p^2\dfrac{k^3}{n^4}\right|$ și $\sum\limits_{k=1}^{n}\Big(\sqrt{1+p\dfrac{\sqrt{k^3}}{n^2}}-1-\dfrac{p}{2}\dfrac{\sqrt{k^3}}{n^2}+\dfrac{1}{8}p^2\dfrac{k^3}{n^4}\Big) = \sum\limits_{k=1}^{n}\Big(\sqrt{1+p\dfrac{\sqrt{k^3}}{n^2}}-\dfrac{p}{2}\dfrac{\sqrt{k^3}}{n^2}\Big)-n+\dfrac{1}{8}\dfrac{p^2}{n^4}\Big(\dfrac{n\Big(n+1\Big)}{2}\Big)^2$ deducem că $\left|\sum\limits_{k=1}^{n}\Big(\sqrt{1+p\dfrac{\sqrt{k^3}}{n^2}}-\dfrac{p}{2}\dfrac{\sqrt{k^3}}{n^2}\Big)-n+\dfrac{1}{8}\dfrac{p^2}{n^4}\Big(\dfrac{n\Big(n+1\Big)}{2}\Big)^2\right| < \varepsilon$, $\forall n \ge n_0$. Aşadar, $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\Big(\sqrt{1+p\dfrac{\sqrt{k^3}}{n^2}}-\dfrac{p}{2}\dfrac{\sqrt{k^3}}{n^2}\Big)-n+\dfrac{1}{8}\dfrac{p^2}{n^4}\Big(\dfrac{n\Big(n+1\Big)}{2}\Big)^2 = 0$. Cum $\lim\limits_{n\to\infty}\Big(\dfrac{1}{8}\dfrac{p^2}{n^4}\Big(\dfrac{n\Big(n+1\Big)}{2}\Big)^2\Big) = \dfrac{p^2}{32}$ obţinem că $\lim\limits_{n\to\infty}\Big\{\sum\limits_{k=1}^{n}\Big(\sqrt{1+p\dfrac{\sqrt{k^3}}{n^2}}-\dfrac{p}{2}\dfrac{\sqrt{k^3}}{n^2}\Big)-n\Big\} = -\dfrac{p^2}{32}$.

229. Aplicăm teorema lui Cèsaro-Stolz; obţinem $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^3}\sum\limits_{k=1}^{n}\Big(k+\big(k+1\big)^x\Big)\Big(k+\big(k+1\big)^{-x}\Big)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\Big(n+1+\big(n+2\big)^x\Big)\Big(n+1+\big(n+2\big)^{-x}\Big)}{3n^2+3n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\big(n+1\big)^2+1}{3n^2+3n+1}+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n}\cdot\dfrac{\big(n+2\big)^x+\big(n+2\big)^{-x}}{3n+3+\dfrac{1}{n}}$. Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\big(n+1\big)^2+1}{3n^2+3n+1}=\dfrac{1}{3}$,

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n}=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\big(n+2\big)^x+\big(n+2\big)^{-x}}{3n+3+\dfrac{1}{n}}=\begin{cases}0, & \text{dacă } \big|x\big|<1\\ \dfrac{1}{3}, & \text{dacă } \big|x\big|=1\\ +\infty, & \text{dacă } \big|x\big|>1,\end{cases}$ deducem că

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}\Big(k+\big(k+1\big)^x\Big)\Big(k+\big(k+1\big)^{-x}\Big)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}, & \text{dacă } \big|x\big|<1\\ \dfrac{2}{3}, & \text{dacă } \big|x\big|=1\\ +\infty, & \text{dacă } \big|x\big|>1.\end{cases}$$

230. Fie $a>0$ şi $x_n=\dfrac{a^n n!}{n^n}$, $n\in\mathbb{N}^*$. Avem $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\dfrac{a^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\dfrac{n^n}{a^n n!}=\dfrac{a}{(1+\frac{1}{n})^n}$ și $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\to\dfrac{a}{\mathrm{e}}$. Cum $(1+\frac{1}{n})^n$ converge strict crescător la e, avem că: **1)** Dacă $a<\mathrm{e}$, atunci şirul (x_n) este strict descrescător de la un rang încolo, iar din criteriul raportului rezultă că limita lui este 0. **2)** Dacă $a>\mathrm{e}$, atunci şirul (x_n) este strict crescător cu limita $+\infty$.

231. $e^{n+1}x_{n+1}-e^n x_n<0, \forall n\in\mathbb{N}^*\Rightarrow\dfrac{x_{n+1}}{x_n}<\dfrac{e^n}{e^{n+1}}=\dfrac{1}{e}<1, \forall n\in\mathbb{N}^*$ Aşadar şirul este descrescător, deci este mărginit superior de x_1. Dar cum şirul este cu termeni pozitivi, rezultă că $x_n\in[0,x_1], \forall n\in\mathbb{N}^*$, deci $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este mărginit. Din monotonie şi mărginire deducem convergenţa lui $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, deci orice subşir al său converge.

232. Aplicăm lema Stolz-Cèsaro cu $a_n=1^4+2^4+\cdots+n^4$ și $b_n=n^5$, care este cu termeni pozitivi, strict crescător şi nemărginit superior: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^4}{(n+1)^5-n^5}$ $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^4+\binom{4}{1}n^3+\cdots+1}{n^5+\binom{5}{1}n^4+\cdots+1-n^5}=\dfrac{1}{5}$. Aşadar $\exists\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}\in\mathbb{R}$ şi atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=\dfrac{1}{5}$.

233. $\dfrac{1}{n^2+n}\le\dfrac{1}{n^2+k}\le\dfrac{1}{n^2+1}, \forall k\in\{1,2,\ldots,n\}\Rightarrow\dfrac{n}{n^2+n}\le a_n\le\dfrac{n}{n^2+1}\Rightarrow$ $\dfrac{n^2}{n^2+n}\le na_n\le\dfrac{n^2}{n^2+1}$ Din criteriul cleştelui rezultă că: $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=1$.

234. $x_{n+1} - x_n = e^{-x_n^2} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$ şirul este strict crescător Presupunem că $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este mărginit superior. În acest caz șirul ar fi convergent și i-am putea afla limita, pe care o vom nota cu $x \in \mathbb{R}$, trecând la limită în relația de recurență: $x = x + e^{-x^2} \Rightarrow e^{-x^2} = 0$, contradicţie cu $x \in \mathbb{R}$ Aşadar, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{n} \overset{\text{Cèsaro-Stolz}}{=} \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{n+1-n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{e^{-x_n^2}}{1} = 0$.

235. $\lim\limits_{n\to\infty} n^k c^n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^k}{(\frac{1}{c})^n}$. Trecem la limite de funcţii: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^k}{\left(\frac{1}{c}\right)^n} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^k}{\left(\frac{1}{c}\right)^x}$

Dacă aplicăm regula lui L'Hopital de k ori, obţinem: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^k}{\left(\frac{1}{c}\right)^x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{k!}{\left(\ln\frac{1}{c}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{c}\right)^x} = 0$, deoarece $\frac{1}{c} > 1$.

236. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - en\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(n\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e\right)\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e}{\frac{1}{n}}$ Putem trece la limite de funcții: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e}{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x - e}{\frac{1}{x}} \overset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\left(-\frac{1}{x+1} + \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)}{-\frac{1}{x^2}}$ Putem împărți limita în 2 și vom aplica din nou regula lui L'Hôpital în cea de-a doua: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\left(-\frac{1}{x+1} + \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \cdot \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x(x+1)}}{\frac{2}{x^3}}$ Prima limită este egală cu e şi avem că: $\lim\limits_{n\to\infty} \left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - en\right) = \frac{e}{2} \cdot \lim\limits_{x\to\infty} [x^3 \cdot (\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x(x+1)})] = \frac{e}{2} \cdot \lim\limits_{x\to\infty} \frac{-x^2}{x^2+2x+1} = -\frac{e}{2}$

237. $\lim\limits_{n\to\infty} (e^{h_{n+1}} - e^{h_n}) = \lim\limits_{n\to\infty} e^{h_n} \cdot \frac{(e^{\frac{1}{n+1}} - 1)}{\frac{1}{n+1}} \cdot \frac{1}{n+1}$ Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, vom folosi cunoscuta limită: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ Aşadar, avem că: $\lim\limits_{n\to\infty} e^{h_n} \cdot \frac{(e^{\frac{1}{n+1}} - 1)}{\frac{1}{n+1}} \cdot \frac{1}{n+1} = 1 \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \frac{e^{h_n}}{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{e^{h_n}}{n} \cdot \frac{n}{n+1}$ Împărțim limita în două și obținem: $\lim\limits_{n\to\infty} (e^{h_{n+1}} - e^{h_n}) =$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e^{h_n}}{e^{\ln n}}=1\cdot\lim\limits_{n\to\infty}e^{h_n-\ln n}=e^{\gamma}$.

238. Termenul general x_n este, de fapt, $x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k(k+1)}=\dfrac{2}{n+1}$, adică $x_n=\dfrac{2n}{n+1}$.

Înlocuind în limita $\boxed{\text{A}}$ cu termenul general, avem $\dfrac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n}{n+1}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n}{2(n+1)}\right)^n=$ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{-1}{n+1}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{-1}{n+1}\right)^{n+1}\right]^{-1}=e^{-1}=\dfrac{1}{e}$, deci varianta $\boxed{\text{A}}$ este corectă.

Cum $x_n=\dfrac{2n}{n+1}$, avem $y_n=\dfrac{[2024n]}{n+1}$. Din inegalitatea $2024n-1<\dfrac{[2024n]}{n+1}\le 2024n$ și aplicând Criteriul cleștelui, rezultă imediat că $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{[2024n]}{n+1}=2024$.

Prelucrând numărătorul, $\sum\limits_{k=1}^{n}\log_{\frac{2}{3}}\left(\dfrac{k^2+4k+3}{(k+2)^2}\right)=\sum\limits_{k=1}^{n}\log_{\frac{2}{3}}\left(\dfrac{(k+1)(k+3)}{(k+2)^2}\right)=$

$$=\log_{\frac{2}{3}}\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{(k+1)(k+3)}{(k+2)^2}\right)=\log_{\frac{2}{3}}\left(\frac{\prod\limits_{k=1}^{n}(k+1)\cdot\prod\limits_{k=1}^{n}(k+3)}{\prod\limits_{k=1}^{n}(k+2)^2}\right)=\log_{\frac{2}{3}}\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{n+3}{n+2}\right).$$

Cum $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+3}{n+2}=1$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\log_{\frac{2}{3}}\left(\dfrac{k^2+4k+3}{(k+2)^2}\right)=1$, deci

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}\log_{\frac{2}{3}}\left(\dfrac{k^2+4k+3}{(k+2)^2}\right)}{y_n}=\dfrac{1}{2024}$, de unde rezultă și variantele $\boxed{\text{C}}$ și $\boxed{\text{D}}$.

(co-autor: prof. Simona Simonca, Colegiul Național "Mihai Viteazul" Turda)

239. Suma este, de fapt, $\sum\limits_{k=0}^{n}\left(\dfrac{1}{k+1}-\dfrac{1}{k+2}\right)$, deci limita devine $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n+2}\right)^n=e^{-1}$.

240. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[4]{1+2x}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{2}}-1}{(1+2x)^{\frac{1}{4}}-1}$. Folosim $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^r-1}{x}=r$ și aducem la forma: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{2}}-1}{x}\cdot\dfrac{2x}{(1+2x)^{\frac{1}{4}}-1}\cdot\dfrac{x}{2x}=1$.

241. $L_n-L_{n+1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x\cos 2x\ldots\cos nx-\cos x\cos 2x\ldots\cos(n+1)x}{x^2}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\cos 2x\ldots\cos nx(\cos(n+1)x-1)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos((n+1)x)-1}{x^2}\overset{\text{l'Hospital}}{=}-\frac{(n+1)^2}{2}.$$

Deci, $L_{n+1}-L_n=\dfrac{(n+1)^2}{2}$, $L_2-L_1=\dfrac{2^2}{2}$, $L_3-L_2=\dfrac{3^2}{2},\ldots,L_n-L_{n-1}=\dfrac{n^2}{2}$, $L_n-L_1=$ $\dfrac{2^2}{2}+\dfrac{3^2}{2}+..+\dfrac{n^2}{2}\Rightarrow L_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{2^2}{2}+\dfrac{3^2}{2}+..+\dfrac{n^2}{2}=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{12}$.

242. Logaritmăm inegalitatea: $2^{f(x)}\le x<2^{f(x)+1}$, deci $\log_2\left(2^{f(x)}\right)\le\log_2 x<$ $\log_2\left(2^{f(x)+1}\right)$; $f(x)\le\log_2 x<f(x)+1$ De aici, obținem:$\log_2 x-1<f(x)\le\log_2 x$

Cum $f(x)$ are valori în $\mathbb{N}$, rezultă că: $f(x) = [\log_2 x]$ Funcția $f(x)$ este definită astfel: $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \in [2^0, 2^1), \\ 1, & \text{dacă } x \in [2^1, 2^2), \\ 2, & \text{dacă } x \in [2^2, 2^3), \\ \vdots \\ n, & \text{dacă } x \in [2^n, 2^{n+1}). \end{cases}$ Prin urmare, funcția $f(x)$ are limită în intervalul $(1, \infty)$ exceptând punctele de forma 2^k, adică:$f(x)$ are limită în $(1, \infty) - \{2^k \mid k \in \mathbb{N}\}$.

243. Pentru $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = -f(x)$, deci f este impară. Considerăm inegalitatea $f(x) < 1 \iff \sqrt{x^2 + x + 1} < 1 + \sqrt{x^2 - x + 1} \iff 2x - 1 < 2\sqrt{x^2 - x + 1}$, evident pentru $x \in [0, \frac{1}{2}]$. Pentru $x > \frac{1}{2}$, inegalitatea $4x^2 - 4x + 1 < 4x^2 - 4x + 4$ este adevărată, deci $f(x) < 1$ pentru orice $x > 0$ și pentru că f impară, deducem că $-1 < f(x) < 1$.

244. Avem nedeterminarea $\frac{0}{0} \Rightarrow \overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim\limits_{x \to 0} \left[\ln \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{3x} + \ldots + \mathrm{e}^{nx} - \ln n \right]' =$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x + 2\mathrm{e}^{2x} + \ldots + n\mathrm{e}^{nx}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{2x} + \ldots + \mathrm{e}^x} = \dfrac{n+1}{2} = \dfrac{5}{2} \Rightarrow n = 4$

245. Înlocuim $\operatorname{tg} x$ cu $\dfrac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x(1 - \cos x)}{\cos x \cdot \sin^3 x} \Rightarrow \ell = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{\cos x(1 + \cos x)} = \dfrac{1}{2}$.

246. Calculăm limita $\lim\limits_{x \to \infty} x\Big(x \sin \dfrac{1}{x} - 1\Big) \overset{t = \frac{1}{x}}{=} \lim\limits_{t \searrow 0} \dfrac{\sin t - t}{t^2} = \lim\limits_{t \searrow 0} \dfrac{\cos t - 1}{2t} = \lim\limits_{t \searrow 0} \dfrac{-\sin t}{2} = 0$, unde am aplicat regula lui l'Hospital de două ori. Deoarece funcția sin este mărginită, valoarea limitei este 0.

247. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x) + \sin(2x) + \cdots + \sin(nx)}{\ln(x+1) + \ln(2x+1) + \cdots + \ln(nx+1)} = \lim\limits_{x \to 0} \Big(\dfrac{\sin(x)}{x} + 2\dfrac{\sin(2x)}{2x} + \cdots + n\dfrac{\sin(nx)}{nx} \Big) \cdot \dfrac{1}{\Big(\dfrac{\ln(x+1)}{x} + 2\dfrac{\ln(2x+1)}{2x} + \cdots + \dfrac{\ln(nx+1)}{nx}\Big)}$. Reamintim limitele remarcabile $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ și $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1$ și avem, deci $\lim\limits_{x \to 0} (1 + 2 + 3 + \cdots + n) \cdot \dfrac{1}{1 + 2 + 3 + \cdots + n} = 1$.

248. $\lim\limits_{x \searrow 0} x^\alpha f(x) = \begin{cases} \infty, & \alpha < 0 \\ 1, & \alpha = 0 \\ 0, & \alpha > 0 \end{cases}$ şi $\lim\limits_{x \to \infty} x^\beta f(x) = \begin{cases} 0, & \beta < 2 \\ \frac{\pi^2}{4}, & \beta = 2 \\ \infty, & \beta > 2 \end{cases} \Rightarrow A = \{0\}$ şi $B = \{2\}$.

249. $\lim\limits_{x\nearrow\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^p f(x)=\begin{cases}\infty, & p<1\\ 1, & p=1\\ 0, & p>1\end{cases}\Rightarrow M=\{1\}.$

250. Ținem cont de relaţia $\operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{1+x+x^2}\right)=\operatorname{arctg}(x+1)-\operatorname{arctg}x$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$. Aşadar, $\sum\limits_{k=1}^{n}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{1+k+k^2}\right)=\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\operatorname{arctg}(k+1)-\operatorname{arctg}k\right)=\operatorname{arctg}(n+1)-\operatorname{arctg}1.$
Atunci valoarea limitei este $l=\lim\limits_{n\to\infty}\operatorname{arctg}(n+1)-\operatorname{arctg}1=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{4}.$

251. $\lim\limits_{x\to0}\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)^{\frac{1}{\sin x}}=\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}\right]^{\frac{1}{\sin x}}=\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{\sin x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\cos x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}{\cos x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\sin x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}\right]^{\frac{1}{\sin x}}=$
$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin x+\cos x}{\cos x-\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}=\lim\limits_{x\to0}\left(1+2\cdot\dfrac{\sin x}{\cos x-\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{2\sin x}{\cos x-\sin x}\cdot\frac{1}{\sin x}}=$
$=e^2$

252. $\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\left(\dfrac{\frac{\pi}{4}-\arctan\left(\frac{x}{x+1}\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{4}-\arctan\frac{x}{x+1}\right)}\cdot\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\arctan\dfrac{x}{x+1}\right)\right)$. Folosind proprietatea: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{\pi}{4}-\arctan\left(\frac{x}{x+1}\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{4}-\arctan\frac{x}{x+1}\right)}=1$. Deci, limita initiala devine $\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{x+1}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\dfrac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\frac{x}{x+1}}{1+\tan\frac{\pi}{4}\cdot\tan\frac{x}{x+1}}=\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\dfrac{1-\tan\frac{x}{x+1}}{1+\tan\frac{x}{x+1}}=\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\dfrac{1-\frac{x}{x+1}}{1+\frac{x}{x+1}}$
$=\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\dfrac{(x+1)-x}{(x+1)+x}=\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\dfrac{1}{2x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{2x+1}=\dfrac{1}{2}.$

253. $\lim\limits_{x\to0}\left(1+\ln(1+x)+\ln(2+x)+\ldots+\ln(1+nx)\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{\ln(1+x)+\ln(2+x)+\ldots+\ln(1+nx)}{x}}$
$=e^{\lim_{x\to0}\left(\frac{\ln(1+x)}{x}+\frac{\ln(2+x)}{x}+\ldots+\frac{\ln(1+nx)}{x}\right)}=e^{1+2+\ldots+n}=e^{\frac{n(n+1)}{2}}$. Deci limita finala devine
$\lim\limits_{n\to\infty}\left[e^{\frac{n\cdot(n+1)}{2}}\right]^{\frac{2}{n^2}}$
$=e.$

254. Descompunem în produs de limite $L=\lim\limits_{x\searrow0}\dfrac{x-\ln(x+1)}{x^2}\cdot\lim\limits_{x\searrow0}\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{\ln(x+1)}}$
$=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}.$

255. Cu regula lui l'Hopital deducem $L=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2+\ln(1-x^3)}{x^4}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2-3x-2x^3}{4x^2(1-x^3)}=$
$+\infty$, deci răspunsurile corecte sunt $\boxed{\text{B}}$ și $\boxed{\text{C}}$.

256. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\operatorname{tg}(\sqrt{5-x}-2)}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\operatorname{tg}(\sqrt{5-x}-2)}{\sqrt{5-x}-2}\cdot\dfrac{\sqrt{5-x}-2}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\operatorname{tg}(\sqrt{5-x}-2)}{\sqrt{5-x}-2}\cdot$

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5-x}-2}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5-x}-2}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{(\sqrt{5-x}+2)\cdot(x-1)\cdot(x+1)}=$
$=-\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{(\sqrt{5-x}+2)\cdot(x+1)}=-\dfrac{1}{8}$.

257. Fie $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ funcţia definită prin $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}$. Din enunţul problemei rezultă că dreapta de ecuaţie $y=-ax-b+2$ este asimptota oblică spre $-\infty$ a funcţiei f. Pe de altă parte, egalităţile $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}-\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}=-1$ şi $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)+x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x+1}+x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}-x}=$
$=-\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1+\dfrac{1}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+1}=-\dfrac{1}{2}$ implică faptul că dreapta de ecuaţie $y=-x-\dfrac{1}{2}$ este asimptota oblică spre $-\infty$ a funcţiei f. Întrucât funcţia f are o singură asimptotă oblică spre $-\infty$, rezultă că $a=1$ şi $-b+2=-\dfrac{1}{2}$, deci $b=\dfrac{5}{2}$.

Metoda 2:

Notăm $y=-x$, astfel limita devine: $\lim\limits_{y\to\infty}\left(\sqrt{y^2-y+1}-ay+b\right)$ Pentru ca limita să nu fie infinită, trebuie ca $a=1$. Astfel, limita devine: $\lim\limits_{y\to\infty}\left(\sqrt{y^2-y+1}-y+b\right)$;
$\lim\limits_{y\to\infty}\dfrac{y^2-y+1-y^2}{\sqrt{y^2-y+1}+y}+b=\lim\limits_{y\to\infty}\dfrac{-y}{\sqrt{y^2-y+1}+y}+b=\lim\limits_{y\to\infty}\dfrac{-y}{y\left(\sqrt{1-\frac{1}{y}+\frac{1}{y^2}}+1\right)}+b=$
$-\dfrac{1}{2}+b$; Avem: $\dfrac{-1}{2}+b=2$. Rezolvând, obținem $b=\dfrac{5}{2}$.

258. Pentru fiecare $n\in\mathbb{N}^*$, avem $\rho(x)=\begin{cases}x-n, & \text{dacă } x\in[n,n+\frac{1}{2})\\ n+1-x, & \text{dacă } x\in[n+\frac{1}{2},n+1)\end{cases}$ și atunci $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}+x-n, & \text{dacă } x\in[n,n+\frac{1}{2})\\ \dfrac{1}{x}-x+n+1, & \text{dacă } x\in[n+\frac{1}{2},n+1).\end{cases}$ Funcţia f este crescătoare pe $[n,n+\dfrac{1}{2})$, şi atunci $\dfrac{1}{n}=f(n)\le fx)\le f\left(n+\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{2n+1}$, $\forall x\in[n,n+\dfrac{1}{2})$. Pe de altă parte, funcţia f este strict descrescătoare pe $[n+\dfrac{1}{2},n+1)$, şi atunci $\dfrac{1}{n+1}=f(n+1)\le f(x)\le f(n+\dfrac{1}{2})=\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{2n+1}$, $\forall x\in[n+\dfrac{1}{2},n+1)$. Urmează că $\inf\{f(x):x\in[n,n+1)\}=f(n+1)=\dfrac{1}{n+1}$ şi $\sup\{f(x):\ x\in[n,n+1)\}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{2n+1}$.
Aşadar $\inf\{\sup\{f(x):\ x\in[n,n+1)\}:\ n\in\mathbb{N}^*\}=\inf\left\{\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{2n+1}:\ n\in\mathbb{N}^*\right\}=\dfrac{1}{2}$.

259. $\sup\{\inf\left\{f(x):\ x\in[n,n+1)\right\}:\ n\in\mathbb{N}^*\}=\sup\left\{\dfrac{1}{n+1}:\ n\in\mathbb{N}^*\right\}=\dfrac{1}{2}$.

260. Avem $f'(x)=3kx^2-2(k+1)x+2-k$, $f'(1)=0$, deci $x=1$ este un punct critic.

Vom folosi derivata a doua: daca $f''(1) > 0$, atunci $x = 1$ este punct de minim local; daca $f''(1) < 0$, atunci $x = 1$ punct de maxim local. Avem $f''(x) = 6kx - 2(k+1)$, $f''(1) = 4k - 2 > 0$ pentru $k > 1/2$.

261. Avem $f'(x) = \begin{cases} 2x \cdot \sin ax + \left(x^2\right) \cdot a\cos ax, & x < -1, \\ -2x\sin ax - \left(x^2 - 1\right) a\cos ax, & -1 < x < 1, \\ 2x\sin ax + \left(x^2-1\right) a\cos ax, & x > 1. \end{cases}$ Derivabilitatea e de discutat doar în $x = \pm 1$, unde impunem condiția de egalitate a derivatelor laterale: $f'_s(\pm 1) = f'_d(\pm 1)$. Avem $f'_s(1) = -2\sin a = f'_d(1) = 2\sin a$ și $f'_s(-1) = -2\sin(-a) = 2\sin a = f'_d(-1) = 2\sin(-a) = -2\sin a$, de unde $\sin a = 0$, $a \in (0, 2\pi)$, deci $a = \pi$.

262. Definind $f(x) = a^x - x$, avem $f(x) \geq 1 = f(0)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, adică 0 este punct de minim global, de unde $f'(0) = 0$. Cum $\ln a - 1 = f'(0) = 0$, avem $a = e$.

263. $g(t) = \displaystyle\int_{t-1}^{t} f(x)dx = F(t) - F(t-1)$, unde F este o primitivă a lui f. Cum g este derivabilă, punctele sale de extrem local în $(1, 2)$ se află printre punctele critice. $g'(t) = 0 \iff F'(t) - F'(t-1) = 0 \iff f(t) - f(t-1) = 0$. Cum $t \in (1, 2)$, avem $f(t) = 2t^2 - 6t + 6$, $f(t-1) = t$, deci $f(t) = f(t) \iff 2t^2 - 7t + 6 = 0 \iff (2t-3)(t-2) = 0$. Singura soluție este $t = \frac{3}{2} \in (1, 2)$.

264. Explicitarea funcției: $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 3x + 2} & \text{dacă } x \in (0,1) \cup (2,3) \\ \sqrt{-x^2 + 3x - 2} & \text{dacă } x \in [1,2] \\ \dfrac{3}{2\pi\sqrt{2}} \sin(\pi x) & \text{dacă } x \leq 0 \cup x \geq 3 \end{cases}$

de unde se deduce ca $x = 1$ si $x = 2$ sunt puncte de întoarcere, fiindcă derivatele laterale în aceste puncte sunt infinite și diferite.

265. $f'(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$. Din tabelul de variație al funcției rezultă că 0 și 2 sunt puncte de extrem. Fie $u(x) = \dfrac{1}{x-1}$, derivata de ordin n a funcției $u(x)$ este $u^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n \cdot n!}{(x-1)^{n+1}}$ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} f^{(k)}(3) = 3 + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} u^{(k)}(3) = 3 + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{k+1}}$
$\displaystyle = 3 + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{k+1}} = 3 + \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) = 4.$

266. $f(x) = x(x^2 - 3) + 1$, $f(0) = f(\sqrt{3})$, deci f nu e injectivă. Cum f este continuă și $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, avem că f este surjectivă. Observăm că $f(-2)f(-1) < 0$, $f(0)f(1) < 0$, $f(1)f(2) < 0$, deci ecuația $f(x) = 0$ are 3 rădăcini reale cu părțile întregi -2, 0, 1, a căror sumă este -1.

267. Pentru $x \in (n, n+1)$, $n \in \mathbb{Z}$, avem $f(x) = n\cos\left(\dfrac{(2x-1)\pi}{2}\right)$ deci f este continuă pe $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$. Fie $n \in \mathbb{Z}$. Avem $f(n) = 0$, $\lim_{x\searrow n} f(x) = n\cdot\cos\left(\dfrac{2n-1\pi}{2}\right) = 0$, $\lim_{x\nearrow n} f(x) = (n-1)\cdot\cos\left(\dfrac{(2n-1)\pi}{2}\right) = 0$. Deci funcția este continuă pe $\mathbb{Z}$, așadar pe $\mathbb{R}$.

268. Avem $\lim_{x\searrow 0} x^a = \begin{cases} 0, & a>0 \\ 1, & a=0 \\ \infty, & a<0 \end{cases}$ deci $\lim_{x\searrow 0} x^a\ln(1+x) = \lim_{x\searrow 0} x^{a+1}\dfrac{\ln(1+x)}{x} = \begin{cases} 0, & a>-1 \\ 1, & a=-1 \\ \infty, & a<-1 \end{cases}$. Din $\lim_{x\searrow 0} e^{ax} = 1$ deducem că f_a este continuă $\Rightarrow a = -1$. Derivata lui f_{-1} în 0 la stânga este $\lim_{x\nearrow 0}\dfrac{e^{-x}-1}{x} = -1$ și la dreapta este $\lim_{x\searrow 0}\dfrac{\frac{\ln(x+1)}{x}-1}{x} = \lim_{x\searrow 0}\dfrac{\ln(x+1)-x}{x^2} = \lim_{x\searrow 0}\dfrac{\frac{1}{x+1}-1}{2x} = -\lim_{x\searrow 0}\dfrac{1}{2(x+1)} = -\dfrac{1}{2}$, deci nu există $a\in\mathbb{R}$ astfel încât f_a să fie derivabilă pe $\mathbb{R}$.

269. Se observă că $f'(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$ și $f''(x) = \dfrac{2}{(1-x)^3}$. Prin inducție, se poate demonstra că $f^{(n)}(x) = \dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}$. Prin urmare, $f^{(n)}(0) = n!$.

270. $\boxed{\text{A}}$ $a = 0$ şi $b\in\mathbb{R}$: f este continuă pe $(-\infty,0)$ şi pe $(0,\infty)$, iar $\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} x^4 = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} bx^3 = 0 = f(0)$. Deci, f este continuă pe $\mathbb{R}$.

$\boxed{\text{B}}$ Dacă $a = 1$ şi $b = -1$, atunci funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este definită prin $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^4+1, & x\in(-\infty,0], \\ -x^3, & x\in(0,\infty). \end{cases}$. f este strict descrescătoare pe $(-\infty,0]$, respectiv pe $(0,\infty)$; Fie $x_1\in(-\infty,0]$ şi $x_2\in(0,\infty)$; evident $x_1 < x_2$; atunci $f(x_1) = x_1^4+1 \geq 1 > 0 \geq f(x_2) = -x_2^3$. $\Longrightarrow f$ este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$.

$\boxed{\text{C}}$ $a = 1$ şi $b = -1$: $\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} x^4+1 = f(0) = 1 \neq \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} -x^3 = 0$. Deci, f este discontinuă în 0.

$\boxed{\text{D}}$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$ şi $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ oricare ar fi $b \in (-\infty, 0)$. Aşadar, pentru $a \in \mathbb{R}, b \in (-\infty, 0)$ avem $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) \neq \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

271. Egalităţile $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} |f(x)| = \lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} |f(x)| = 1 = |f(0)|$ implică continuitatea funcţiei $|f|$ în 0, iar egalităţile $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} f(x) = -1$ şi $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x) = 1$ arată că f nu are limită în 0. Din definiţia lui f rezultă că f nu are niciun zero în intervalul $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

272. Fie $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^4 - 10x^2 + 9$. Atunci $g'(x) = 4x(x^2 - 5)$. Rezultă că funcţia g este strict descrescătoare pe $(-\infty, -\sqrt{5}]$, strict crescătoare pe $[-\sqrt{5}, 0]$, strict descrescătoare pe $[0, \sqrt{5}]$ şi strict crescătoare pe $[\sqrt{5}, \infty)$. De asemenea, $\lim\limits_{n\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{n\to\infty} g(x) = \infty$, $g(-\sqrt{5}) = g(\sqrt{5}) = -16$ şi $g(0) = 9$. Rezultă că $A = [\sqrt{5}, \infty)$.

273. Avem că

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, 1) \\ x - 1, & x \in [1, 2) \\ x - 2, & x \in [2, 3) \\ x - 3, & x \in [3, 2\sqrt{3}], \end{cases}$$

deci punctele 1, 2, 3 sunt punctele de discontinuitate ale lui f, iar punctele 0, 1, 2, 3 sunt punctele de minim global ale lui f. De asemenea, $\int_0^{2\sqrt{3}} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 x\mathrm{d}x + \int_1^2 (x - 1)\mathrm{d}x + \int_2^3 (x-2)\mathrm{d}x + \int_3^{2\sqrt{3}} (x-3)\mathrm{d}x = 12 - 6\sqrt{3}$.

274. Avem $\lim\limits_{x\to0} \frac{f(x)f(2x)\dots f(nx)}{x^n} = \lim\limits_{x\to0} \frac{f(x)}{x} \lim\limits_{x\to0} \frac{f(2x)}{x} \dots \lim\limits_{x\to0} \frac{f(nx)}{x}$. Pentru fiecare limită (care e de forma $\frac{0}{0}$) aplicăm regula lui l'Hôpital. Deci $\lim\limits_{x\to0} \frac{f(x)f(2x)\dots f(nx)}{x^n} = \lim\limits_{x\to0} \frac{f'(x)}{1} \lim\limits_{x\to0} \frac{2f'(2x)}{1} \dots \lim\limits_{x\to0} \frac{nf'(nx)}{1} = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n = n!$. Deci singurul răspuns corect este $\boxed{\text{D}}$.

275. Dacă $g : \left(0, +\infty\right) \Rightarrow \mathbb{R}$ este funcţia definită prin $g\left(x\right) = \mathrm{e}^{-x} f(x)$, $\forall x \in \left(0, +\infty\right)$, atunci ecuaţia funcţională dată în enunţul problemei devine $\mathrm{e}^{xy}\mathrm{e}^{x+y} g\left(xy\right) = \mathrm{e}^{\left(x+1\right)y+x} g\left(x\right) + \mathrm{e}^{\left(x+1\right)y+x} g\left(y\right)$ sau echivalent $g\left(xy\right) = g\left(x\right) + g\left(y\right)$, $\forall x \in \left(0, +\infty\right)$. Aşadar g satisface ecuaţia funcţională a funcţiei logaritm, prin urmare $g\left(x\right) = \log_a x$, $\forall x \in \left(0, +\infty\right)$, unde $a \in \left(0, +\infty\right)$, $a \neq 1$. Atunci $\log_a x = \mathrm{e}^{-x} f(x)$, deci $f(x) = \mathrm{e}^x \log_a x = \frac{1}{\ln a} \mathrm{e}^x \ln x$, $\forall x \in \left(0, +\infty\right)$. Rezultă că f este derivabilă şi $f'\left(x\right) = \frac{1}{\ln a} \mathrm{e}^x \left(\ln x + \frac{1}{x}\right)$, $\forall x \in$

$\Big(0,+\infty\Big)$. Aşadar, există $c = \ln a \neq 0$ astfel încât $cxf'\Big(x\Big) = \mathrm{e}^x\Big(x\ln x + 1\Big)$, $\forall x \in \Big(0,+\infty\Big)$.

276. $\lim\limits_{x\searrow 0} f(x) = \lim\limits_{x\nearrow 0} f(x) = 0 = f(0)$, deci limita funcţiei există şi funcţia este continuă în punctul $x = 0$. Apoi $f'(0) = \lim\limits_{x\Rightarrow 0}\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\Rightarrow 0}(\ln|x| - 1) = -\infty$, deci funcţia are derivată, dar nu este derivabilă în punctul $x = 0$.

277. $f'(x) = nx^{n-1}(\ln x + \dfrac{1}{n})$,

$f''(x = n(n-1)x^{n-2}(\ln x + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n-1})$,

...

$f^{(n)}(x) = n![\ln x + (1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + ... + \dfrac{1}{n})]$ prin inducție sau cu formula lui Leibniz.

278. Funcţia f este derivabilă pe un interval deschis, $\mathbb{R} = (-\infty,+\infty)$, deci punctele sale de extrem se găsesc printre rădăcinile reale ale ecuaţiei $f'(x) = 0$, adică $4x(x^2 + a) = 0$. Pentru ca f să aibă exact două puncte de minim global este necesar ca această ecuaţie să aibă cel puţin două rădăcini distincte, ceea ce revine la faptul că $a \in (-\infty, 0)$. Fie $a \in (-\infty, 0)$. Atunci, ecuaţia $f'(x) = 0$ are de fapt trei rădăcini distincte: $x_1 = 0$, $x_2 = -\sqrt{-a}$ şi $x_2 = \sqrt{-a}$. Întrucât f este de două ori derivabilă pe $\mathbb{R}$, $f''(x_1) = a < 0$ şi $f''(x_2) = f''(x_3) = -8a > 0$, rezultă că x_1 este un punct de maxim local (fără a fi minim local) iar x_2 şi x_3 sunt puncte de minim local. Prin urmare, f are exact două puncte de minim local dacă şi numai dacă $a \in (-\infty, 0)$. Cu alte cuvinte, avem $M = (-\infty, 0)$.

279. Avem $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(x_n)}{x_n}$. Întrucât funcţia f este derivabilă, în baza teoremei lui l'Hôpital, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} f'(x) = f'(0)$. Cum şirul (x_n) converge către 0, deducem că $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(x_n)}{x_n} = f'(0)$.Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = f'(0)$.

280. Fie $p \geq 1$ şi $x_0 \in [0,1]$ astfel încât $f(x_0) = 0$. Atunci$f^p(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x}(f^p(t))'\mathrm{d}t = p\int_{x_0}^{x} f^{p-1}(t)f'(t)\mathrm{d}t$. Întrucât $(pa - b)^2 \geq 0$, sau echivalent, $pab \leq \dfrac{p^2}{2}a^2 + \dfrac{1}{2}b^2$, oricare ar fi $a, b \in \mathbb{R}$, obţinem $pf^{p-1}(t)f'(t) \leq \dfrac{p^2}{2}f^{2p-2}(t) + \dfrac{1}{2}(f'(t))^2$, oricare ar fi $t \in [x_0, x]$ şi deci $f^p(x) = p\displaystyle\int_{x_0}^{x} f^{p-1}(t)f'(t)\mathrm{d}t \leq \dfrac{p^2}{2}\int_{x_0}^{x} f^{2p-2}(t)\mathrm{d}t + \dfrac{1}{2}\int_{x_0}^{x}(f'(t))^2\mathrm{d}t \leq \dfrac{p^2}{2}\int_0^1 f^{2p-2}(t)\mathrm{d}t + \dfrac{1}{2}\int_0^1 (f'(t))^2\mathrm{d}t$. Prin urmare, $\alpha(p) \leq \beta(p)$.

281. Cum $\frac{1}{2}x - 3 < 0$ pentru orice $x \leq -2$, legea de corespondenţă a funcţiei f se rescrie

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x + 3\,, & \text{dacă } x \in (-\infty, -2] \\ x + 3\,, & \text{dacă } x \in (-2, 1) \\ 3 - 2x\,, & \text{dacă } x \in [1, \infty) \end{cases} .$$

Faptul că singura afirmaţie adevărată este $\boxed{\text{B}}$ rezultă imediat din analiza graficului funcţiei f.

Chiar şi în lipsa graficului, folosind proprietăţile funcţiei de gradul I se deduce cu uşurinţă că $f((-\infty, -2]) = [4, \infty)$, $f((-2, 1)) = (1, 4)$, $f([1, \infty)) = (-\infty, 1]$. Funcţia f este bijectivă deoarece pentru orice element b al codomeniului $\mathbb{R}$ există un unic $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x) = b$. Pentru $b \in (-\infty, 1]$, acest unic x este $x = \frac{3-b}{2} \in [1, \infty)$, pentru $b \in (1, 4)$, $x = b - 3 \in (-2, 1)$, iar pentru $b \in [4, \infty)$, $x = 6 - 2b \in (-\infty, -2]$.

282. $f'(x) = (2x + 5)\ln x + \frac{x^2 + 5x + 9}{x}$. $f''(x) = 2\ln x + \frac{2x + 5}{x} + 1 - \frac{9}{x^2}$. $f'''(x) = \frac{2x^2 - 5x + 18}{x^3} > 0, \forall x \in (0, \infty) \implies f'(x)$ convexă pe $(0, \infty)$. $g'(x) = e^x(x^2 + 2x + 6) + e^x(2x + 2) = e^x(x^2 + 4x + 8)$. $g''(x) = e^x(x^2 + 4x + 8) + e^x(2x + 4) = e^x(x^2 + 6x + 12) > 0, \forall x \in (0, \infty) \implies g'$ strict crescătoare pe $(0, \infty)$.

283. Ecuaţia tangentei în $x = 2$ este: $y - f(2) = f'(2)(x - 2)$ Fiindcă panta primei bisectoare este 1, $f'(2) = 1$. Aşadar, $3x^2 + m + 1 = f'(x) \implies 3 \cdot 4 + m + 1 = 1 \implies m = -12$.

284. $f'(x) = 2x + 2^x \cdot \ln 2 + \frac{1}{x+1} > 0$, deci f este injectivă. Cum $f(0) = 1$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ și f este continuă pe $[0, \infty]$ (deci cu proprietatea lui Darboux), imaginea funcției este $[1, \infty]$. Cum imaginea și codomeniul funcției coincid, funcția este surjectivă, deci, în final, bijectivă. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty \implies \nexists$ asimptotă orizontală spre $+\infty$. Datorită faptului că $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$, nici asimptota oblică nu există. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f'(1) + f'(2) + ... + f'(n)}{2^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2\cdot 1 + 2\cdot 2 + ... + 2\cdot n}{2^n} + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln 2 \cdot (2^1 + 2^2 + ... + 2^n)}{2^n} + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n+1}}{2^n} = 2\ln 2$. Aşadar, limita iniţială este $2\ln 2$. $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x = \int_1^2 (x^2 + 2^x + \ln(x+1))\mathrm{d}x =$

$\left.\frac{x^3}{3}\right|_1^2 + \left.\frac{2^x}{\ln 2}\right|_1^2 + \int_1^2 x' \cdot \ln(x+1)\mathrm{d}x = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} + \frac{4}{\ln 2} - \frac{2}{\ln 2} + \left. x\ln(x+1)\right|_1^2 - \int_1^2 \frac{x+1-1}{x+1}\,\mathrm{d}x =$
$\frac{4}{3} + \frac{2}{\ln 2} + \ln\frac{27}{4}.$

285. Cunoscând definiţia noţiunii de funcţie, se deduce imediat că afirmaţiile $\boxed{\text{A}}$ şi $\boxed{\text{D}}$ sunt false. Să observăm că pentru un $x \in \mathbb{R}$ arbitrar, $x - [x] = \{x\} \in [0, 1)$ este partea fracţionară a lui x. Prin urmare, toate numerele reale de forma $k + \frac{1}{2}$ cu $k \in \mathbb{Z}$ sunt zerouri ale lui f, ceea ce arată că afirmaţia $\boxed{\text{C}}$ este adevărată şi afirmaţia $\boxed{\text{B}}$ este falsă.

286. Soluţie: asimptota oblică are ecuația generală: $y = mx + n$ unde $m, n \in \mathbb{R}$. $m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x + \sqrt{x^2+2x}}{x} = 2, n = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+2x} - x =$
$\lim_{x\to\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2+2x} + x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{2}{x}} + 1} = 1.$

287. $\boxed{\text{A}}$ Această proprietate este falsă deoarece funcţia logaritm este definită pe $(0, \infty)$. Celelalte componente fiind polinomiale, sunt definite pe $\mathbb{R}$. De aceea domeniul acestei funţii este $(0, \infty)$.

$\boxed{\text{B}}$. Această proprietate este falsă. Constatăm că $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x^3 \left(1 + \frac{3}{x^2} - 9\frac{\ln x}{x^3}\right)$.

Deoarece $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{3x^2} = 0$, constatăm că $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, deci funcţi a nu are asimptotă orizontală.

$\boxed{\text{C}}$. Această proprietate este adevărată, deoarece problema existenţei punctelor unghiulare se pune în acele puncte în care funţia este continuă, dar nu este derivabilă. Funcţia f este derivabilă pe întreg domeniul de definiţie.

$\boxed{\text{D}}$ Această proprietate este adevărată. Funcţia f este de două ori derivabilă pe întreg domeniul de definiţie. Deoarece derivata de ordinul întâi $f'(x) = 3x^2 + 6x - \frac{9}{x} = \frac{3}{x}(x^3 + 2x^2 - 3) = \frac{3}{x}(x-1)(x^2+3x+3)$ are ca singură soluţie reală $x = 1$. Din moment ce ecuaţia $x^2 + 3x + 3 = 0$ nu are soluţii reale, semnul funcţiei f este determinat doar de $(x - 1)$. Constatăm astfel că f este strict descrescătoare pe $(0, 1]$ şi strict crescătoare pe $[1, \infty)$, deci $(1, 4)$ este un punct de minim global al funcţiei f.

288. $\boxed{\text{A}}$ Această proprietate este falsă deoarece asimptotele verticale au ecuaţii de forma $x =$ constantă. Verificând clasic existenţa asimptotelor verticale, constată că existenţa lor se pune doar în punctul $a = 1$. Deoarece $\lim_{x\to 1} f(x) = 2 \in \mathbb{R}$, funţia nu are asimptote verticale.

$\boxed{\text{B}}$. Această proprietate este falsă. Constatăm că $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 = \lim_{x\to\infty} f(x)$, deci dreapta de ecuaţie $y = 0$ este o asimptotă orizontală la atât la stânga cât şi la dreapta graficului funcţiei f.

$\boxed{\text{C}}$ Această proprietate este falsă. Costatăm că funcţia f este contină în punctul 1 deoarece $\lim_{x\uparrow 1} f(x) = 2 = \lim_{x\downarrow 1} f(x)$. Ea este derivabilă pe $(-\infty, 1)$ şi $(1, \infty)$. Constatăm că: $\lim_{x\uparrow 1} f'(x) = \lim_{x\uparrow 1}(2+x)e^{x-1} = 3 \in \mathbb{R}$ şi $\lim_{x\downarrow 1} f'(x) = \lim_{x\downarrow 1} -xe^{1-x} = -1 \in \mathbb{R}$. Deoarece ambele limite laterale există şi sunt finite, punctul $(1, f(1)) = (1, 2)$ este un punct unghiular, nu un punct de întoarcere.

$\boxed{\text{D}}$ Această afrimaţie este adevărată deoarece analizând graficul funcţiei, constatăm că graficul funcţiei f intersectează dreapta de ecuaţie $y = 1$ în două puncte.

289. $g(x) = -(1-2x)^{\frac{1}{2}}$şi $f(a)+g(a) = -\frac{2}{3}(1-2a)^{\frac{1}{2}}(1+a) \geq 0, \forall a \in A\backslash(-1, \frac{1}{2})$.Derivata funcției $g(x)$ este: $g'(x) = (1-2x)^{-\frac{1}{2}}$. Panta tangentelor în punctul de abscisă $x = a$ este $f'(a)$ și $g'(a)$, iar $f'(a) \cdot g'(a) = ((1-2a)^{-\frac{1}{2}}) \cdot (-(1-2a)^{\frac{1}{2}}) = -1$. Deci, tangentele sunt ortogonale, oricare ar fi a.

290. Din $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-1+x}{x(ax+b)} = \frac{1}{a}$ rezultă $\frac{1}{a} = 2$, deci $a = \frac{1}{2}$, iar din $\lim_{x\to\infty}(f(x)-2x) = \lim_{x\to\infty} \frac{2(1-2b)x-2}{x+2b} = 2(1-2b)$ se obţine $2(1-2b) = 3$, deci $b = -\frac{1}{4}$.

291. Punctele de intersecție sunt $x = 1$ și $x = e$.

292. Din ex. anterior rezultă că avem $A = \displaystyle\int_1^e \ln x - \big(\ln x\big)^2\,\mathrm{d}x$. Prin schimbarea de variabilă $u = \ln x \Rightarrow A = \displaystyle\int_0^1 (u-u^2)\cdot e^u\,\mathrm{d}u = \Big[(u-u^2)e^u - (1-2u)e^u - 2e^u\Big]\Big|_0^1 = 3-e$.

293. $$f(x) = \begin{cases} 7-2\sqrt{x} & \text{dacă } x \in (0,9] \\ 1 & \text{dacă } x \in (9,16) \\ 2\sqrt{x}-7 & \text{dacă } x \in [16,\infty) \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{x}} & \text{dacă } x \in (0,9) \\ 0 & \text{dacă } x \in (9,16) \\ \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{dacă } x \in (16,\infty) \end{cases}$$

Derivatele laterale atât în $x = 9$ cât și în $x = 16$ sunt finite, dar diferite, deci acestea vor fi puncte unghiulare: $f'_s(9) = -\frac{1}{3}, f'_d(9) = 0, f'_s(16) = 0, f'_d(16) = \frac{1}{4}$. $\Rightarrow (9,1), (16,1)$ puncte unghiulare pentru G_f.

x	0		9		16		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\vert$	0	$\vert$	$+$	
$f(x)$	7	$\searrow$	1	$\rightarrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Din tabelul de variație reiese faptul că G_f nu intersectează axa Ox.

294. Calculăm derivatele de ordinul 1 și 2 ale lui f: $f'(x) = -\dfrac{2x}{2!} + \dfrac{4x^3}{4!} = -x + \dfrac{x^3}{3!}$.

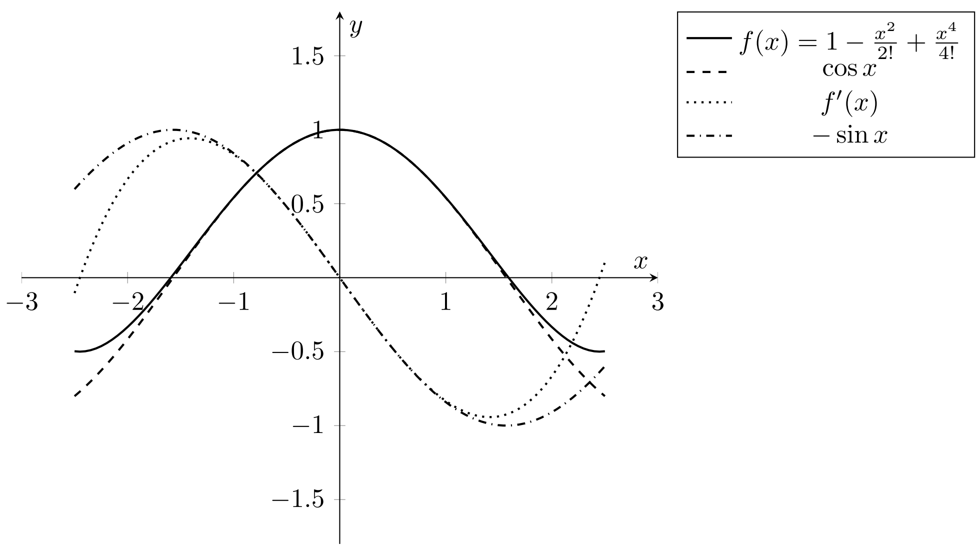
Observăm că singura soluție în $[-2, 2]$ a ecuației $f'(x) = 0$ este $x = 0$.

$f''(x) = -1 + \dfrac{x^2}{2!}$. Punctele de inflexiune ale lui f sunt așadar $x = -\sqrt{2}$ și $x = \sqrt{2}$.

x	-2	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	2
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\frac{1}{3}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\frac{1}{3}$

$\Rightarrow f$ este concavă pe $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ și convexă pe $(-2, -\sqrt{2})$ și $(\sqrt{2}, 2)$. De asemenea, cum f este continuă, va rezulta că $f(x) = 0$ are două rădăcini în intervalul $[-2, 2]$.

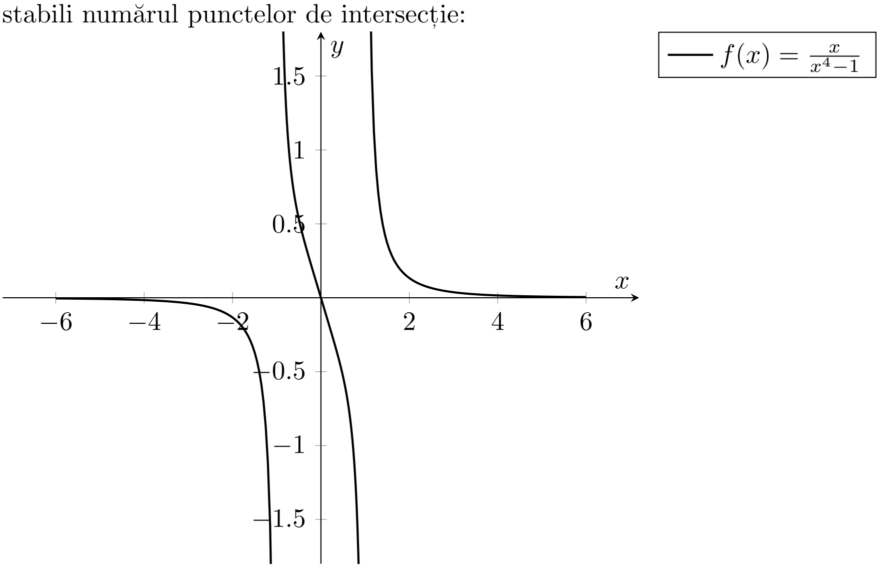
Pentru a observa faptul că f aproximează $\cos x$ se pot schița graficele celor două funcții pe $[-2, 2]$. f' aproximează $-\sin x$, fapt care reiese și din $(\cos x)' = -\sin x$.



295. $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} f(x) = \infty$, deci $x = -1$ este asimptotă verticală pentru G_f. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = \infty$, deci $x = 1$ este asimptotă verticală pentru G_f. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x}{x^4-1} = 0$, deci $y = 0$ este asimptotă orizontală. În concluzie G_f are 3 asimptote. Calculăm derivata lui f pentru a putea crea tabelul de variație al funcției și a trasa graficul: $f'(x) = \dfrac{1\cdot(x^4-1) - x\cdot 4x^3}{(x^4-1)^2} = -\dfrac{3x^4+1}{(x^2-1)^2} < 0$, $\forall x \in \mathbb{R}/\{\pm 1\} \Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,\infty)$. Tabelul de variație a lui f este:

x	$-\infty$	-1	1	∞	
$f'(x)$	$-$	$\mid$	$-$	$\mid$	$-$
$f(x)$	$0 \searrow -\infty$	$\mid$	$\infty \searrow -\infty$	$\mid$	$\infty \searrow 0$

Pentru a afla numărul de soluții a ecuației, o putem rescrie sub forma: $ax^4 - x - a = 0 \Rightarrow a = \dfrac{x}{x^4-1} \Rightarrow$ soluțiile ecuației sunt punctele de intersecție ale lui f cu graficul lui $y = a, a\in\mathbb{R}$. Putem trasa graficul funcției f și trasa linii paralele cu axa Ox pentru a stabili numărul punctelor de intersecție:



Dacă $a\in\mathbb{R}^*$, ecuația are 2 soluții. Dacă $a = 0$, ecuația are soluția unică $x = 0$.

296. $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x<-2}} f(x) = \infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x<-2}} f(x) = \infty$, deci $x = -2$ asimptotă verticală. Analog, $x = -1$ asimptotă verticală. Cum $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \mp\infty$, rezultă că f nu admite asimptote orizontale.

Verificăm dacă f admite asimptote oblice: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-2x^3}{x(x+1)(x+2)}=-2\in\mathbb{R}$ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-(-2)x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-2x^3+2x(x+1)(x+2)}{(x+1)(x+2)}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{4x^2+2x^2+4x}{(x+1)(x+2)}=6\in\mathbb{R}$ Așadar, f admite asimptota oblică $y=-2x+6$ la $\pm\infty$.

297. Calculăm derivatele de ordinul 1 și 2 ale lui f pentru a crea tabelul de variație:

$f'(x)=4x^3-8x^2-4x+8=4x^2(x-2)-4(x-2)=4(x^2-1)(x-2)$, $\forall x\in\mathbb{R}$, deci $f'(x)=0$ are soluțiile $x\in\{-1,1,2\}$. $f''(x)=12x^2-16x-4$, $f''(x)=0\iff 3x^2-4x-1=0$, ecuație care are soluțiile $x_1=\frac{2+\sqrt{7}}{3}$ și $x_2=\frac{2-\sqrt{7}}{3}$, $f(-1)=-\frac{19}{3}$; $f(1)=\frac{13}{3}$; $f(2)=\frac{8}{3}$

Tabelul de variație:

x	$-\infty$	-1	$\frac{2-\sqrt{7}}{3}$	1	$\frac{2+\sqrt{7}}{3}$	2	∞
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	$\infty\searrow$	$-\dfrac{19}{3}$	$\nearrow$	$\dfrac{13}{3}$	$\searrow$	$\dfrac{8}{3}$	$\nearrow\infty$

Așadar, se poate observa atât din tabel, cât și dacă se schițează graficul funcției f că: $l=3$, $g=1$, $i=2$. Punctul $x=-1$ va fi de extrem global.

Din tabel rezultă că $z=2$. Făcând calculele, obținem faptul că doar varianta C este corectă.

298. $\ln|x|=x^3-4x+1\iff\dfrac{\ln|x|-1}{x}=x^2-4$, deci numărul de soluții a ecuației este egal cu numărul de puncte de intersecție a graficelor celor 2 funcții date.

Pentru g, minimul se obține în $x=0$ și este egal cu $g(0)=-4$, iar punctele de intersecție cu axa Ox sunt $x=-2$ și $x=2$. Graficul lui g este o parabolă.

Pentru a putea schița graficul lui f vom construi tabelul de variație.

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{2-\ln(-x)}{x^2} & \text{dacă } x<0\\ \dfrac{2-\ln x}{x^2} & \text{dacă } x>0\end{cases}\Rightarrow f'(x)=0\iff\ln|x|=2\iff x\in\{-e^2,e^2\}$$

$$f''(x)=\begin{cases}\dfrac{-5+2\ln(-x)}{x^3} & \text{dacă } x<0\\ \dfrac{-5+2\ln x}{x^3} & \text{dacă } x>0\end{cases}\Rightarrow f''(x)=0\iff 2\ln|x|=5\iff x\in\{-e^{\frac{5}{2}},e^{\frac{5}{2}}\}$$

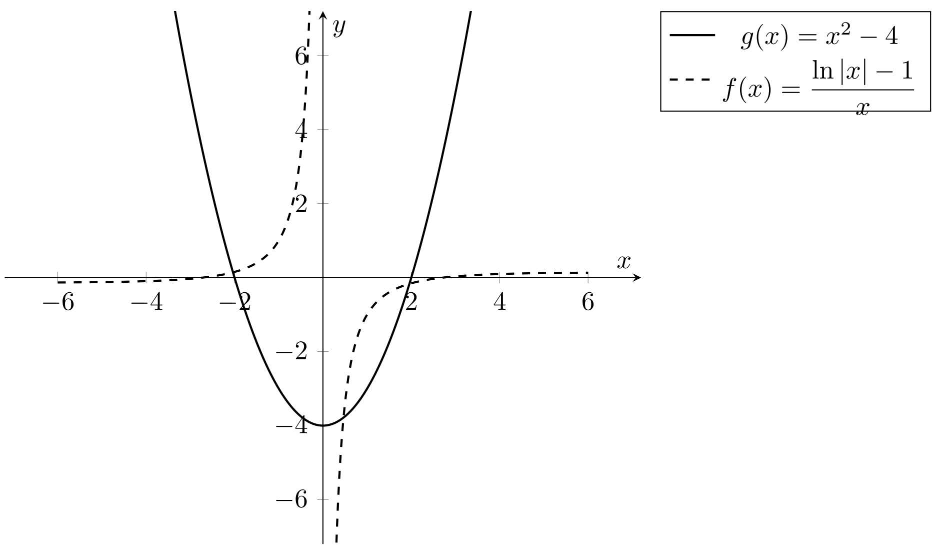
Calculăm limitele lui f:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0 = \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, deci $y = 0$ asimptotă orizontală pentru G_f.

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} f(x) = \dfrac{-\infty}{0_-} = \infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x) = \dfrac{-\infty}{0_+} = -\infty$, deci $x = 0$ asimptotă verticală pentru G_f.

Tabelul de variație:

x	$-\infty$	$-e^{\frac{5}{2}}$	$-e^2$	0	e^2	$e^{\frac{5}{2}}$	∞
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+ \mid +$	0	$-$	$-$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+ \mid -$	$-$	0	$+$
$f(x)$	0	$\searrow$	$-e^{-2} \nearrow$	$\infty \mid -\infty$	$\nearrow e^{-2}$	$\searrow$	0



Cum $f(1) = -1$ și $g(1) = -3$, observăm din grafic că în semiplanul pozitiv al lui x, graficul lui f va tăia parabola g în două puncte, unul în intervalul $(0, 1)$ și unul în $(1, \infty)$. Pe de altă parte, în semiplanul negativ al lui x, f va intersecta g doar într-un punct care se va afla în intervalul $(-\infty.0)$. Deci vor exista 3 puncte de intersecție.

299. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+x+5} = \int \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{19}{4}} = \int \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{19}}{2})^2} = \frac{2}{\sqrt{19}}\mathrm{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{19}}\right)$ $+\, C$, deci varianta $\boxed{\text{B}}$ este o primitivă validă.

300. Observăm că limitele laterale ale lui f în 0 sunt 1 și 2, deci f e discontinuă în 0 (de speța întâi). Din acest motiv, f nu admite primitive, căci imaginea funcției f nu este un interval (f nu are proprietatea lui Darboux). Singurul răspuns corect este $\boxed{\text{D}}$.

301. $x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1 = (x^2-1)^3$ și $x^3 + x = x(x^2+1)$.

$$\int \frac{x^3+x}{x^6-3x^4+3x^2-1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x^3-x+2x}{(x^2-1)^3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{2x(x^2-1)}{(x^2-1)^3}\,\mathrm{d}x + \int \frac{2x}{(x^2-1)^3}\,\mathrm{d}x$$

Cu schimbarea de variabilă $u = x^2-1$, rezultă $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int \frac{1}{u^2}\,\mathrm{d}u + \int \frac{1}{u^3}\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{2}\Big(\frac{u+1}{u^2}\Big) =$ $-\dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{x}{x^2-1}\Big)^2 + C$. În variantele de răspuns, $C = \pm 2, 1$.

302. Avem întâi că $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n^2}}{e^{2n}} = \frac{1}{e}$. Aceasta se poate arăta logaritmând și aplicând regula lui l'Hôpital sau folosind, de exemplu, faptul că $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + O(x^3)$ pt. $x \ll 1$. Avem deci $\left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n^2} \cdot I(n) \to -\frac{1}{2e} \cdot \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{e^{4n}}{e^{4n}-e^{2n}+1} = -\frac{1}{2e}$; $\cos\Big(\dfrac{2\pi}{3}\Big) =$ $\cos\Big(\dfrac{4\pi}{3}\Big) = -\dfrac{1}{2}$ și $\cos\Big(\dfrac{5\pi}{6}\Big) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos\Big(\dfrac{5\pi}{3}\Big) = \dfrac{1}{2}$.

303. $F(-1) = \frac{1}{e} + \mathrm{C}_1$. $F\Big(\frac{\pi}{3}\Big) = \sin x + \mathrm{C}_2 = \sin x + \mathrm{C}_1 + 1$. Pentru $x < 0$, $f(x) = e^x$ derivabilă, pentru $x > 0$, $f(x) = \cos(x)$ derivabilă. Pentru $x = 0$, calculăm limitele la capetele din stânga și din dreapta: $\displaystyle\lim_{h\to\infty} \frac{e^h-1}{h} = 1$, $\displaystyle\lim_{h\to\infty} \frac{\cos h - 1}{h} = 0 \Rightarrow f$ nu este derivabilă pe $\mathbb{R}$.

304. Constatăm că g este continuă în $x = 0$. Pentru $x < 0$, $g(x) = x+1$ este o funcție polinomială, deci continuă și derivabilă pe intervalul $(-\infty, 0)$. Pentru $x \geq 0$, $g(x) = e^x$ este o funcție exponențială, continuă și derivabilă pe intervalul $[0, \infty)$. Astfel, aceasta admite primitive pe întreg domeniul de definiţie. Din condiţia de continuitate în $x = 0$ a unei primitive G, se obţine faptul că $c_2 = 1 + c_1$, unde c_1 şi c_2 sunt constantele funcţiei G pe cele două ramuri.

305. $F'(x) = f(x) = (3a-2b)e^{3x}\sin 2x + (3b+2a)e^{3x}\cos 2x$. Deci, $3a - 2b = 0$ şi $3b + 2a = 1$. In concluzie, $a = \dfrac{2}{13}$ şi $b = \dfrac{3}{13}$.

306. Pentru ca f să admită primitive, este nevoie ca $a\sin x + b = 0$ să nu aibă soluţii reale. Aşadar, luând în considerare faptul că a şi b sunt reale şi pozitive, este necesar ca $-\dfrac{b}{a} < -1 \implies b > a$.

307. F este un raport de funcţii continue, al cărui numitor este mereu diferit de zero, deci aceasta admite primitive. Rescriem numitorul în următorul mod: $e^{2x} + e^x + 6 =$

$\left(e^x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{23}{4}$. Considerăm integrala nedefinită şi următoarea schimbare de variabilă: $t = e^x + \frac{1}{2} \implies \mathrm{d}t = e^x \mathrm{d}x$. Obţinem: $\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2 + \frac{23}{4}} = \frac{2}{\sqrt{23}} \text{arctg}\, \frac{2t}{\sqrt{23}} + C$. In concluzie, familia de primitive a funcţiei f este: $F(x) = \frac{2}{\sqrt{23}} \text{arctg}\, \frac{2e^x + 1}{\sqrt{23}} + C$.

308. Domeniul maximal de definiţie este $(-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$. Pentru a calcula primitiva pe domeniul de definiţie, folosim substituţia $t = x + 1$. $F(t) = \int \frac{t-2}{t^3} \mathrm{d}t = \int \frac{1}{t^2} \mathrm{d}t - 2\int \frac{1}{t^3} \mathrm{d}t = \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t} + C = \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+1} + C = -\frac{x}{(x+1)^2} + C$.

309. $f(x) = x^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{4}} x^{\frac{1}{8}} ... = x^{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}}$. Folosim, apoi, următoarea formulă pentru suma termenilor unei progresii geometrice infinite, cu raţia r, r $\in$ (-1, 1) şi a_1 primul termen al progresiei: $S = \frac{a_1}{1-r}$. Deci, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$.

In concluzie, primitiva funcţiei f este $\int x \mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + C$

310. Împărţim numărătorul la numitor folosind algoritmul împărţirii polinoamelor şi obţinem $f(x) = 2x - 3 + \frac{x-4}{x^2 - x}$. Integrând în raport cu x, obţinem $\int f(x)\mathrm{d}x =$

$$= \int \left(2x - 3 + \frac{x}{x^2 - x} - \frac{4}{x^2 - x}\right) \mathrm{d}x = \int \left(2x - 3 + \frac{1}{x-1} - \frac{4}{x(x-1)}\right) \mathrm{d}x =$$

$$= \int \left(2x - 3 + \frac{1}{x-1} - \frac{4}{x-1} + \frac{4}{x}\right) \mathrm{d}x = x^2 - 3x + \ln|x-1| - 4\ln|x-1| + 4\ln|x| + C =$$

$$= x^2 - 3x - 3\ln|x-1| + 4\ln|x| + C = \ln \frac{e^{x\cdot(x-3)} \cdot x^4}{|x-1|^3} + C.$$

311. Folosim substituţia $x = \sqrt{3} \cdot \text{tg}\, t \implies \mathrm{d}x = \sqrt{3} \cdot \frac{1}{\cos^2 t} \mathrm{d}t$.$F(t) = \frac{1}{3} \int \frac{1}{\left(\text{tg}^2 t + 1\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{1}{\cos^2 t} \mathrm{d}t = \frac{1}{3} \int \cos t \mathrm{d}t = \frac{1}{3} \sin\left(\text{arctg}\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)\right) + C$.

Folosind formula $\sin(\text{arctg}\ x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, obţinem $F(x) = \frac{x}{3\sqrt{x^2+3}} + C$.

312. Fie $F(x) = \int \sin(\ln x)\mathrm{d}x$. Folosim metoda integrării prin părţi: $u = \sin(\ln x) \implies \mathrm{d}u = \cos(\ln x) \cdot \frac{1}{x} \mathrm{d}x$, iar $\mathrm{d}v = 1 \implies v = x$. Integrala devine $F(x) = \sin(\ln x) \cdot x - \int \cos(\ln x)\mathrm{d}x$. Folosim, din nou, metoda integrării prin părţi pentru noua integrală: $u = \cos(\ln x) \implies \mathrm{d}u = -\sin(\ln x) \cdot \frac{1}{x} \mathrm{d}x$, iar $\mathrm{d}v = 1 \implies v = x$. Integrala devine $\int \cos(\ln x)\mathrm{d}x = \cos(\ln x) \cdot x + \int \sin(\ln x)\mathrm{d}x$. Aşadar, $F(x) = \sin(\ln x) \cdot x - \cos(\ln x) \cdot x - F(x) + C \implies F(x) = \frac{x}{2} \cdot (\sin(\ln x) - \cos(\ln x)) + C$. Folosind următoarea formulă, obţinem $\sin x - \cos x = \sqrt{2} \cdot \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \implies F(x) = \frac{x\sqrt{2}}{2} \cdot \sin\left(\ln x - \frac{\pi}{4}\right) + C$ Această funcţie oscilează în jurul axei y = 0 şi o intersectează când $F(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ sau $\sin(\ln x) - \cos(\ln x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = \frac{\pi}{4} + n\pi, n \in \mathbb{Z} \iff x = e^{\frac{\pi}{4}+n\pi}, n \in \mathbb{Z}$. Cu toate acestea, aceasta nu este o funcţie periodică, deoarece atât funcţia logaritmică ($\ln x$), cât şi cea liniară (x) sunt monoton crescătoare.

313. $\lim\limits_{x\nearrow 1} f(x) = \lim\limits_{x\searrow 1} f(x) = f(1) = 1 \implies$ funcția este continuă în punctul $x = 1$, deci aceasta admite primitive în intervalul $[0, \infty)$. Pentru a determina primitiva funcției f pe $[0, 1]$, vom folosi substituția $x = \sin t \implies \mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t$. Avem $\int \sqrt{1 - \sin^2 t} \cdot \cos t\,\mathrm{d}t = \int \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \int \frac{1 + \cos 2t}{2}\mathrm{d}t = \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} + C = \frac{\arcsin x}{2} + \frac{x\sqrt{1 - x^2}}{2} + C$. În ceea ce priveşte f în intervalul $(1, \infty)$, vom folosi metoda integrării prin părţi: $u = x^2 + x - 1 \implies \mathrm{d}u = (2x + 1)\mathrm{d}x$, iar $v' = e^{x-1} \implies v = e^{x-1}$. Aşadar, $F(x) = (x^2 + x - 1) \cdot e^{x-1} - \int (2x + 1) \cdot e^{x-1}\mathrm{d}x$. În continuare, folosim, din nou, metoda integrării prin părţi: $u = 2x + 1 \implies \mathrm{d}u = 2\mathrm{d}x$, iar $v' = e^{x-1} \implies v = e^{x-1}$. Aşadar, $F(x) = (x^2 + x - 1) \cdot e^{x-1} - (2x + 1) \cdot e^{x-1} + 2 \int e^{x-1}\mathrm{dx} = (x^2 - x) \cdot e^{x-1} + C, x \in (1, \infty)$.

În concluzie, $F(x) = \begin{cases} x + \dfrac{\arcsin x}{2} + \dfrac{x\sqrt{1 - x^2}}{2} + C, & \text{dacă } x \in [0, 1] \\ (x^2 - x) \cdot e^{x-1} + C, & \text{dacă } x \in (1, \infty) \end{cases}$ este familia de primitive ale funcţiei f.

314. Funcţia cosinus este continuă pe $\mathbb{R}$, deci f admite primitive pe întreg domeniul de definiţie. Aplicând funţia cosinus asupra lui $\frac{2\pi}{3}f(x)$, obţinem $\cos\left(\frac{2\pi}{3}f(x)\right) = f(x)$, deoarece numărul de funcţii cosinus din expresia funcţiei f este n, $n \to \infty$, iar aplicarea funcţiei trigonometrice încă o dată va duce la aceeaşi expresie, deci $f(x) = \frac{1}{2}$. Aşadar, primitiva lui f este $F(x) = \frac{1}{2} \cdot x + C$. Aceasta nu este o funcţie periodică.

315. Funcţia este continuă pe domeniul de definiție, deci admite primitive.

Pentru a calcula primitiva, folosim substituţia $x = \sin t \implies dx = \cos t dt$. Aşadar, $\int x \arcsin x dx = \int t \cdot \sin t \cos t dt = \frac{1}{2} \int t \cdot \sin 2t dt$. Considerăm, apoi, următoarea integrare prin părţi $u = t \implies du = dt$, iar $dv = \sin 2t \implies v = -\frac{1}{2}\cos 2t dt$. Aşadar, $F(t) = \frac{1}{2} \cdot t \cdot \left(-\frac{1}{2}\cos 2t\right) - \frac{1}{2} \cdot \int \left(-\frac{1}{2}\cos 2t\right) \mathrm{d}t = -\frac{t}{4} \cdot \cos 2t + \frac{1}{8} \cdot \sin 2t + C.$

Ştiind că $x = \sin t$, obţinem $\begin{cases} t = \arcsin x, \\ \cos 2t = 1 - 2x^2, \\ \sin 2t = 2x\sqrt{1-x^2}. \end{cases}$

În concluzie, $F(x) = \dfrac{\arcsin x}{4} \cdot \left(2x^2 - 1\right) + \dfrac{x}{4} \cdot \sqrt{1-x^2} + C.$

316. Integrăm şi rescriem funcţia în următorul mod: $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+9}}\mathrm{d}x = \int \frac{x\cdot(x^2+9)}{\sqrt{x^2+9}}\mathrm{d}x - \int \frac{9x}{\sqrt{x^2+9}}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int 2x\cdot\sqrt{x^2+9}\mathrm{d}x - \frac{9}{2}\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+9}}\mathrm{d}x$. Folosim în rezolvarea ambelor integrale substituţia $t = x^2+9 \implies \mathrm{d}t = 2x\mathrm{d}x$. Aşadar, $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+9}}\mathrm{d}x = \frac{1}{3}(x^2+9)^{\frac{3}{2}} - \frac{9}{2}\sqrt{x^2+9} + C = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{x^2+9}\cdot(x^2-18) + C.$

317. Pentru a calcula limita dată, vom folosi Teorema de medie.

Folosind faptul că f continuă pe $[n, n+1] \implies \exists k \in [n, n+1]$ astfel încât $\displaystyle\int_n^{n+1} f(x)\mathrm{d}x = (n+1-n)\cdot f(k) = e^{1-k^2}$. Observăm că $k \in [n, n+1] \implies$ când $n \to \infty, k \to \infty$. Aplicând limita, obţinem $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_n^{n+1} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} e^{1-k^2} = 0$. Primitiva funcţiei date este similară cu cea a lui Poisson şi asemeni acelei integrale, nici acesta nu poate fi exprimată prin intermediul funcţiilor elementare. Primitiva funcţiei nu are puncte de extrem.

318. Limitele laterale în $x = 0$ nu există, deci $x = 0$ este un punct de discontinuitate de speţa a II-a. Cum g este o funcţie cu proprietatea lui Darboux, g admite primitive.

319. Domeniul de definiție al funcției f este $\mathbb{R}$ din care se elimină valorile $x \in \mathbb{R}$ pentru care $\sin x = \frac{\sqrt{37}-5}{4}$. Cum f nu este definită în $\arcsin \frac{\sqrt{37}-5}{4}$, nu se pune problema continuității în acest punct. Pe domeniul de definiție f este continuă, deci admite primitive. Cu schimbarea de variabilă $t = \sin x$, $\mathrm{d}t = \cos x\mathrm{d}x$, $\displaystyle F(x) = \int \frac{1}{4t^2+10t-3}\mathrm{d}t = \int \frac{1}{\left(2t+\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{37}{4}}\mathrm{d}t$. Folosim, apoi, substituţia $u = 2t + \dfrac{5}{2}$, $\mathrm{d}u = 2\mathrm{d}t$ și avem $F(u) =$

$$\frac{1}{2}\int \frac{1}{u^2 - \left(\frac{\sqrt{37}}{2}\right)^2}\mathrm{d}u = \frac{1}{2\sqrt{37}}\ln\left|\frac{2u-\sqrt{37}}{2u+\sqrt{37}}\right| + C = \frac{1}{2\sqrt{37}}\ln\left|\frac{4\sin x + 5 - \sqrt{37}}{4\sin x + 5 + \sqrt{37}}\right| + C$$

320. Folosim substituţia $x = \mathrm{tg}\ t \cdot \sqrt{2}$, $\mathrm{d}x = \dfrac{\sqrt{2}}{\cos^2 t}\mathrm{d}t$. $\displaystyle F(t) = \int \frac{1}{(2\mathrm{tg}^2 t+1)\sqrt{2\mathrm{tg}\ t+2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\cos^2 t}\mathrm{d}t = \int \frac{\cos t}{(2\mathrm{tg}^2 t+1)\cos^2 t}\mathrm{d}t = \int \frac{1}{\frac{\sin^2 t+1}{\cos^2 t}\cdot\cos t}\mathrm{d}t = \int \frac{\cos t}{\sin^2 t+1}\mathrm{d}t$. Folosim, apoi, substituţia $u = \sin t$, $\mathrm{d}u = \cos t\mathrm{d}u$ și avem $F(u) = \displaystyle\int \frac{1}{u^2+1}\mathrm{d}u = \operatorname{arctg} u + C = \operatorname{arctg}\left(\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right) + C$. Folosim faptul că $\sin(\operatorname{arctg} x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, $F(x) = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}} + C$. De asemenea, $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\pi}{2} \implies F(x) + F\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\pi}{2} - 2\cdot C$.

321. Folosim substituţia $t = x^2 \implies \mathrm{d}t = 2x\mathrm{d}x$, $F(t) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t = \dfrac{\arcsin t}{2} + C = \dfrac{\arcsin x^2}{2} + C$.

322. Din condiţia de continuitate a funcţiei f obţinem $m = -n$.

$$F(x) = \begin{cases} m\cdot\dfrac{x^3}{3} + nx + C_1, & \text{dacă } x \le -1 \\ 2(x\ln(x+2) - x + 2\ln(x+2)) + C_2, & \text{dacă } x > 1 \end{cases}$$

Din condiţia de continuitate a funcţiei F, obţinem $-\dfrac{m}{3} - n + C_1 = 2 + C_2$. Fixând $C_1 = 0$, obţinem $C_2 = \dfrac{2m}{3} - 2$.

$$F(x) = \begin{cases} m\cdot\dfrac{x^3}{3} + nx, & \text{dacă } x \le -1 \\ 2(x\ln(x+2) - x + 2\ln(x+2)) + \dfrac{2m}{3} - 2, & \text{dacă } x > 1 \end{cases}$$

323. Folosim substituţia $u = \sqrt{x^2+1} \implies \mathrm{d}u = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x$. $F(u) = \displaystyle\int \frac{1}{u^2-1}\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int\frac{1}{u-1}\mathrm{d}u - \frac{1}{2}\int\frac{1}{u+1}\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\ln|u-1| - \frac{1}{2}\ln|u+1| + C$. În concluzie, familia de primitive ale lui f este $F(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left|\sqrt{x^2+1}-1\right| - \dfrac{1}{2}\ln\left|\sqrt{x^2+1}+1\right| + C = \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1}\right| + C$.

324. $\left|\dfrac{1}{t^2}\displaystyle\int_0^t (\sqrt{x} + \sin x)\mathrm{d}x\right| \le \dfrac{1}{t^2}\left(\displaystyle\int_0^t \sqrt{x}\mathrm{d}x + \int_0^t |\sin x|\mathrm{d}x\right) \le \dfrac{1}{t^2}\left(\dfrac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + t\right)$

325. $\dfrac{x^{2019}(1-x)}{(x^{2020}+1)(x^{2021}+1)} = \dfrac{x^{2019}-x^{2020}}{(x^{2020}+1)(x^{2021}+1)} = \dfrac{x^{4040}+x^{2019}-x^{4040}-x^{2020}}{(x^{2020}+1)(x^{2021}+1)}$
$= \dfrac{x^{2019}(x^{2021}+1) - x^{2020}(x^{2020}+1)}{(x^{2020}+1)(x^{2021}+1)} = \dfrac{x^{2019}}{x^{2020}+1} - \dfrac{x^{2020}}{x^{2021}+1}$.

Atunci $\displaystyle\int_0^n \frac{x^{2019}(1-x)}{(x^{2020}+1)(x^{2021}+1)}\mathrm{d}x = \int_0^n \frac{x^{2019}}{x^{2020}+1}\,\mathrm{d}x - \int_0^n \frac{x^{2020}}{x^{2021}+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2020}\ln(x^{2020}+1)\Big|_0^n - \frac{1}{2021}\ln(x^{2021}+1)\Big|_0^n = \frac{1}{2020}\ln(n^{2020}+1) - \frac{1}{2021}\ln(n^{2021}+1) = \ln\sqrt[2020]{n^{2020}+1} - \ln\sqrt[2021]{n^{2021}+1} = \ln\frac{\sqrt[2020]{n^{2020}+1}}{\sqrt[2021]{n^{2021}+1}} = \ln\frac{n\cdot\sqrt[2020]{1+\frac{1}{n^{2020}}}}{n\cdot\sqrt[2021]{1+\frac{1}{n^{2021}}}} = \ln\frac{\sqrt[2020]{1+\frac{1}{n^{2020}}}}{\sqrt[2021]{1+\frac{1}{n^{2021}}}}$. Astfel,

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \int\limits_0^n \frac{x^{2019}(1-x)}{(x^{2020}+1)(x^{2021}+1)}\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \ln \frac{\sqrt[2020]{1+\dfrac{1}{n^{2020}}}}{\sqrt[2021]{1+\dfrac{1}{n^{2021}}}} = \ln 1 = 0.$$

326. Din $\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x = \int \frac{1}{(x+1)^2+1}\mathrm{d}x = \operatorname{arctg}(x+1) + \mathcal{C}$ rezultă, utilizând regula lui L'Hôpital, că $L = \displaystyle\lim_{y\to\infty} \frac{\operatorname{arctg}(y+1) - \dfrac{\pi}{4}}{y} = \lim_{y\to\infty} \frac{1}{y+1} = 0.$

327. Funcția f este pară, deci $a = 2\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$. Deoarece $x \in [0,1]$, avem $x^{2022} \leq x^2$. Astfel, $\dfrac{1}{1+x^2} \leq \dfrac{1}{1+x^{2022}} \leq 1, \quad \forall x \in [0,1]$. Integrând aceste relații, obținem $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \leq \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_0^1 1\,\mathrm{d}x$. Rezultă $\dfrac{\pi}{4} \leq \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \leq 1$. Înmulțind cu 2, avem $\dfrac{\pi}{2} \leq a \leq 2$. Deci afirmațiile $\boxed{\text{A}}$ și $\boxed{\text{B}}$ sunt adevărate.

Integrăm prin părți $\displaystyle\int_0^1 f(x)f''(x)\,\mathrm{d}x = [f(x)f'(x)]_0^1 - \int_0^1 f'(x)f'(x)\,\mathrm{d}x$. Rezultă că avem $\displaystyle\int_0^1 f(x)f''(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 (f'(x))^2\,\mathrm{d}x = [f(x)f'(x)]_0^1$. Cum $f'(x) = -\dfrac{2022x^{2021}}{(1+x^{2022})^2}$, pentru $x=0$ și $x=1$, avem $f(1) = \dfrac{1}{2}, \quad f'(1) = -\dfrac{2022}{4}, \quad f(0) = 1, \quad f'(0) = 0$. Rezultă $b = \left[\dfrac{1}{2}\cdot\left(-\dfrac{2022}{4}\right) - 1\cdot 0\right] = -\dfrac{1011}{4}$. Deci afirmația $\boxed{\text{D}}$ este adevărată.

328. Folosim substituția $\ln x = t \implies x = e^t \implies \mathrm{d}x = e^t\,\mathrm{d}t$. Rescriem: $a_n = \displaystyle\int_0^1 t^n e^t\,\mathrm{d}t$. Deoarece $t \in [0,1]$, avem $e^t \leq e$. Astfel,$0 \leq t^n e^t \leq t^n e, \quad t \in [0,1]$. Integrând această inegalitate, obținem $0 \leq \displaystyle\int_0^1 t^n e^t\,\mathrm{d}t \leq \int_0^1 t^n e\,\mathrm{d}t$. Rezultă $0 \leq a_n \leq e\displaystyle\int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t = e\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{e}{n+1}$. Folosind Teorema cleştelui, obținem $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Deci afirmația $\boxed{\text{B}}$ este adevărată. Calculăm a_{n+1} folosind integrarea prin părți: $a_{n+1} = \displaystyle\int_0^1 t^{n+1}e^t\,\mathrm{d}t$. Rezultă $a_{n+1} = e - (n+1)a_n \implies a_n = \dfrac{e - a_{n+1}}{n+1}$. Observăm că pentru $n \to \infty$, avem $\displaystyle\lim_{n\to\infty} na_n = e$. Deci afirmația $\boxed{\text{D}}$ este adevărată.

329. Cu substituția $x = \dfrac{\pi}{2} - t$, $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$, $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}{\sin^n\left(\frac{\pi}{2}-t\right) + \cos^n(\frac{\pi}{2}-t)}\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n t}{\cos^n t + \sin^n t}\,\mathrm{d}t$. Adunând cele două expresii pentru I_n, avem $2I_n =$
$= \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x} + \frac{\cos^n x}{\sin^n x + \cos^n x}\right)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$, deci $I_n = \dfrac{\pi}{4}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
Afirmațiile $\boxed{\text{A}}$, $\boxed{\text{B}}$ și $\boxed{\text{C}}$ sunt adevărate.

330. Integrala devine: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \cdot \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\,dx$. Folosim substituția $t = \cos x$, deci $dt = -\sin x\,dx$. Scriem integrala: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\,dx = \int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{t^2-1}{t^2}\,dt$; Aceasta se poate scrie: $\int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(1 - \frac{1}{t^2}\right) dt. = \left[t + \frac{1}{t}\right]_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{2}{\sqrt{2}}\right) - (1+1) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{2}{\sqrt{2}} - 2 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{2\sqrt{2}}{2} - 2 = \frac{3\sqrt{2}}{2} - 2 = \frac{3\sqrt{2}-4}{2}$

331. Integrând prin părți, cu $f(x) = \ln x$, și $g'(x) = x^n$ obținem $I_n = \ln x \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_{\frac{1}{e}}^{1} - \int_{\frac{1}{e}}^{1} \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{1}{x}\,dx$. Astfel, obținem limita $L = 0$.

Limita $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{\sin nx}{n}\,dx$ se reduce la $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot (-\frac{1}{n} \cdot \cos nx)\Big|_0^1 = 0$

332. Realizăm schimbarea de variabilă $t = \sin(\sin x)$, $dt = \cos(x)\cos(\sin x)dx$, iar rezultatul integralei nedefinite este $\frac{1}{2}\sin^2(\sin x)$. Evaluând integrala de la 0 la π, rezultatul este 0.

333. Folosind substituția $t = x^2$ obținem $\frac{a}{2} \cdot \int_0^1 \frac{1}{t^2+1}\,dt = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{a\cdot\pi}{8} = \frac{\pi}{16} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$.

334. Cum $\sin 2x = 2\sin x\cos x$, obținem $\sin x = 2^n \sin\frac{x}{2^n} \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{x}{2^k}\right)$. Trecând la limită cu $n \to \infty$ avem $\prod_{k=1}^{\infty} \cos\left(\frac{x}{2^k}\right) = \frac{\sin x}{x}$. Astfel integrala devine $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x\,dx = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$.

335. Separând termenii, obținem $\int_0^1 \frac{1}{x+3} - \frac{7}{x+3}\,dx = 1 - 7\cdot(\ln 4 - \ln 3)$.

336. Pentru $f\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$, folosim integrarea prin părți, unde $f(t) = e^{-t}, g'(t) = \sin(t)$, de unde obținem $-\frac{e^{-t}}{2}(\sin t + \cos t)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{2}$. Pentru $\min f(x,1)$, $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, observăm atât din rezolvarea anterioară, cât și din faptul că $e^{-x}\sin x$ este întotdeauna pozitiv în intervalul $\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow f(x,1)$ este strict crescător pe acest interval. Minimul apare când $x = 0 \Rightarrow f(0,1) = 0$.

337. Cu substituția $u = 1 + \cos t$, $du = -\sin t dt$, integrala devine $-2\int_2^{\frac{2+\sqrt{2}}{2}} \frac{u-1}{u}\,du = 2 - \sqrt{2} + 2\ln\frac{2+\sqrt{2}}{4}$ Fracția devine $\frac{2\sin t\cos t}{1 + 2\cos\frac{t}{2} - 1}$. Folosind substituția $u = \frac{t}{2}$, integrala devine $\int_0^{\frac{\pi}{8}} \sin 2u - \operatorname{tg} u\,du = \frac{\pi}{4} - \ln\sqrt{2} + 1$.

338. Funcția nu este definită pentru $x \in (-1, 1)$, deci nu trece prin origine. Totodată, funcția este crescătoare pe $[1, 2]$. Aria este dată de $I = \int_1^2 \sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}x$. Folosind integrarea prin părți, cu $f(x) = \sqrt{x^2-1}, g'(x) = 1 \Rightarrow I = \sqrt{x^2-1}\Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \cdot x\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{3} - \frac{1}{2}\ln 2 + \sqrt{3}$.

339. Înlocuind $\mathrm{tg}x$ cu $\frac{\sin x}{\cos x}$, obținem: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cdot \cos x}{\cos^2 x + m^2 \sin^2 x}\,\mathrm{d}x$. Folosim schimbarea de variabilă $t = \sin x \Rightarrow \int_0^1 \frac{t}{1+(m^2-1)t^2}\,\mathrm{d}t$. Folosim altă substituție $u = t^2 \Rightarrow \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{1+(m^2-1)u}\,\mathrm{d}u$. Integrând, obținem $\frac{\ln m}{m^2-1}$.

340. Folosind formula de integrare prin părți: $\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u$, cu $u = \arcsin\frac{2x}{1+x^2}$ și $\mathrm{d}v = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow A = uv\Big|_0^1 - \int_0^1 v\,\mathrm{d}u = \left[\arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) \cdot \mathrm{arctg}\,(x)\right]_0^1 - \int_0^1 \mathrm{arctg}\,(x) \cdot \frac{2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$. Efectuând calculele, obținem $A = \frac{\pi^2}{8} - 2\int_0^1 \frac{\mathrm{arctg}\,x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$. Folosim substituția $t = \mathrm{arctg}\,x \Rightarrow \mathrm{d}t = \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \Rightarrow A = \frac{\pi^2}{8} - 2 \cdot \frac{\pi^2}{32} = \frac{\pi^2}{16} \Rightarrow \sqrt{A} = \frac{\pi}{4}$.

341. Folosim substituția $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \Rightarrow$ integrala devine $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\mathrm{d}t}{t^2+3} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

342. $\mathrm{tg}\,x = \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow \frac{1}{1+\mathrm{tg}^q x} = \frac{\cos^q x}{\cos^q x + \sin^q x}$. Cum $\int_a^b \frac{f(x)}{f(x)+f(a+b-x)}\,\mathrm{d}x = \frac{b-a}{2} \Rightarrow$ integrala este egală cu $\frac{\pi}{4}$, indiferent de valoarea lui q. Astfel, $s_k = k \cdot \frac{\pi}{4}$.

343. $\sqrt{\sqrt{\cdots\sqrt{x}}} = x^{-\frac{1}{2^n}}$. Pentru $x \in [0, 3]$, $f(x)$ este continuă. $f_1(x) = x^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow \int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{x}\Big|_0^3 = 2\sqrt{3}$. $L = \lim\limits_{n\to\infty}\int_0^3 x^{-\frac{1}{2^n}}\,\mathrm{d}x = 3 = \sqrt{9}$. $2\sqrt{3} = \sqrt{12} > \sqrt{9}$. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\cos x \sin 4x}{2x} = \lim\limits_{x\to 0} 3\cos x \cdot 2\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{4x} = 3\cos 0 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

344. Din $\begin{cases} y = x^2, \\ y^2 = x \end{cases}$ (sau din graficul funcției), observăm punctele de intersecție $x = 0$ și $x = 1$.

Parabola roșie corespunde funcției $f(x) = x^2$, iar cea albastră $y = \sqrt{x}$ și $y = -\sqrt{x} \to g(x) = \sqrt{x}$ (pt. $y > 0$). $\Rightarrow S = \int_0^1 |\sqrt{x} - x^2|\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$. Similar pentru $M = \int_0^2 |2x - x^2|\,\mathrm{d}x = \frac{4}{3}$. $T = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos^3(x)|\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot (1 - \sin^2(x))\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,\mathrm{d}x -$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\cdot\cos x\,\mathrm{d}x = [\sin x - \frac{\sin^3 x}{3}]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}.$$

345. Cum funcţia de integrat este pară obţinem $I = 2\sqrt{2}\int\limits_0^{\pi/3}\sqrt{1-\cos x}\sin x\,\mathrm{d}x$, deci

$I = \dfrac{4\sqrt{2}}{3}(1-\cos x)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\pi/3} = \dfrac{2}{3}.$

346. Graficele celor doua funcţii se intersectează în punctele de abscisă $x = 0$ şi $x = \dfrac{\sqrt{a}}{1+a}$. Aria regiunii este egală cu $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{a}}{1+a}} |f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x = \frac{a\sqrt{a}}{6(1+a)^2}$. Maximul acestei expresii se atinge pentru $a = 3$.

347. Avem $1+x \le \dfrac{1}{x}$, $\forall x \in \left[\dfrac{\sqrt{5}}{5}, \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right]$ şi $\dfrac{1}{x} \le 1+x$, $\forall x \in \left[\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}, 1\right]$, deci

$$I = \int_{\frac{\sqrt{5}}{5}}^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} (1+x)\mathrm{d}x + \int_{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}^{1} \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \left(x + \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{\frac{\sqrt{5}}{5}}^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} + \ln x\Bigg|_{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}^{1} = \frac{3+\sqrt{5}}{20} + \ln\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

348. Împărțim triunghiul in două - între punctele $x = 0, x = 1$ și $x = 1, x = 2$ și obținem două triunghiuri dreptunghice. Pentru triunghiul stâng, calculăm aria între $y = x$ și $y = 0$, iar pentru triunghiul din partea dreaptă $y = 2-x$ și $y = 0$. $S = \displaystyle\int_0^1 (x-0)\,\mathrm{d}x + \int_1^2 [(2-x)-0]\,\mathrm{d}x.$

349. Folsind inegalitatea mediilor $m_g <= m_a$, rezultă că $\big(x^2f(x) - xf^2(x)\big) = xf(x)\cdot\big(x-f(x)\big) \le x\cdot\Big(\dfrac{f(x)+x-f(x)}{2}\Big)^2 = \dfrac{x^3}{4}$. $\displaystyle\int_0^1 \big(x^2f(x)-xf^2(x)\big)\,\mathrm{d}x \le \int_0^1 \frac{x^3}{4}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{16}.$

350. Expresia de sub integrală $x\sqrt{x^{\ln x}\sqrt[3]{x^{\ln^2(x)}\sqrt[4]{x^{ln^3(x)}\sqrt[5]{\cdots}}}}$ poate fi rescrisă ca și $x^1\cdot x^{\frac{\ln x}{2}}\cdot x^{\frac{\ln^2(x)}{3\cdot 2}}\cdot\cdots = x^{\frac{1}{\ln x}\cdot\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(\ln x)^n}{n!}}$. Cum $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = e^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, avem $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^n x}{n!} = e^{\ln x} - 1 = x-1$. Astfel, $\displaystyle\int_0^1 x^{\frac{x-1}{\ln x}}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 e^{\frac{\ln x}{\ln x}(x-1)}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 e^{x-1}\,\mathrm{d}x = 1-\frac{1}{e}.$

351. $f(x) = \dfrac{f(ex)}{3}$, $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{f(ex)}{3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int_0^e f(u)\,\mathrm{d}u\cdot\frac{1}{e} = e$, $\displaystyle\int_0^e f(u)\,\mathrm{d}u = 3e^2$. Scădem din ultima integrală $\displaystyle\int_0^1 f(u)\,\mathrm{d}u = e \Rightarrow \int_1^e f(u)\,\mathrm{d}u = 3e^2 - e$

352. $\displaystyle\int_0^2 x^t\,\mathrm{d}t = \frac{x^t}{\ln x}\Big|_0^2 = 3 \Rightarrow x^2 - 1 = 3\ln x$. Notăm $f(x) = x^2-1-3\ln x$. Pentru a obține rădăcinile funcției: $f'(x) = 2x - \dfrac{3}{x} = 0 \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{3}{2} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\dfrac{3}{2}} \Rightarrow \displaystyle\sum_{k=1}^{\text{card } S} |s_k| =$

$2\sqrt{\frac{3}{2}} = \sqrt{6} \geq 2$ și $\prod\limits_{k=1}^{\text{card } S} 2^{s_k} = 2^0 = 1.$

353. $\int_x^{x^2} (2t^2+1)\cdot e^{t^2}\,\mathrm{d}t = \int_x^{x^2} 2t^2\cdot e^{t^2}\,\mathrm{d}t + \int_x^{x^2} e^{t^2}\,\mathrm{d}t$. Deoarece $\int_x^{x^2} e^{t^2}\,\mathrm{d}t$ nu este elementară, vom rescrie prima integrală ca $\int_x^{x^2} t\cdot 2t\cdot e^{t^2}\,\mathrm{d}t$. Folosind integrarea prin părți $u = 2t\cdot e^{t^2}$, rezultă că $\int_x^{x^2} 2t^2\cdot e^{t^2}\,\mathrm{d}t + \int_x^{x^2} e^{t^2}\,\mathrm{d}t = t\cdot e^{t^2} - \int_x^{x^2} e^{t^2}\,\mathrm{d}t + \int_x^{x^2} e^{t^2}\,\mathrm{d}t = t\cdot e^{t^2}\Big|_x^{x^2} = x^2e^{x^4} - xe^{x^2} = 0$, de unde obținem cele două soluții $x=0$ și $x=1$.

354. Integrala I se desparte în $\int_1^4 \frac{e^x}{x+e^x}\,\mathrm{d}x - \int_1^4 \frac{e^x}{(x+e^x)x}\,\mathrm{d}x = \int_1^4 \frac{e^x+1-1}{x+e^x}\,\mathrm{d}x - \int_1^4 \frac{e^x+x-x}{(x+e^x)x}\,\mathrm{d}x = \int_1^4 \frac{e^x+1}{x+e^x}\,\mathrm{d}x - \int_1^4 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln 4 + e^4 - \ln 1 + e - \ln 4 = \ln\left(\frac{4+e^4}{4(1+e)}\right)$, folosind substituția $t = x+e^x$.

Pentru integrala J, adunăm și scădem 2, obținând $\int_0^3 \frac{2x+2}{x^2+2x+1}\,\mathrm{d}x - 2\int_0^3 \frac{1}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \ln x^2+2x+1+\frac{2}{x+1}\Big|_0^3 = \ln\left(\frac{16}{\sqrt{e^3}}\right)$. $\boxed{\text{A}}$ este singurul răspuns corect.

355. Vom folosi substituția $u = f^{-1}(x) \Rightarrow f(u) = x \Rightarrow f'(u)\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$. Integrala devine $\int_1^e u\cdot f'(u)\,\mathrm{d}u = u\cdot f(u) - F(u)\Big|_1^e = e\cdot f(e) - 1 - f(1) = e-1$

356. Folosim substituția $u = e^{e^x} \Rightarrow du = e^{e^x}\cdot e^x\,\mathrm{d}x$. Integrala devine $\int_0^e e^u\,du = e^{e^{e^x}}\Big|_0^e = e^{e^{e^e-1}}$.

357. Folosim substituția $u = x^{\frac{3}{2}} \Rightarrow \frac{2}{3}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{2}{3}\arcsin u\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{9}$.

358. $I(0) = \int_{-1}^1 \frac{1}{2}\,\mathrm{d}x = 1$; $I(t)+I(-t) = \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{1+e^{tx}} + \frac{e^{tx}}{1+e^{tx}}\right)\mathrm{d}x = \int_{-1}^1 \mathrm{d}x = 2, \forall t\in\mathbb{R}$;

Cu schimbarea de variabilă $x=-u$, rezultă $I(-t) = I(t), \forall t\in\mathbb{R}$, deci $I(t) = 1, \forall t\in\mathbb{R}$;

Prima afirmatie este falsă.

359. $\int \frac{1}{\cos^4 x\sin^2 x}\mathrm{d}x = \int \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos^4 x\sin^2 x}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\cos^4 x}\mathrm{d}x + \int \frac{4}{\sin^2 2x}\mathrm{d}x$
$= \int \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos^4 x}\mathrm{d}x + \int \frac{4}{\sin^2 2x}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{tg}^2 x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x + \int \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x + \int \frac{4}{\sin^2 2x}\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\mathrm{tg}^3 x + \mathrm{tg}\, x - 2\mathrm{ctg}\, 2x + \mathcal{C}$. Utilizând formula Leibniz-Newton, se obţine $I = \frac{4}{3}(2\sqrt{3}-1)$.

360. Din $\int f(x)\mathrm{d}x = \int \frac{1}{(x+1)^2+1}\mathrm{d}x = \mathrm{arctg}\,(x+1)+\mathcal{C}$ rezultă, utilizând regula lui

L'Hôpital, că $L = \lim\limits_{y\to\infty} \dfrac{\operatorname{arctg}(y+1) - \dfrac{\pi}{4}}{y} = \lim\limits_{y\to\infty} \dfrac{1}{y+1} = 0.$

361. Derivând obținem $\mathrm{e}^{-x^2} > 0$, deci funcția este strict crescătoare și nu are puncte de extrem (finite).

362. Integrala se poate rescrie ca $I = \displaystyle\int_0^1 x^{\frac{-3}{4}}(x^{\frac{2}{3}}+1)^3\mathrm{d}x$. Folosind substituțiile lui Cebâșev, $m = \dfrac{-3}{4}, n = \dfrac{2}{3}$ și $p = 3$. Deci, facem schimbarea de variabilă $x = t^{12}, \mathrm{d}x = 12t^{11}\mathrm{d}t$. Astfel, $I = 12\displaystyle\int_0^1 t^2(t^8+1)^3\mathrm{d}t = 12\int_0^1 t^{26}+3t^{18}+3t^{10}+t^2\mathrm{d}t = \dfrac{18080}{1881}$ Cum $[\dfrac{18080}{1881}] = 9$, obținem varianta $\boxed{\text{C}}$ ca fiind singura corectă.

363. Integrala este, de fapt, $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{x^5}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x$. Realizăm schimbarea de variabilă $u = x^2+1$ și integrala devine $I = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_2^5 \frac{(u-1)^2}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int_2^5 u^{\frac{3}{2}} - 2u^{\frac{1}{2}} + u^{\frac{-1}{2}}\mathrm{d}u = \frac{8\sqrt{5}}{3} - \frac{7\sqrt{2}}{15}.$

364. Notăm $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\sin^n x}{2+\sin^n x+\cos^n x}\mathrm{d}x$, $n \in \mathbb{N}^*$. Schimbarea de variabilă $t = \dfrac{\pi}{2} - x$ implică $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos^n t}{2+\cos^n t+\sin^n t}\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\mathrm{d}t - I_n$, deci $I_n = \dfrac{\pi}{4}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

365. $\dfrac{x^{2n}}{1+1} \le \dfrac{x^{2n}}{1+x^2} \le \dfrac{x^{2n}}{x^2+x^2}, \forall x \in [0,1], n \in \mathbb{N}^*$, implică $\dfrac{1}{2(2n+1)} \le I_n \le \dfrac{1}{2(2n-1)}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Deci $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n = \dfrac{1}{4}$, $\lim_{n\to\infty} \dfrac{I_{n+1}}{I_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)I_{n+1}}{nI_n} = 1$. Din $I_{n+1} = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^{2n}(x^2+1)-x^{2n}}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int_0^1 x^{2n}\mathrm{d}x - I_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$, deducem $I_{n+1} + I_n = \dfrac{1}{2n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Rezultă $I_{n+1} - I_{n-1} = \dfrac{1}{2n+1} - \dfrac{1}{2n-1} = \dfrac{-2}{(2n+1)(2n-1)}, \forall n \ge 2$. Deci $\lim\limits_{n\to\infty} n^2(I_{n+1} - I_{n-1}) = -\dfrac{1}{2}$.

366. Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $x^n \ge x^{n+1}, \forall x \in [0,1]$, deci $I_n \ge I_{n+1}$. Aşadar, şirul este monoton descrescător. Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $e^{-x} \le 1, \forall x \in [0,1] \implies I_n \le \displaystyle\int_0^1 x^n\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1} \implies \lim_{n\to\infty} I_n = 0$. Integrând prin părţi, $(n+1)I_n = x^{n+1}e^{-x}\Big|_0^1 + \displaystyle\int_0^1 x^{n+1}e^{-x}\mathrm{d}x = e^{-1} + I_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$. Ţinând cont de limita anterioară, $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n = e^{-1}$. Relaţia anterioară poate fi rescrisă $\dfrac{I_n}{I_{n+1}} = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{e^{-1}}{(n+1)I_{n+1}}, \forall n \in \mathbb{N}$. Ţinând cont de limita anterioară, avem $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{I_n}{I_{n+1}} = 1$.

367. $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x - x\cos x}{x^2 + \sin^2 x} \mathrm{d}x = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x}}{\frac{x^2+\sin^2 x}{\sin^2 x}} \mathrm{d}x = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\left(\frac{x}{\sin x}\right)'}{1 + \left(\frac{x}{\sin x}\right)^2} \mathrm{d}x$

$= \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sin x}\right)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \operatorname{arctg}\left(\frac{\pi}{3} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{\pi}{4} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{2\pi\sqrt{3}}{9}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{\pi\sqrt{2}}{4}\right)$

368. Rescriem S_n ca $\int_0^{\frac{1}{\ln 2}} \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}\,\mathrm{d}x$. Schimbăm ordinea sumei și obținem $S_n = \sum_{k=1}^{n} k \int_0^{\frac{1}{\ln 2}} x^{k-1}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\ln^k x}$. Cum $\frac{1}{\ln 2}$ este mai mare decât 1, fiecare termen al sumei va fi mai mare decât cel anterior, astfel suma va crește exponențial bazată pe n. Din asta rezultă că $\lim_{x\to\infty} S_n = +\infty$. Deci $\boxed{\text{A}}$ adevărată și $\boxed{\text{B}}$ falsă. Aplicând formula termenului general într-o progresie geometrică, obținem $S_n = \frac{(\frac{1}{\ln 2})^{n+1} - \frac{1}{\ln 2}}{\frac{1}{\ln 2} - 1}$. $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{e^{n\ln 2}} \frac{1}{k} \cdot S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} \cdot S_n$. Dar cum S_n cre ște exponențial, iar $\sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k}$ crește logaritmic, produsul lor va fi divergent și va tinde spre infinit.

369. Cu schimbarea de variabilă $x = \frac{1}{t}$, $\mathrm{d}x = -\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ şi $\int\limits_{\frac{1}{2021}}^{2021} \frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{2021}^{\frac{1}{2021}} \frac{\ln\frac{1}{t}}{1+\frac{1}{t^2}} \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t = \int\limits_{\frac{1}{2021}}^{2021} \frac{\ln\frac{1}{t}}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \int\limits_{\frac{1}{2021}}^{2021} \frac{-\ln t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = -\int\limits_{\frac{1}{2021}}^{2021} \frac{\ln t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = -\int\limits_{\frac{1}{2021}}^{2021} \frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$. În consecinţă $\int\limits_{\frac{1}{2021}}^{2021} \frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 0$.

370. Folosind formula de integrare prin părţi, se obţine $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (x(\mathrm{tg}^2 x + 1) - x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x(\mathrm{tg}\, x)'\,\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{\pi}{4}} x\,\mathrm{d}x = \left(x\mathrm{tg}\, x + \ln(\cos x) - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$. Rezultă $I = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{\pi^2}{32} = \frac{8\pi - 16\ln 2 - \pi^2}{32}$. Aşadar $I < \frac{\pi}{4}$. Din faptul că $I > 0$, se obţine inegalitatea $8\pi > 16\ln 2 + \pi^2$. În concluzie, doar afirmaţia $\boxed{\mathbf{C}}$ este adevărată.

371. Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Din faptul că $0 \le x^n \mathrm{e}^x \le x^n \cdot \mathrm{e}$, oricare ar fi $x \in [0,1]$, rezultă $0 \le I_n \le \int_0^1 x^n \cdot \mathrm{e}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}}{n+1}$. Aşadar $0 \le I_n \le \frac{\mathrm{e}}{n+1}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, de unde se obţine că $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$. Afirmaţia $\boxed{\mathbf{A}}$ este deci falsă şi $\boxed{\mathbf{B}}$ adevărată.

Folosind formula de integrare prin părţi, se obţine, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, egalitatea $I_{n+1} =$

$\mathrm{e} - (n+1)I_n$, deci $nI_n = \mathrm{e} - I_n - I_{n+1}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$. Ţinând cont de faptul că $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$, prin trecere la limită cu $n \to \infty$ în egalitatea de mai sus, rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n = \mathrm{e}$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n > 2$. Afirmaţia $\boxed{\mathbf{C}}$ este deci falsă şi $\boxed{\mathbf{D}}$ adevărată.

372. Din $\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}+1}\mathrm{d}x = \operatorname{arctg} \mathrm{e}^x + \mathcal{C}$ se obţine că $I_n = \operatorname{arctg} \mathrm{e}^{n+1} - \operatorname{arctg} \mathrm{e}^n, \forall n \in \mathbb{N}$. Cum $\operatorname{arctg} x > 0$, oricare ar fi $x \in (0,\infty)$, rezultă $I_n < \operatorname{arctg} \mathrm{e}^{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$. Afirmaţia $\boxed{\mathbf{A}}$ este deci adevărată. Ţinând cont de faptul că $\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{arctg} x = \dfrac{\pi}{2}$, se deduce din I_n că $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$, prin urmare şi afirmaţia $\boxed{\mathbf{B}}$ este adevărată.

Întrucât $f'(x) < 0$, oricare ar fi $x \in (0,\infty)$, rezultă că funcţia f este strict descrescătoare pe intervalul $[0,\infty)$. De aici se obţine inegalitatea $I(n) < f(n)$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$. Aşadar afirmaţia $\boxed{\mathbf{C}}$ este falsă. Aplicând regula lui L'Hospital, se obţine $\lim_{x\to\infty} xf(x) = \lim_{x\to\infty} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}} = 0$, de unde se deduce că $\lim\limits_{n\to\infty} nf(n) = 0$. De aici şi din inegalităţile $0 \le nI(n) \le nf(n)$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} nI(n) = 0$. Afirmaţia $\boxed{\mathbf{D}}$ este deci adevărată.

373. $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^4 x \sin^2 x}\mathrm{d}x = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^4 x \sin^2 x}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\cos^4 x}\mathrm{d}x + \int \frac{4}{\sin^2 2x}\mathrm{d}x$

$\displaystyle= \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^4 x}\mathrm{d}x + \int \frac{4}{\sin^2 2x}\mathrm{d}x = \int \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x + \int \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x + \int \frac{4}{\sin^2 2x}\mathrm{d}x$

$= \dfrac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x - 2\operatorname{ctg} 2x + \mathcal{C}$. Utilizând formula Leibniz-Newton, se obţine $I = \dfrac{4}{3}(2\sqrt{3}-1)$.

374. Avem $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2+1}{e^x+x^2+2x+3}\,dx = \int_0^1 \frac{(e^x+x^2+2x+3)-(e^x+2x+2)}{e^x+x^2+2x+3}\,dx =$

$\displaystyle\int_0^1 \left(1 - \frac{(e^x+x^2+2x+3)'}{e^x+x^2+2x+3}\right)dx = \left[x - \ln\left(e^x+x^2+2x+3\right)\right]\Bigg|_0^1 = 1 - \ln(e+6) + \ln 4 =$

$1 - \ln(e+6) + 2\ln 2 = \ln\dfrac{4e}{e+6}$. Deci răspunsurile corecte sunt $\boxed{\mathrm{B}}$, $\boxed{\mathrm{D}}$.

375. Integrând prin părți obținem $\displaystyle\int x \cdot \left(\frac{-\cos x}{\sin x}\right)' ,dx = -x \cdot \frac{\cos x}{\sin x} + \int \frac{\cos x}{\sin x} ,dx \Rightarrow$

$a = \dfrac{\pi}{4} - \ln\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

376. Folosind substituția $t = \sqrt[3]{x} \Rightarrow \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+x} = \frac{3}{2}\ln 1 + \sqrt[3]{x^2} + C \Rightarrow L = \frac{3}{2}\cdot \ln 2$.

377. Folosind schimbarea de variabilă $x^5+1 = t \Rightarrow \displaystyle\int \frac{x^4}{x^{10}+2x^5+2} ,dx = \frac{1}{5}\arctan t + C \Rightarrow L = \frac{1}{5}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$.

378. Fie $b = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{\sin x + \cos x} ,dx \Rightarrow a + b = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin x \cdot \cos x) ,dx = \frac{\pi - 1}{2} \Rightarrow a =$

$$-\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3(\frac{\pi}{2}-t)}{\sin(\frac{\pi}{2}-t)+\cos(\frac{\pi}{2}-t)}\,,\mathrm{d}t \Rightarrow 2a = \frac{\pi-1}{2} \Rightarrow a = \frac{\pi-1}{4}.$$

379. $I_n - I_{n+1} = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n\cdot(1-x)\cdot(1-x^{2n+1})}{(1+x^{2n})\cdot(1+x^{2n+2})}\,,\mathrm{d}x \geq 0 \Rightarrow I_n \geq I_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}^*. \Rightarrow$ $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este descrescător $\Rightarrow I_n \leq I_1, \forall n \in \mathbb{N}^*. I_1 = \ln\sqrt{2}$. Cum $0 \leq \dfrac{x^n}{1+x^{2n}} \leq x^n \Rightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$.

380. Folosim substituția $x = \dfrac{\pi}{4} - t$. Atunci $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$ și integrala devine: $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{1+\sin 2x}\,\mathrm{d}x = -\int_{\frac{\pi}{4}}^0 \frac{\frac{\pi}{4}-t}{1+\sin\left(\frac{\pi}{2}-2t\right)}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{\pi}{4}-t}{1+\cos 2t}\,\mathrm{d}t$. Folosim formula unghiului dublu, apoi separam integrala în două părți: $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{\pi}{4}-t}{1+\cos 2t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{\pi}{4}-t}{2\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{8}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{t}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$. Pentru prima parte: $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = [\tan t]_0^{\frac{\pi}{4}} = 1$. Pentru a doua parte folosim integrarea prin părți: $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{t}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = [t\tan t]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan t\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$. Rezultatul este suma celor două părți: $I = \dfrac{\pi}{8} - \left(\dfrac{\pi}{8} - \dfrac{\ln 2}{4}\right) = \dfrac{\ln 2}{4}$

381. Folosim substituția $a - x = t$. Atunci $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$ și integrală devine: $I = -\displaystyle\int_a^{-a} \frac{t+t^3+\dots+t^{2021}}{1+t^2+\dots+t^{2022}}\,\mathrm{d}t = \int_{-a}^{a} \frac{t+t^3+\dots+t^{2021}}{1+t^2+\dots+t^{2022}}\,\mathrm{d}t$. Observăm că funcția $f(t) = \dfrac{t+t^3+\dots+t^{2021}}{1+t^2+\dots+t^{2022}}$ este impară, deoarece: $f(-t) = -f(t)$. Astfel, integrala unei funcții impare pe un interval simetric este zero: $I = \displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$

382. Folosim substituţia $t = \dfrac{\pi}{2} - x$. Știind că $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$, obţinem: $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t))\,\mathrm{d}t$. Deci, $2I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x)\cos(x))\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{1}{2}\sin(2x)\right)\mathrm{d}x$. Folosind apoi substituţia $t = 2x$, obţinem: $2I = -\dfrac{\pi}{2}\ln(2) + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\pi} \ln(\sin(t))\,\mathrm{d}t = -\frac{\pi}{2}\ln(2) + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t))\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin(t))\,\mathrm{d}t = -\frac{\pi}{2}\ln(2) + \frac{1}{2}I + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin(t))\,\mathrm{d}t$. Pentru integrala rămasă, folosim substituţia $x = t - \dfrac{\pi}{2}$. $2I = -\dfrac{\pi}{2}\ln(2) + \dfrac{1}{2}I + \dfrac{1}{2}I = -\dfrac{\pi}{2}\ln(2) + I$

În concluzie:$I = -\dfrac{\pi}{2}\ln(2)$.

383. Fie $f(x) = \dfrac{x^{2024}(1-e^x)}{1+e^x}\mathrm{d}x$. Observăm că $-f(x) = f(-x)$, adică f este o funcţie impară. Prin integrarea acesteia pe un interval simetric, vom obţine 0.

384. Folosim următoarea formulă: $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(a+b-x)\mathrm{d}x$. Obţinem, astfel:

$2I = \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} \mathrm{d}x$. Folosind schimbarea de variabilă $t = \sin x$, obţinem: $I = \frac{\pi}{4}^2$.

385. Folosim substituţia $t = \frac{\pi}{2} - x \implies \mathrm{d}t = -\mathrm{d}x$. Obţinem: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\cos t}}{\sqrt{\cos t} + \sqrt{\sin t}} \mathrm{d}t$.

Adăugând cele 2 ecuaţii pentru I, obţinem: $2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}} \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$.
In concluzie, $I = \frac{\pi}{4}$.

386. $I_n = \int_0^1 \frac{x^2+1}{(x^2+1)^n} \mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{x^2}{(x^2+1)^n} \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{(x^2+1)^{n-1}} \mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{x^2}{(x^2+1)^n} \mathrm{d}x$.

Prin părţi, $\int_0^1 \frac{x^2}{(x^2+1)^n} \mathrm{d}x = -\frac{1}{2n-2} \cdot \frac{x}{(x^2+1)^{n-1}}\Big|_0^1 + \frac{1}{2n-2} \int_0^1 \frac{1}{(x^2+1)^{n-1}} \mathrm{d}x = -\frac{2^{-n+1}}{2n-2} + \frac{1}{2n-2} I_{n-1}$. Înlocuind apoi în ecuaţia iniţială, obţinem $I_n = I_{n-1} + \frac{2^{-n+1}}{2n-2} - \frac{1}{2n-2} I_{n-1}$. În concluzie, $I_n = \frac{2^{-n+1}}{2n-2} + \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1}$. Conform Teoremei de medie, $I_n = \frac{1}{(k^2+1)^n}, k \in (0,1)$.În concluzie, $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$.

387. $I = \int_0^1 \frac{\sqrt{x} \ln(1+\sqrt{1-x})}{x} \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\ln(1+\sqrt{1-x})}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x$. Integrând prin părţi cu $u = \ln(1+\sqrt{1-x})$, $u' = \frac{-1}{(2\sqrt{1-x})(1+\sqrt{1-x})}$, $v' = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $v = 2\sqrt{x}$, avem $I = 2\sqrt{x}\ \ln(1+\sqrt{1-x})\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt{1-x})\sqrt{1-x}} \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt{1-x})\sqrt{1-x}} \mathrm{d}x$. Cu substituţia $t = \sqrt{1-x}$, $x = 1-t^2$, $\mathrm{d}x = -2t\mathrm{d}t$, integrala devine $I = \int_1^0 \frac{\sqrt{1-t^2}}{(1+t)\cdot t} \cdot (-2t)\mathrm{d}t = 2\int_0^1 \frac{\sqrt{1-t^2}}{1+t} \mathrm{d}t$. Cu substituţia $t = \sin x$, $\mathrm{d}t = \cos x \mathrm{d}x$, $I = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1-\sin^2 x}}{1+\sin x} \cdot \cos x \mathrm{d}x = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{1+\sin x} \mathrm{d}x = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin^2 x}{1+\sin x} \mathrm{d}x = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1+\sin x)(1-\sin x)}{1+\sin x} \mathrm{d}x = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin x)\mathrm{d}x = \pi - 2$.

388. Notăm cu I integrala din interiorul limitei. Cu substituţia $t = x^2$, $\mathrm{d}t = 2x\mathrm{d}x$, $I = \frac{1}{2}\int_0^{a^2} \frac{t^4}{\sqrt{1-t^2}} \mathrm{d}t$. Substituind $t = \sin u$, $\mathrm{d}t = \cos u \,\mathrm{d}u$, $I = \frac{1}{2}\int_0^{\arcsin a^2} \frac{\sin^4 u \cdot \cos u}{\sqrt{1-\sin^2 u}} \mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int_0^{\arcsin a^2} \frac{\sin^4 u \cdot \cos u}{\cos u} \mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int_0^{\arcsin a^2} \sin^4 u \,\mathrm{d}u = \frac{1}{8}\int_0^{\arcsin a^2} (1-\cos 2u)^2 \,\mathrm{d}u = \frac{1}{8} \cdot \int_0^{\arcsin a^2} (1-2\cos 2u+\cos^2 2u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{8}\int_0^{\arcsin a^2} \left(\frac{3}{2} - 2\cos 2u + \frac{1}{2}\cos 4u\right) \mathrm{d}u$. Aplicând limita, obţinem $L = (\frac{3}{16}u - \frac{1}{2}\sin 2u + \frac{1}{16}\sin 4u)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3\pi}{32}$.

389. $t = 1-x$, $\mathrm{d}t = -\mathrm{d}x$, $I = -\int_1^0 \sqrt{\frac{1-t}{t}} \ln\left(\frac{1-t}{t}\right)\mathrm{d}t = -\int_0^1 \sqrt{\frac{1-t}{t}} \ln\left(\frac{t}{1-t}\right)\mathrm{d}t$.

Prin adunare, obţinem $2I = \int_0^1 \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)\cdot\left(\sqrt{\frac{x}{1-x}} - \sqrt{\frac{1-x}{x}}\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)\cdot$ $\frac{2x-1}{\sqrt{x\cdot(1-x)}}\mathrm{d}x$. Integrând prin părţi $u = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$, $u' = -\frac{1}{(x-1)\cdot x}$, $v' = \frac{2x-1}{\sqrt{x-x^2}}$, $v = -2\sqrt{x-x^2}$. $2I = \left(\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)\cdot\left(-2\sqrt{x-x^2}\right)\right)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{2\sqrt{x-x^2}}{(x-1)\cdot x}\mathrm{d}x$ $= 2\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-x)\cdot x}}\mathrm{d}x$. Aşadar, $I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-x)\cdot x}}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}\mathrm{d}x$.

În final, cu $x - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\cdot\sin t$, $\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cos t\,\mathrm{d}t$, $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{2}\cos t}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\cdot\sin t\right)^2}}\,\mathrm{d}t$

$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sqrt{1-\sin^2 t}}\mathrm{d}t = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\cos t}\mathrm{d}t = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1\,\mathrm{d}t = \pi$.

390. Folosim substituţia $t = \frac{1}{x} \implies \mathrm{d}x = -\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$. $I = \int_{2024}^{\frac{1}{2024}} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{t^{2024}}\right)}\cdot$ $\left(-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t = \int_{2024}^{\frac{1}{2024}} \frac{-t^{2024}}{(t^2+1)(t^{2024}+1)}\mathrm{d}t = \int_{\frac{1}{2024}}^{2024} \frac{t^{2024}}{(t^2+1)(t^{2024}+1)}\mathrm{d}t$. Adunând cele două ecuaţii pentru I, obţinem $2I = \int_{\frac{1}{2024}}^{2024} \frac{1}{(1+x^2)(1+x^{2024})}\mathrm{d}x + \frac{x^{2024}}{(x^2+1)(x^{2024}+1)}\mathrm{d}x$ $= \int_{\frac{1}{2024}}^{2024} \frac{1+x^{2024}}{(1+x^2)(1+x^{2024})}\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{2024}}^{2024} \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \mathrm{arctg}(2024) - \mathrm{arctg}\left(\frac{1}{2024}\right)$. În concluzie, $I = \frac{1}{2}\left(\mathrm{arctg}(2024) - \mathrm{arctg}\left(\frac{1}{2024}\right)\right)$. Folosim următoarea formulă, $\mathrm{arctg}\ x - \mathrm{arctg}\ y = \mathrm{arctg}\left(\frac{x-y}{1+xy}\right)$, pentru $xy > -1$.

Aşadar, $I = \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\left(\frac{2024^2-1}{1012}\right)$. $\lim_{a\to\infty} \int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{1}{(1+x^2)(1+x^{2024})}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$ deoarece arctg $x \to \frac{\pi}{2}$ când $x \to \infty$.

391. Folosim următoarea formulă: $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(a+b-x)\mathrm{d}x$. Obţinem, astfel, $I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{1+e^{\sin(2\pi-x)}}\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \frac{1}{1+e^{-\sin x}}\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \frac{e^{\sin x}}{1+e^{\sin x}}\mathrm{d}x$. Adunăm cele două ecuaţii pentru I, avem: $2I = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{1+e^{\sin x}} + \frac{e^{\sin x}}{1+e^{\sin x}}\right) = \int_0^{2\pi} \frac{1+e^{\sin x}}{1+e^{\sin x}}\mathrm{d}x =$ $\int_0^{2\pi} \mathrm{d}x = 2\pi$. În concluzie, $I = \pi$.

392. Folosim următoarea formulă: $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(a+b-x)\mathrm{d}x$. Obţinem, astfel, $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{1+\cos x}{1+\sin x}\right)\mathrm{d}x = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\right)\mathrm{d}x$. Adunând cele două ecuaţii pentru

I, obţinem $2I = 0 \implies I = 0$.

393. Valoarea medie a unei funcţii continue pe un interval [a, b] este dată de valoarea $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. Pentru a o calcula, folosim metoda integrării prin părţii $u = \ln x \implies \mathrm{d}u = \frac{1}{x}, v' = \frac{1}{\sqrt{x}} \implies v = 2\sqrt{x}$. Integrala devine $I = 2\ln x \cdot \sqrt{x}\Big|_1^2 - 2\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 2\cdot\sqrt{2}\ln 2 - 4\sqrt{x}\Big|_1^2 = 2\cdot\sqrt{2}\ln 2 - 4\sqrt{2} + 4$.

394. $I_1 = \int_0^1 x^3 \cdot e^{x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 x^2 \cdot \left(e^{x^2}\right)'\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2e^{x^2}\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 2xe^{x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}e - \frac{1}{2}e^{x^2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$ Relaţia de recurenţă este $I_{n+1} = \int_0^1 x^{2n+3}e^{x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 x^{2n+2}\left(e^{x^2}\right)' = \frac{1}{2}x^{2n+2}e^{x^2}\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 (2n+2)e^{x^2}x^{2n+1}\mathrm{d}x = \frac{e}{2} - (n+1)\int_0^1 x^{2n+1}e^{x^2}\mathrm{d}x = \frac{e}{2} - (n+1)I_n \implies I_{n+1} = \frac{e}{2} - (n+1)I_n$. Limita este dată de: $0 \le x \le 1 \implies 0 \le x^2 \le 1 \implies 1 \le e^{x^2} \le e \implies x^{2n+1} \le x^{2n+1}e^{x^2} \le e\cdot x^{2n+1} \implies \frac{1}{2n+2} \le I_n \le \frac{e}{2n+2} \implies \lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0 I_{n+1} = \frac{e}{2} - (n+1)I_n \implies \lim\limits_{n\to\infty} nI_n = \frac{e}{2} - \lim\limits_{n\to\infty} I_{n+1} - \lim\limits_{n\to\infty} I_n \implies \lim\limits_{n\to\infty} nI_n = \frac{e}{2}$.

395. $I = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{e^x\cos x}{1+e^x}\mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{e^x+1-1}{e^x+1}\cdot\cos x\mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\cos x\mathrm{d}x - \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos x}{e^x+1}\mathrm{d}x = \sin x\Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} - \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos x}{e^x+1}\mathrm{d}x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \int_{\frac{\pi}{6}}^{-\frac{\pi}{6}}\frac{\cos t}{e^{-t}+1}(-\mathrm{d}t) = 1 - \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{e^t\cdot\cos t}{e^t+1}\mathrm{d}t = 1 - I$.
Aşadar, $I = 1 - I \implies 2I = 1 \implies I = \frac{1}{2}$.

396. $f : \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \to \mathbb{R}, f(x) = x^5 - 2\ln\frac{x-1}{x+1}$ $f(-x) = -x^5 - 2\ln\frac{1+x}{1-x} = -x^5 + 2\ln\frac{1-x}{1+x} = -\left(x^5 - 2\ln\frac{1-x}{1+x}\right) = -f(x) \implies I = 0$.

397. $f(x) = \begin{cases} 3^{-x} \text{ dacă } 3^{-x} \ge 3^x \implies -2x \ge 0 \implies x \in [-1, 0] \\ 3^x \text{ dacă } 3^{-x} < 3^x \implies -2x < 0 \implies x \in [0, 1] \end{cases}$. $\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^0 3^{-x}\mathrm{d}x + \int_0^1 3^x\mathrm{d}x = \frac{-3^{-x}}{\ln 3}\Big|_{-1}^0 + \frac{3^x}{\ln 3}\Big|_0^1 = \frac{-1}{\ln 3} + \frac{3}{\ln 3} + \frac{3}{\ln 3} - \frac{1}{\ln 3} = \frac{4}{\ln 3}$.

398. Observăm că termenul general a_n se poate rescrie astfel: $a_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^n\sqrt{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2}$.

Aşadar, a_n reprezintă suma Riemann asociată funcţiei $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, diviziunii $\Delta_n = \left(0, \frac{1}{n}, ..., \frac{n}{n}\right)$ şi sistemului de puncte intermediare $\xi_n = \left(\frac{1}{n}, ..., \frac{n}{n}\right)$.

Cum f este integrabilă, rezultă că şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este convergent şi avem că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$.

399. Termenul general se poate rescrie ca $n\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2+kn+k^2} = n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2(1+\frac{k}{n}+\frac{k^2}{n^2})} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}+\frac{k^2}{n^2}}$, așadar ca suma Riemann asociată funcției $f:[0,1]\to\mathbb{R}, f(x) = \dfrac{1}{x^2+x+1}$, diviziunii $\Delta_n = \left(0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},\dots,\frac{n-1}{n},1\right)$ a intervalului $[0,1]$ și sistemului de puncte intermediare $\xi_n = \left(\frac{1}{n},\frac{2}{n},\dots,\frac{n-1}{n},1\right)$. Avem $\lim\limits_{n\to\infty}||\Delta_n|| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n} = 0$ și, cum f este integrabilă, $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_{\Delta_n}(f,\xi_n) = \displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1\frac{1}{x^2+x+1}\mathrm{d}x = \int_0^1\frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\mathrm{d}x$.
Cu $t = x+\dfrac{1}{2}$, $\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$, avem $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\frac{1}{t^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}\mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2t}{\sqrt{3}}\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

400. Termenul general a_n se poate rescrie astfel: $a_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2+\frac{k}{n}}$. Aşadar, a_n reprezintă suma Riemann asociată funcţiei $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{2+x}$, diviziunii $\Delta_n = \left(0,\frac{1}{n},...,\frac{n}{n}\right)$ şi sistemului de puncte intermediare $\xi_n = \left(\frac{1}{n},...,\frac{n}{n}\right)$. Cum f este integrabilă, rezultă că şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este convergent şi avem că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \ln\frac{3}{2} > \ln 1 = 0$. Folosim inegalitatea: $\forall x\geq 0$, $\ln(1+x)\leq x$ pentru $x = \dfrac{1}{2}$ și obținem $\ln\dfrac{3}{2}\leq\dfrac{1}{2}$.

401. Avem $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\ln\sqrt[n]{1+\frac{2k}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\Big(1+\frac{2k}{n}\Big) = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\Big(1+\frac{2k}{n}\Big) = \int_1^3\ln x\,\mathrm{d}x = \Big[\frac{1}{2}x(\ln x-1)\Big]_1^3 = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot(\ln 3-1) - \frac{1}{2}\cdot 1\cdot(\ln 1-1) = \frac{3}{2}\ln 3 - 1$.

402. $\ell = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{ne^{k/n}+k}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{e^{k/n}+\frac{k}{n}}} = \int_0^1\frac{1}{\sqrt{e^x+x}}\,\mathrm{d}x$. Considerăm funcția $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{e^x+x}}$, care este continuă pe $[0,1]$. Fiindcă funcția este strict descrescătoare pe $[0,1]$, avem: $\max\limits_{x\in[0,1]} f(x) = f(0) = \dfrac{1}{\sqrt{1}} = 1$ și $\min\limits_{x\in[0,1]} f(x) = f(1) = \dfrac{1}{\sqrt{e+1}}$. Prin urmare $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{\sqrt{e+1}}\,\mathrm{d}x \leq \int_0^1\frac{1}{\sqrt{e^x+x}}\,\mathrm{d}x \leq \int_0^1 1\,\mathrm{d}x$ și obținem $\dfrac{1}{\sqrt{e+1}}\leq\ell\leq 1$.

403. $\lim\limits_{n\to\infty}\Big(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+3^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+6^2}}+\dots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+(3n)^2}}\Big) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{3k}{n}\right)^2}} =$

$\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{3k}{n}\right)^2}} = \frac{1}{3}\int_0^3\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$. Evaluăm integrala: $\int_0^3\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x =$ $\left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]_0^3 = \ln\left(3+\sqrt{10}\right)-\ln 1 = \ln\left(3+\sqrt{10}\right)$. Astfel, rezultatul final este: $\frac{1}{3}\ln\left(3+\sqrt{10}\right)$.

404. Rescriem limita astfel: $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{e^{\sqrt{2}\frac{k}{n}}}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}e^{\sqrt{2}\frac{k}{n}} = \int_0^1 e^{\sqrt{2}x}\,\mathrm{d}x$. Calculăm această integrală: $\int_0^1 e^{\sqrt{2}x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\sqrt{2}x}\right]_0^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}e^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{\sqrt{2}}-1\right)$.

405. $\ell = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(n-\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^2+k^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k^2}{n^2+k^2}\right)\right)$

$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n^2}{n^2+k^2}\right)\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k^2}{n^2}}\right)$. Observăm că limita este o sumă Riemann: $\ell = \int_0^1\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \operatorname{arctg} x\Big|_0^1 = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4} = \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}$.

406. Putem rescrie termenul general astfel: $a_n = \frac{1}{n}\cdot\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^p} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^p$.

Se observă suma Riemann asociată funcţiei integrabile $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^p$, diviziunii $\Delta_n = \left(0,\frac{1}{n},...,\frac{n}{n}\right)$ şi sistemului de puncte intermediare $\xi_n = \left(\frac{1}{n},...,\frac{n}{n}\right)$. Așadar, trecând la limită obținem: $\lim_{n\to\infty}a_n = \int_0^1 x^p\mathrm{d}x = \frac{x^{p+1}}{p+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{p+1}$.

407. Vom rescrie suma din limită într-o sumă Riemann atașată funcției $f:[0,5]\to\mathbb{R}$, $f(x) = \frac{4x+3}{2x+1}$: $\sum_{i=1}^{n}\frac{100i+15n}{n^2+10in} = \sum_{i=1}^{n}\frac{5}{n}\cdot\frac{20i+3n}{n+10i} = \sum_{i=1}^{n}\frac{5}{n}\cdot\frac{20\frac{i}{n}+3}{10\frac{i}{n}+1} = \sum_{i=1}^{n}\frac{5}{n}\cdot$ $\frac{4\cdot\frac{5i}{n}+3}{2\cdot\frac{5i}{n}+1}$. Am obținut astfel suma Riemann atașată lui f, diviziunii $\Delta_n = \left(0,\frac{5}{n},...,\frac{5n}{n}\right)$ şi sistemului de puncte intermediare $\xi_n = \left(\frac{5}{n},...,\frac{5n}{n}\right)$. Trecând la limită obținem:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{100i+15n}{n^2+10in} = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{5}{n}\cdot\frac{4\cdot\frac{5i}{n}+3}{2\cdot\frac{5i}{n}+1} = \int_0^5\frac{4x+3}{2x+1}\mathrm{d}x = \int_0^5\frac{2(2x+1)+1}{2x+1}\mathrm{d}x =$$
$$\int_0^5(2+\frac{1}{2x+1})\mathrm{d}x = (2x+\ln 2x+1)\Big|_0^5 = 10+\frac{1}{2}\ln 11.$$

408. Folosind suma Riemann cu diviziunea $\{\frac{7k}{n}\mid k=\overline{0,n}\}$ și sistemul de puncte intermediare $\{\frac{7k}{n}\mid k=\overline{0,n-1}\}$ pentru funcția $f:[0,7]\to\mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$, limita șirului este

$\int_0^7 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x}} = 2(2\sqrt{2}-1)$.

409. Observăm că suma B este suma Riemann atașată funcției integrabile $f : [1,5] \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt[4]{1+x^3}$, diviziunii $\Delta_n = \left(1, 1+\frac{4}{n}, ..., 1+\frac{4n}{n}\right)$ şi sistemului de puncte intermediare $\xi_n = \left(1+\frac{4}{n}, ..., 1+\frac{4n}{n}\right)$, așadar limita sumei va fi integrala lui f pe [1,5].

410. $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k}{n}\sin\frac{kx}{n} = \int_0^1 t\sin(xt)\mathrm{d}t$, $f(x) = -\frac{t\cos(xt)}{x}\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{\cos(xt)}{x}\mathrm{d}t$ $= -\frac{\cos x}{x} + \frac{\sin x}{x^2}, \forall x \in \mathbb{R}^*$. Afirmația $\boxed{\text{A}}$: $\int_0^\pi x^2 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^\pi (-x\cos x + \sin x)\mathrm{d}x = 4 \in \mathbb{Q}$. Afirmația $\boxed{\text{B}}$: $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{x^2} \overset{\text{L'Hôspital}}{=} \lim\limits_{x\to 0}\frac{-x\sin x}{2x} = 0$. Afirmația $\boxed{\text{C}}$: f este continuă pe $(0,\infty)$, deci va admite primitive pe acest interval.

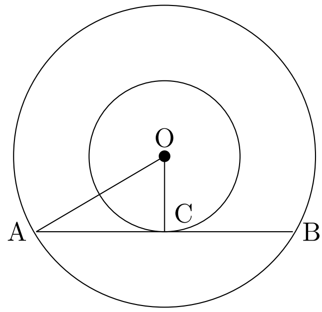
411. $\lim\limits_{n\to\infty} n\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2+3kn+2n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} n\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2(2+\frac{3k}{n}+\frac{k^2}{n^2})} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{2+\frac{3k}{n}+\frac{k^2}{n^2}}$.

Fie funcția $f : [0,1] \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x^2+3x+2}$, f continuă și integrabilă pe $\mathbb{R}$. Pentru fiecare n se consideră diviziunea $\Delta_n = (0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1)$ a intervalului $[0,1]$ și $\xi_n = (\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1)$ sistemul de puncte intermediare asociat diviziunii Δ_n. Pentru fiecare n, termenul x_n este suma Riemann asociată funcției f, diviziunii Δ_n şi sistemului de puncte intermediare ξ_n, adică $x_n = \sigma_{\Delta_n}(f,\xi_n)$. Avem $\lim\limits_{n\to\infty}||\Delta_n|| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$ și, cum f este integrabilă, $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_{\Delta_n}(f,\xi_n) = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{x^2+3x+2}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x+2)}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{x+1}\mathrm{d}x - \int_0^1\frac{1}{x+2}\mathrm{d}x = \ln\frac{4}{3}$.

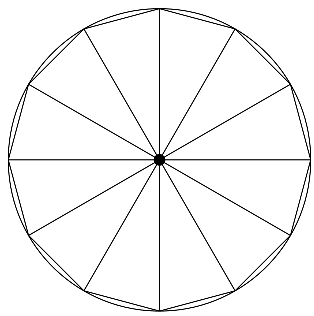
412. Înmulțim x_n cu π: $\pi x_n = \frac{\pi}{n}\Big(\sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \cdots + \sin\frac{(n-1)\pi}{n}\Big)$. Pentru fiecare n, considerăm diviziunea $\Delta_n = \left(0, \frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}, \ldots, \frac{(n-1)\pi}{n}, \pi\right)$ intervalului $[0,\pi]$ și punctele intermediare $\xi_k = \frac{k\pi}{n}$ pentru $k = 1, 2, \ldots, n-1$: $\pi x_n = \frac{\pi}{n}\cdot\sum\limits_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$. Observăm că această sumă este o sumă Riemann pentru funcția $f(x) = \sin x$ pe intervalul $[0,\pi]$. Astfel, $\lim\limits_{n\to\infty}\pi x_n = \int_0^\pi \sin x\, dx$. Calculăm integrala: $\int_0^\pi \sin x\, dx = \Big[-\cos x\Big]_0^\pi = -\cos\pi - (-\cos 0) = 1 + 1 = 2$. Prin urmare, $\pi\ell = 2 \implies \ell = \frac{2}{\pi}$. Deci afirmația $\boxed{\text{C}}$ este adevărată.

413. Din imaginea de mai jos se poate observa relația dintre cercurile C_i și C_{i+1}, unde $OC = R_i$ (raza cercului C_i), $OA = R_{i+1}$ (raza cercului C_{i+1}), $AC = CB = 4$. De asemenea, triunghiul AOC este dreptunghic în C de unde rezultă relația între razele cerurilor

C_i și $C_{i+1} : R_{i+1}^2 = R_i^2 + 4^2$. Prin inducție se arată că $R_i^2 = 4 + 16 \cdot (i - 1)$.



414. Aria suprafeței colorate este egală cu diferenţa dintre aria cercului de rază 1 şi aria poligonului. Aria poligonului este de 12 ori mai mare decât aria triunghiului isoscel intern cu cele 2 laturi egale de lungime 1 (raza cercului) și ungiul dintre acestea egal cu $30°$. De aici rezultă uşor că $\mathcal{A} = \pi - 12 \cdot \dfrac{1 \cdot 1 \cdot \sin(30°)}{2} = \pi - 3$.

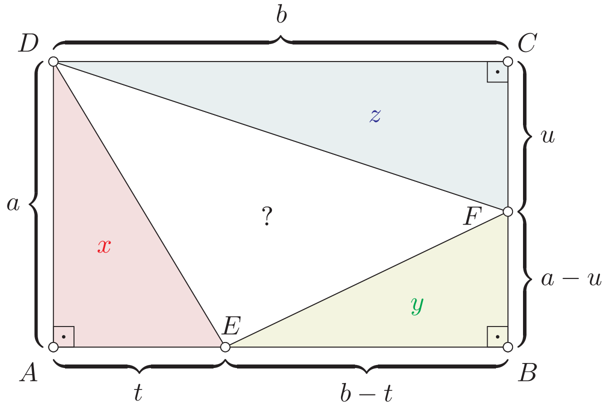


415. Laturile unui triunghi trebuie să respecte inegalitatea $a + b > c$, unde a,b și c sunt lungimile laturilor. De aici rezultă $x > 20-11, x > 9$ și $20+11 > x, 31 > x => x \in (9, 31)$. Din variantele de răspuns, doar $x = 10$ este corectă.

416. Laturile triunghiului $f(T)$ sunt liniile mijlocii ale triunghiului T. Prin urmare, T şi $f(T)$ sunt triunghiuri asemenea, deci $\boxed{\text{A}}$ este adevărată. Centrul de greutate al triunghiului T este intersecţia medianelor. Deoarece mediana unei laturi înjumătăţeşte linia mijlocie paralelă cu latura, medianele lui $f(T)$ sunt incluse in cele ale lui T. Deci T şi $f(T)$ au acelaşi centru de greutate. Prin inducţie obţinem că $\boxed{\text{B}}$ este adevărată.

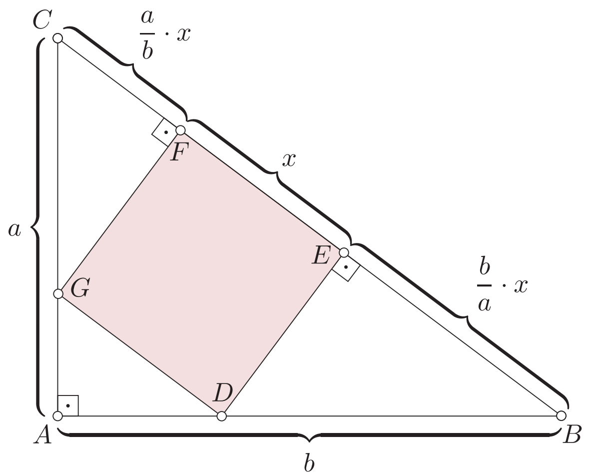
Centrul cercului circumscris este intersecţia mediatoarelor laturilor, iar în cazul unui triunghi dreptunghic, se află pe ipotenuză. Deci, dacă T este dreptunghic, T şi $f(T)$ au ipotenuze paralele, deci $\boxed{\text{C}}$ este falsă. Centrul de greutate al triunghiului indicat este $\left(\frac{1+5-6}{3}, \frac{3-4+1}{3}\right)$ deci $\boxed{\text{D}}$ este adevărată.

417.



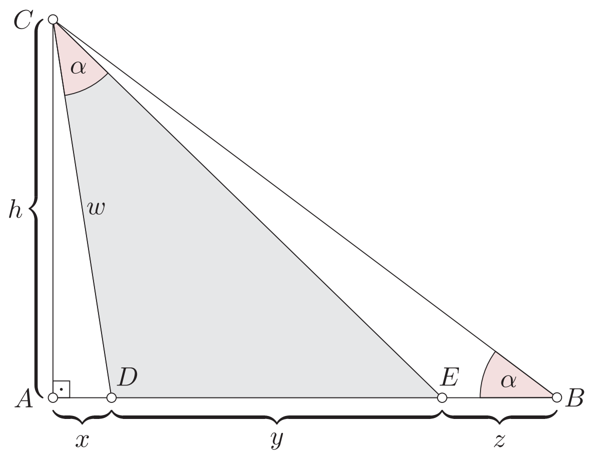
Dacă urmărim notaţiile figurii, atunci: $\mathcal{A}\left[AED_{\Delta}\right] = x = \frac{at}{2} \to t = \frac{2x}{a}$, $\mathcal{A}\left[CDF_{\Delta}\right] = z = \frac{bu}{2} \to u = \frac{2z}{b}$, $\mathcal{A}\left[BFE_{\Delta}\right] = y = \frac{1}{2}\left(b-t\right)\left(a-u\right) = \frac{1}{2}(b-\frac{2x}{a})(a-\frac{2z}{b})$, $2\left(ab\right)y = ab\left(b-\frac{2x}{a}\right)\left(a-\frac{2z}{b}\right) = ab(b-\frac{2}{a}x)(a-\frac{2}{b}z) = \left(ab\right)^2 - 2\left(ab\right)\left(x+z\right) + 4xz$,
$m := \mathcal{A}\left[ABCD_{\square}\right] = ab$, $m^2 - 2m\left(x+y+z\right) + 4xz = 0$, $\Delta = 4\left(x+y+z\right)^2 - 16xz = 4\left[\left(x+y+z\right)^2 - 4xz\right] \overset{2\sqrt{xz}<x+y+z}{>} 0$, $m_{1,2} = \frac{2\left(x+y+z\right) \pm 2\sqrt{\left(x+y+z\right)^2 - 4xz}}{2} = x+y+z \pm \sqrt{\left(x+y+z\right)^2 - 4xz}$, $\mathcal{A}\left[ABCD_{\square}\right] > x+y+z \Longrightarrow m = m_2 = x+y+z+\sqrt{\left(x+y+z\right)^2 - 4xz}$, $\mathcal{A}\left[DEF_{\Delta}\right] = \mathcal{A}[ABCD_{\square}] - (x+y+z) = m - (x+y+z) = \sqrt{(x+y+z)^2 - 4xz}$.

418. Problema se poate rezolva folosind triunghiuri asemenea, iar o posibilă soluţie este schiţată în figura următoare:

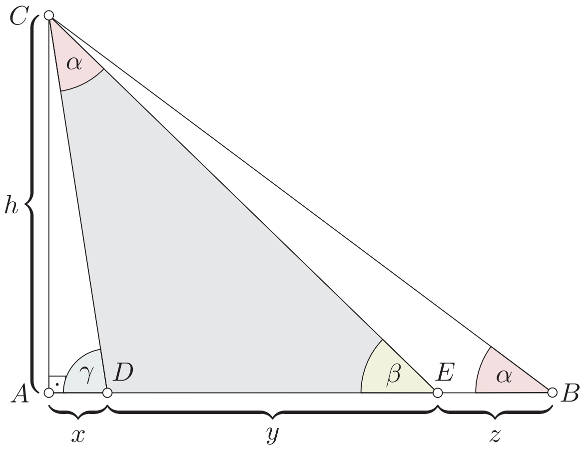


$$\frac{a}{b} \cdot x + x + \frac{b}{a} \cdot x = \sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow x = \frac{ab\sqrt{a^2+b^2}}{a^2+ab+b^2} \Rightarrow x^2 = \frac{a^2b^2\left(a^2+b^2\right)}{\left(a^2+ab+b^2\right)^2}$$

419. **Metoda 1.** Folosim notaţiile: $w = CD$, $h = AC$. În acest caz, ideea rezolvării problemei este aceea de a observa că triunghiurile DBC_Δ şi DCE_Δ sunt asemenea, de unde se obţine că: $\frac{w}{y} = \frac{y+z}{w} \Rightarrow w^2 = y\,(y+z) \Rightarrow h^2 = w^2 - x^2 = y^2 + zy - x^2 \Rightarrow$
$\mathcal{A}\left[CDE_\Delta\right] = \frac{y \cdot h}{2} = \frac{y}{2} \cdot \sqrt{y^2 + yz - x^2}$.



Metoda a 2-a. În acest caz, vom folosi identitatea trigonometrică $\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha)\cdot\tan(\beta)}$, unde $\beta = \widehat{CED}$.

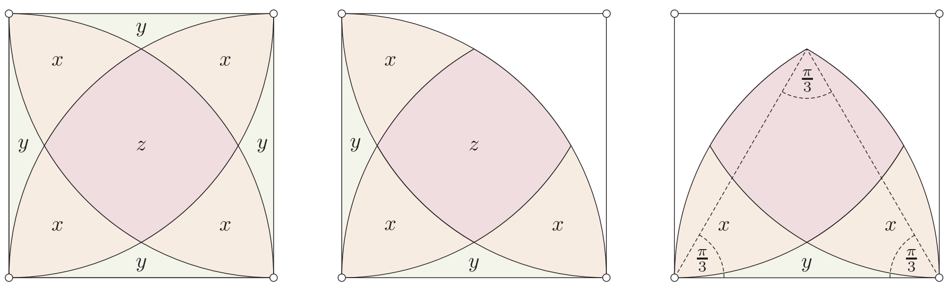


Notând cu γ unghiul $\widehat{ADC} = \pi - \widehat{CDE} = \pi - [\pi - (\alpha + \beta)] = \alpha + \beta$, din triunghiurile dreptunghice ABC_Δ, AEC_Δ şi ADC_Δ obţinem că: $\tan(\alpha) = \dfrac{h}{x+y+z}$, $\tan(\beta) = \dfrac{h}{x+y}$, $\tan(\gamma) = \dfrac{h}{x}$. Avem $\dfrac{h}{x} = \tan(\gamma) = \tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha)\cdot\tan(\beta)}$

$$= \frac{\dfrac{h}{x+y+z} + \dfrac{h}{x+y}}{1 - \dfrac{h}{x+y+z} \cdot \dfrac{h}{x+y}} = \frac{(2(x+y)+z)\,h}{(x+y)^2 + z(x+y) - h^2},$$

$h^2 = (x+y)^2 + z(x+y) - (2(x+y)+z)\,x = y^2 + zy - x^2$, $h = \sqrt{y^2+zy-x^2}$.

420. Soluția este ilustrată în figura de mai jos:



$4x + 4y + z = d^2$ $\quad$ $3x + 2y + z = \frac{d^2\pi}{4}$ $\quad$ $2x + y + z = \left(\frac{d^2\pi}{6} - \frac{d^2\sqrt{3}}{4}\right) + \frac{d^2\pi}{6} = \frac{d^2\pi}{3} - \frac{d^2\sqrt{3}}{4}$

Soluţia sistemului $\begin{cases} 4x + 4y + z = d^2 \\ 3x + 2y + z = \dfrac{\pi}{4} \cdot d^2 \\ 2x + y + z = \left(\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{4}\right) \cdot d^2 \end{cases}$ este $\begin{cases} x = \left(\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} - 1\right) \cdot d^2, \\ y = \left(1 - \dfrac{\sqrt{3}}{4} - \dfrac{\pi}{6}\right) \cdot d^2, \\ z = \left(\dfrac{\pi}{3} - \sqrt{3} + 1\right) \cdot d^2. \end{cases}$

421. Notăm cu h_a, h_b, h_c lungimea înălțimilor din A, B, respectiv C și cu S aria triunghiului ABC. Avem că $S = \dfrac{ah_a}{2} \Rightarrow \dfrac{1}{h_a} = \dfrac{a}{2S} \Rightarrow \dfrac{1}{h_a} = \dfrac{a}{\dfrac{bh_b}{2} + \dfrac{ch_c}{2}}$. Cum $m(\hat{A}) = \dfrac{\pi}{3}$, rezultă că $h_b = c\sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}c$, $h_c = b\sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}b \Rightarrow \dfrac{1}{h_a} = \dfrac{2a}{\dfrac{bc\sqrt{3}}{2} + \dfrac{bc\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{2a}{bc\sqrt{3}}$ $\Rightarrow \dfrac{1}{h_a^2} = \dfrac{4}{3} \cdot \dfrac{a^2}{b^2c^2}$ Putem exprima a^2 în funcție de b și c folosind teorema cosinusului: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A = b^2 + c^2 - bc \Rightarrow \dfrac{1}{h_a^2} = \dfrac{4}{3} \cdot \dfrac{b^2+c^2-bc}{b^2c^2} = \dfrac{4}{3}(\dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2} - \dfrac{1}{bc})$. Înlocuind în această ultimă relație cu valorile date, obținem: $\dfrac{1}{h_a^2} = \dfrac{4}{3}(\dfrac{1}{4} + 1 - \dfrac{1}{2}) = \dfrac{4}{3} \cdot \dfrac{3}{4} = 1 \Rightarrow h_a = 1$.

422. Cum D se afla pe segmentul AB putem aplica teorema lui Stewart în $\triangle ABC$: $AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot DB = BC(AD^2 + DB \cdot DC) \Rightarrow AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot DB - AD^2 \cdot BC = BC \cdot DB \cdot DC \Rightarrow (r_1+r_3)^2 r_1 + (r_2+r_3)^2 r_2 - (r_1+r_2-r_3)^2(r_1+r_2) = (r_1+r_2)r_2r_1 \iff r_1^3 + 2r_1^2r_3 + r_1r_3^2 + r_2^3 + 2r_2^2r_3 + r_2r_3^2 - (r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + 2r_1r_2 - 2r_2r_3 - 2r_1r_3)(r_1+r_2) = r_1^2r_2 + r_1r_2^2$ $\iff r_1^2r_3 + r_2^2r_3 + r_1r_2r_3 = r_1^2r_2 + r_1r_2^2$. În această ultimă egalitate putem înlocui r_1 și r_3 cu valorile lor numerice și vom obține: $4r_3 + r_3 + 2r_3 = 4 + 2 \iff 7r_3 = 6 \iff r_3 = \dfrac{6}{7}$.

423. Cunoscând lungimea unei laturi într-un triunghi echilateral putem afla aria acestuia: $s = \dfrac{l^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{48\sqrt{3}}{4} = 12\sqrt{3}$. Considerăm acum cele 3 triunghiuri interioare lui ABC formate folosind punctul P ca unul din vârfuri: APB, BPC, CPA. Aria lui ABC va fi suma ariilor acestor 3 triunghiuri. Ariile a două dintre ele pot fi determinate: $s_1 = \dfrac{1 \cdot 4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}, s_2 = \dfrac{3 \cdot 4\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$. Fie x lungimea celei de a treia perpendiculare. Aria celui de al treilea triunghi este: $s_3 = \dfrac{x \cdot 4\sqrt{3}}{2} = 2x\sqrt{3}$ $\Rightarrow 2\sqrt{3} + 6\sqrt{3} + 2x\sqrt{3} = 12\sqrt{3} \Rightarrow x = 2$.

424. Fie s aria triunghiului ABC. Fie de asemenea O centrul semicercului, D punctul de tangență pe AB și E punctul de tangență pe BC. Din proprietățile cercului, știm că $OD \perp AB$ și că $OE \perp BC$. Așadar, putem exprima aria s în următoarele moduri: $s = \dfrac{AB \cdot BC}{2} = \dfrac{OD \cdot AB}{2} + \dfrac{OE \cdot BC}{2} \Rightarrow AB \cdot BC = r \cdot AB + r \cdot BC \Rightarrow r = \dfrac{AB \cdot BC}{AB + BC} = \dfrac{12}{7}$ Din teorema lui Pitagora avem că $AC = 5$. $p = \dfrac{2r}{AC} = \dfrac{24}{7 \cdot 5} = \dfrac{24}{35} > \dfrac{24}{36} = \dfrac{2}{3}$.

425. Presupunem că ABC este un triunghi nedegenerat. Cum $AN = BN$ şi N este mijlocul lui BC atunci $AN = BN = NC$. Fie acum $x = m(\measuredangle BAN)$ şi $y = m(\measuredangle CAN)$. Cum triunghiurile ANB şi ANC sunt isoscele vom avea că $m(\measuredangle B) = x$ şi $m(\measuredangle C) = y$, dar $m(\measuredangle A) = m(\measuredangle BAN) + m(\measuredangle CAN) = x + y$. Acum folosind faptul că suma măsurilor unghiurilor unui triunghi este π radiani, obţinem că: $(x+y)+x+y = \pi \Rightarrow x+y = \frac{\pi}{2}$, deci $m(\measuredangle A) = \frac{\pi}{2}$. În mod analog se obţine că $m(\measuredangle C) = \frac{\pi}{2}$, deci $m(\measuredangle B) = 0$, deci triunghiul ABC este degenerat.

426. Fie $a = BC$, $b = AC$ şi $c = AB$. Folosind teorema lui Pitagora avem că $b^2 + c^2 = a^2 = 25$. Aria triunghiului ABC este $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c$. Acum folosind inegalitatea dintre media geometrică şi cea pătratică obţinem că: $\sqrt{b \cdot c} \leq \sqrt{\frac{b^2 + c^2}{2}} \Leftrightarrow b \cdot c \leq \frac{b^2 + c^2}{2} = \frac{25}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \leq \frac{25}{4} \Leftrightarrow \mathcal{A}_{ABC} \leq \frac{25}{4}$. Deci aria maximă este $\frac{25}{4}$ şi se atinge în cazul egalităţii $b = c$, deci în cazul în care triunghiul ABC este dreptunghic isoscel.

427. Relaţia $3b^2 + 3c^2 = 2\sqrt{3}bc + 3a^2$ se poate rescrie $\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Din teorema cosinusului pentru unghiul A deducem $\cos A = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Cum $\sin A > 0$, se află $\operatorname{tg} A = \sqrt{2}$.

428. Din teorema lui Pitagora aplicată în triunghiul $\triangle ABC \Rightarrow BC = \sqrt{AC^2 + AB^2} \Rightarrow BC = 10$. De asemenea, avem $AD = \frac{BC}{2} = 5$, de unde $\triangle ADB$ isoscel şi, folosind reciproca teoremei unghiului de $30°$, deducem şi că $m(\angle B) = \frac{\pi}{6}$. Aplicând relația dată se obţine $\frac{AD^2 + DB^2 - AB^2}{2AD \cdot DB} = -\frac{1}{2} = \cos D => \sin D = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Din teorema sinusului în triunghiul $\triangle ADB$ rezultă $\frac{AB}{\sin D} = 2R \Rightarrow R = 5 \neq 4$.

429. Fie $AD = b, BD = a, AB = d$. Relația dată devine $a(a - \sqrt{2}b) = (d - b)(d + b) \Leftrightarrow a^2 - ab\sqrt{2} = d^2 - b^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 - d^2 = \sqrt{2}ab \Leftrightarrow \frac{a^2 + b^2 - d^2}{2ab} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos ADB \Rightarrow m(\angle ADB) = \frac{\pi}{4}$. Acum se poate calcula uşor că $m(\angle A) = \frac{\pi}{4}$.

430. Fie $AB = c, BC = a, AC = b$. Aplicăm teorema cosinusului pentru unghiul C şi avem $\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Dacă înlocuim cu formele de la $\boxed{\text{A}}$ sau $\boxed{\text{B}}$ ajungem la ecuaţii de gradul 2 în m care fie nu au soluţii reale (în cazul $\boxed{\text{A}}$), fie au soluţii reale negative (în cazul $\boxed{\text{B}}$). Înlocuind cu forma din $\boxed{\text{C}}$ se ajunge la o ecuaţie de gradul 4 în m şi se poate arăta că aceasta are 2 soluţii reale. Dintre acestea, o soluţie este mai mare decât 3, iar pentru această valoare BC, AC şi AB pot fi laturile unui triunghi, deoarece verifică inegalitatea triunghiului. Aşadar nici $\boxed{\text{C}}$ nu este corect. Raspunsul corect este $\boxed{\text{D}}$.

431. Ţinând cont de lungimile lui BC şi AC, triunghiul nu poate fi echilateral, deci $\boxed{\text{B}}$ este adevărat. Calculăm lungimea lui AB folosind teorema cosinusului pentru unghiul C şi obţinem $\dfrac{(m^2+1)(m^2+1)+(m^2-\frac{1}{2})^2-c^2}{2(m^2+1)(m^2-\frac{1}{2})} = \dfrac{1}{2}$, de unde rezultă $c^2 = m^4 + \dfrac{7}{4} - \dfrac{1}{2}m^2 = AB^2$. Aşadar şi $\boxed{\text{C}}$ este corect.

432. Notăm $AB = c, AC = b, BC = a$. Relaţia dată devine $\sqrt{2}(1-\dfrac{b}{c+b}) - \dfrac{a}{c+b} = \dfrac{c-b}{a}$. Ultima este echivalentă cu $\sqrt{2} - \dfrac{\sqrt{2}b}{c+b} - \dfrac{a}{c+b} = \dfrac{c-b}{a} \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{2}c-a}{c+b} = \dfrac{c-b}{a} \Leftrightarrow a(\sqrt{2}c-a) = c^2-b^2 \Leftrightarrow \sqrt{2}ac - a^2 = c^2 - b^2 \Leftrightarrow \dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Acum, folosind teorema cosinusului deducem că $m(\angle B) = 45^\circ$, de unde rezultă raspunsul.

433. Fie $AB = c, AC = b, BC = a, c = b$. Relaţia din ipoteză se scrie $2 + \dfrac{(a-c)(a+b)}{2b^2} = 0$. Aceasta este echivalentă cu $2 + \dfrac{a^2-b^2}{2b^2} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{a^2-3b^2}{2b^2} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{a^2}{2b^2} - 1 = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 1 - \dfrac{a^2}{2b^2} = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{2b^2-a^2}{2b^2} = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = -\dfrac{1}{2}$. Folosind teorema cosinusului deducem $m(\angle A) = \dfrac{2\pi}{3}$.

434. Fie $a = m^2+m+1, b = 2m+1, c = m^2-1$ lungimile laturilor BC, CA şi respectiv AB. Aplicăm teorema cosinusului unghiului A şi deducem că oricare ar fi $m \in (1,\infty)$, avem $\cos\angle A = \dfrac{(m^2-1)^2+(2m+1)^2-(m^2+m+1)^2}{2(m^2-1)(2m+1)} = -\dfrac{2m^3-2m+m^2-1}{2(2m^3-2m+m^2-1)} = -\dfrac{1}{2}$. Rezultă că oricare ar fi $m \in (1,\infty)$, avem $m(\angle A) = \dfrac{2\pi}{3}$. Dacă exprimăm cosinusurile altor unghiuri, se observă că expresiile nu vor fi constante pentru $m \in (1,\infty)$. Aşadar singurul răspuns este $\boxed{\text{B}}$.

435. Rescripem $\operatorname{ctg}(\angle ABC) = \sqrt{3}\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{2}^2 - \sqrt{2}$ Adică $\operatorname{ctg}(\angle ABC) = \sqrt{3}(\sqrt{2}-1) + \sqrt{2}(\sqrt{2}-1) \Leftrightarrow \operatorname{ctg}(\angle ABC) = (\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-1) = \dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{\sin 45^\circ - \sin 30^\circ}{\sin 60^\circ - \sin 45^\circ} = \dfrac{\cos\frac{75^\circ}{2}}{\sin\frac{75^\circ}{2}}$. Aşadar $\operatorname{ctg}\dfrac{75^\circ}{2}$. Cum ctg este bijectivă pe $(0,\pi)$, deducem că $m(\angle ABC) = \dfrac{75^\circ}{2} = 37^\circ 30'$.

436. Se folosește relația $a+b=180-c$. De aici rezultă relațiile $\sin\dfrac{a+b}{2}=\cos\dfrac{c}{2}$. Aşadar $\boxed{\text{B}}$ este adevărată. Similar, $\boxed{\text{C}}$ este adevăratăm. Cum $0\leq\dfrac{c}{2}\leq\pi$, avem $\dfrac{c}{2}=\arccos\left(\cos\dfrac{a+b}{2}\right)$. Aşadar $\boxed{\text{A}}$ şi $\boxed{\text{D}}$ sunt afirmaţiile false.

437. $\dfrac{CO}{OA}=\dfrac{NO}{OM}=\dfrac{NC}{AM}=\dfrac{1}{2}$ deci $\dfrac{NO}{OM}=\dfrac{1}{2}$ deci $\dfrac{NO}{NM}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow\quad\vec{NO}=-\dfrac{1}{3}\vec{MN}$.

438. Pentru a verifica egalitățile vectoriale de mai sus, încercăm să transformăm membrul stâng al egalității astfel încât în el să apară vectorii din membrul drept.

Astfel, pentru a verifica veridicitatea relației vectoriale de la punctul $\boxed{\text{A}}$ $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}$ scriem $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}+2\overrightarrow{AC}$. De unde rezultă că $\boxed{\text{A}}$ este falsă. Pentru a verifica veridicitatea relației vectoriale de la punctul $\boxed{\text{B}}$ $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{0}$ scriem $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{DQ}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{CD}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{DA}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA})=\overrightarrow{0}$. De unde rezultă că $\boxed{\text{B}}$ este adevărat. Pentru a verifica veridicitatea relației vectoriale de la punctul $\boxed{\text{C}}$ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$ scriem $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$. De unde rezultă că $\boxed{\text{C}}$ este adevărată. Pentru a verifica veridicitatea relației vectoriale de la punctul $\boxed{\text{D}}$ $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CA}$ scriem $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AC}$. De unde rezultă că $\boxed{\text{D}}$ este fals.

439. Avem că $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BN}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. În mod asemănător obţinem că $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{DQ}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{CD}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{DA}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{CA}$. Însumând cei doi vectori obţinem că $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{0}$, deci $\boxed{\text{A}}$ este adevărată. Pornind de la afirmţia anterioară avem că $\overrightarrow{NM}+\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}+2\overrightarrow{NM}=2\overrightarrow{NM}$, adică afirmţia $\boxed{\text{B}}$ este falsă. Deoarece $\overrightarrow{PQ}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{CA}$, avem că $\overrightarrow{QP}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. Prin urmare, $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{QP}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}$, adică afirmaţia $\boxed{\text{C}}$ este adevărată. O să arătăm că $\boxed{\text{D}}$ este falsă calculând fiecare vector în parte. Mai întâi, $\overrightarrow{MQ}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AQ}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BD}$. Asemănător, $\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{CP}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{CD}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BD}$. Dacă însumăm cei doi vectori ajungem la faptul că $\overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{NP}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BD}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BD}$, deci $\boxed{\text{D}}$ este falsă.

440. Pentru a afla informaţii referitoare la poziţia punctului G vom calcula vectorul $\overrightarrow{OG}$, adică $\overrightarrow{OG}=\dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OC}\right)$. Deoarece M şi N sunt mijloacele laturilor AB şi AD vom avea că $\overrightarrow{OM}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$ şi $\overrightarrow{ON}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD})$. Dacă înlocuim aceste relaţii mai sus obţinem că $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{6}(2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) = \overrightarrow{0}$ deoarece $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{0}$ şi $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{0}$. De aici putem concluziona că $O = G$, deci $\boxed{\text{B}}$ este adevărată şi implicit şi $\boxed{\text{A}}$ este adevărată deoarece $O \in BD$. Cum G este centru de greutate pentru triunghiul MNC se verifică relaţia $\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GN}+\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$, adică $\boxed{\text{C}}$ este adevărată. Similar, deoarece G este centru de greutate avem că $\overrightarrow{MG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{MM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MC}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MC})$ sau echivalent $3\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MC}$, deci afirmaţia $\boxed{\text{D}}$ este falsă.

441. Din Teorema lui Sylvester avem identitatea $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ care este echivalentă cu $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AH}$, deci $\boxed{\text{A}}$ este falsă. Putem să mai scriem echivalent relaţia de mai sus astfel $\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{CO} = \overrightarrow{HA}$, ceea ce ne conduce la faptul că $\boxed{\text{B}}$ este adevărată. Cum $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$ se observă că $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$ sau $\overrightarrow{HO} = 3\overrightarrow{GO}$, deci $\boxed{\text{D}}$ este adevărată. Deoarece $\overrightarrow{HG} = \overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OG} - 3\overrightarrow{OG} = -2\overrightarrow{OG}$, adică $\boxed{\text{C}}$ este falsă.

442. Folosind faptul că G este centru de greutate în triunghiul MBD putem ajunge la relaţia $\overrightarrow{BG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{BB} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{BD}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{BD})$ sau ehivalent $3\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{BD}$, deci $\boxed{\text{A}}$ este falsă. Similar, datorită faptului că G_1 este centru de greutate în triunghiul BCD avem că $\overrightarrow{CG_2} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CC} + \overrightarrow{CD}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD})$, adică afirmaţia $\boxed{\text{C}}$ este adevărată. Analog avem că $\overrightarrow{DG_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DD})$ sau $3\overrightarrow{DG_1} = \overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}$ deoarece G_2 este centru de greutate în triunghiul ABD. Astfel obţinem că $\boxed{\text{D}}$ este falsă. Pentru a verifica veridicitatea afirmaţiei $\boxed{\text{B}}$ vom calcula vectorii $\frac{1}{2}(\overrightarrow{BG_1} + \overrightarrow{BG_2})$ şi $\overrightarrow{BG}$. Avem că $\overrightarrow{BG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{BD}) = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{BD}\right] = \frac{1}{6}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{BD})$. $\overrightarrow{BG_1} + \overrightarrow{BG_2} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BD}) + \frac{1}{3}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{BD})$. Astfel am ob]c tinut că $\overrightarrow{BG} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BG_1} + \overrightarrow{BG_2})$, deci afirmaţia $\boxed{\text{B}}$ este adevărată.

443. Ar trebui mai întâi remarcat faptul că $\overrightarrow{AC} = 5\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AD}$ alături de necoliniaritatea punctelor implică că oricare trei puncte din $\{A, B, C, D\}$ sunt necoliniare. În caz contrar, dacă presupunem că avem trei puncte coliniare, putem arăta că al patrulea se găseşte pe aceeaşi dreaptă folosind relaţia de mai sus. Mai departe, cum oricare trei puncte sunt necoliniare, deducem că şi vectorii $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}$ sunt necoliniari. Pentru a verifica valoarea de adevăr a afirmaţiilor vom începe prin a exprima vectorii $\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BN}$ în funcţie de vectorii $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{AD}$. Astfel avem că $\overrightarrow{AN} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$, de unde mai reiese şi că $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ sau $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. De asemenea, $\overrightarrow{AM} = \frac{5}{2}\overrightarrow{AD}$. Înlocuind expresiile vectorilor $\overrightarrow{AM}$ şi $\overrightarrow{AN}$ în relaţia lui $\overrightarrow{AC}$ obţinem că $\overrightarrow{AC} = \frac{10}{3}\overrightarrow{AN} + \frac{6}{5}\overrightarrow{AM}$, deci $\boxed{\text{C}}$ este adevărată. Deoarece vectorii $\overrightarrow{AM}$ şi $\overrightarrow{AN}$ sunt necoliniari reprezentarea aceasta este unică, de unde putem că $\boxed{\text{A}}$ este falsă. Pentru a afla valoarea de adevăr a afirmaţiei $\boxed{\text{B}}$ vom înlocui expresia lui $\overrightarrow{BN}$ pentru a obţine că $\overrightarrow{AC} = 10\overrightarrow{BN} + 3\overrightarrow{AD}$, de unde $\boxed{\text{C}}$ este falsă. Înlocuind cele ştiute şi la afirmaţia $\boxed{\text{D}}$ obţinem că $15\overrightarrow{AD} = -\frac{25}{3}(2\overrightarrow{NA} - \overrightarrow{NB}) + 15\overrightarrow{AD}$ sau echivalent $2\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{BN}$, adică $3\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Astfel concluzionăm că $\boxed{\text{D}}$ este falsă.

444. Deoarece hexagonul $ABCDEF$ este înscris într-un cerc, punctul O este centrul cercului circumscris pentru fiecare dintre triunghiurile FAB, ABC, BCD, CDE, DEF şi EFA. Conform teoremei lui Sylvester avem relaţiile $\overrightarrow{OH_1} = \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OH_2} = \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OH_3} = \overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OH_4} = \overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}$, $\overrightarrow{OH_5} = \overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}$ şi $\overrightarrow{OH_6} = \overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{OA}$. De aici reiese că mijloacele segmentelor H_1H_4, H_2H_5, H_3H_6 coincid deoarece $\frac{1}{2}(\overrightarrow{OH_1}+\overrightarrow{OH_4}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OH_2}+\overrightarrow{OH_5}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OH_3}+\overrightarrow{OH_6})$. Astfel putem deduce că cele trei drepte sunt concurente în acest punct, adică $\boxed{\text{B}}$ este adevărată. În plus, deoarece segmentele H_1H_4, H_2H_5, H_3H_6 au acelaşi mijloc vom avea că fiecare pereche dintre acestea sunt diagonalele unui paralelogram. De aici reiese că $H_1H_2H_4H_5$ este paralelogram, adică $\boxed{\text{C}}$ este adevărată, şi $H_2H_3H_5H_6$ este paralelogram, deci $\boxed{\text{D}}$ este falsă. Pentru a determina valoarea de adevăr a lui $\boxed{\text{A}}$ vom determina dacă doi vectori sunt paraleli. Este suficient să calculăm vectorii $\overrightarrow{H_1H_2}, \overrightarrow{H_1H_3}$ şi $\overrightarrow{H_1H_4}$ şi să vedem dacă sunt paraleli cu vectorii corespunzători. Avem că $\overrightarrow{H_1H_2} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{FC}$ şi $\overrightarrow{H_3H_4} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{BE}$. Aceşti doi vectori evident nu sunt paraleli deoarece dreptele BE şi FC se intersectează în interiorul cercului. Printr-un raţionament similar se ajunge la faptul că $\overrightarrow{H_1H_3} = \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{AD}$ şi $\overrightarrow{H_2H_4} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{AD}$, care din acelaşi motiv ca mai devreme nu sunt paraleli, şi că $\overrightarrow{H_1H_4} = \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE}$, respectiv $\overrightarrow{H_2H_3} = \overrightarrow{AD}$. Această ultimăpereche de vectori nu este paralelă din ipotezele problemei. Astfel, $\boxed{\text{A}}$ este adevărată.

445. Pentru a putea calcula vectorul $\overrightarrow{OI}$ este necesar să calculăm lungimile segmentelor OM, OB şi BM. Fără a restrânge generalitatea putem considera că cercul are raza 1.

Atunci segmentul $OB = 1$ deoarece este rază. Deoarece lungimea segmentului OM este jumătate din lungimea segmentului AB şi triunghiul AOB este echilateral vom avea că $BM = \frac{1}{2}$. Lungimea segmentului OM se poate calcula folosind Teorema lui Pitagora în triunghiul OMB sau calculând aria triunghiului AOB în două moduri pentru a obţine $OM = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Acum putem calcula vectorul $\overrightarrow{OI}$ deoarece $\overrightarrow{OI} = \frac{1}{OM + MB + BO}(OM \cdot \overrightarrow{OB} + MB \cdot \overrightarrow{OO} + BO \cdot \overrightarrow{OM}) = \frac{2}{3+\sqrt{3}}(\frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OM}) = \frac{1}{1+\sqrt{3}}\overrightarrow{OB} + \frac{2}{3+\sqrt{3}}\overrightarrow{OM}$. De aici reiese că $\boxed{\text{A}}$ este adevărată şi $\boxed{\text{B}}$ este falsă. Pentru a determina valoarea de adevăr a lui $\boxed{\text{C}}$ vom începe prin a observa că $\overrightarrow{OE} = -\overrightarrow{OB}$ deoarece avem de a face cu un hexagon regulat. Astfel, $\boxed{\text{C}}$ este adevărată. În expresia lui $\overrightarrow{OI}$ putem înlocui $\overrightarrow{OM}$ cu $\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$ pentru a obţine că $\overrightarrow{OI} = \frac{1}{1+\sqrt{3}}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3+\sqrt{3}}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3+\sqrt{3}}\overrightarrow{OB} = \frac{1}{3+\sqrt{3}}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{\sqrt{3}}\overrightarrow{OB}$. Astfel concluzionăm că $\boxed{\text{D}}$ este şi ea adevărată.

446. Pentru fiecare pereche de triunghiuri asemenea avem o latură comună, deci cele două perechi de triunghiuri sunt de fapt congruente. De aici obţinem că patrulaterele $OCFD$ şi $OAED$ sunt paralelograme şi prin urmare vom avea că $\overrightarrow{FD} = \overrightarrow{CO}$, $\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{DO}$, $\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{DO}$ şi $\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{AO}$. Puteam acum să folosim aceste egalităţi pentru a determina valoarea de adevăr a afirmaţiilor. $\overrightarrow{EO} + \overrightarrow{FO} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{FD} + \overrightarrow{DO} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{CO} + 2\overrightarrow{DO} = 2\overrightarrow{DO} = \overrightarrow{DB}$, deci $\boxed{\text{A}}$ este adevărat. Mai departe, $2\overrightarrow{FO} + \overrightarrow{ED} = 2\overrightarrow{FD} + 2\overrightarrow{DO} + \overrightarrow{ED} = 2\overrightarrow{CO} + 2\overrightarrow{DO} + \overrightarrow{AO} = 2\overrightarrow{DO} + \overrightarrow{CO} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{FD} = \overrightarrow{FB}$, deci $\boxed{\text{B}}$ este adevărat. Avem că $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CO} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE}$, deci $\boxed{\text{C}}$ este falsă. Pentru $\boxed{\text{D}}$ avem că $\overrightarrow{DF} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{0}$, deci această afirmaţie este falsă.

447. Deoarece punctele A, D şi P sunt coliniare în această ordine şi $AD = DP$ avem că $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{AD}$. Similar avem că $\overrightarrow{AS} = 2\overrightarrow{AB}$. Atunci relaţia de la $\boxed{\text{A}}$ se poate scrie echivalent $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AS} - \overrightarrow{SR} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}$. Deoarece M, A, B sunt coliniare în această ordine şi $MA = BA$ avem că $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AB}$, iar din faptul că $BC \parallel SR$ şi $AD = SR$ avem că $\overrightarrow{SR} = \overrightarrow{AD}$. Putem acum înlocui mai sus pentru a obţine că $\overrightarrow{MP} - \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD} - 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD}$. Astfel $\boxed{\text{A}}$ este adevărată. Putem scrie relaţia de $\boxed{\text{B}}$ echivalent în felul următor $\overrightarrow{BP} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AD}$, deci $\boxed{\text{B}}$ este adevărat. Am folosit mai sus faptul că $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, deci $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{0}$. În continuare, vom folosi raţionamente similare pentru a exprima vectorii $\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{AQ}, \overrightarrow{CR}$ şi $\overrightarrow{NP}$, însă nu vom descrie în detaliu acest proces. Vom înlocui formele echivalente ale acestor vectori în $\boxed{\text{C}}$ pentru a obţine $\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BQ}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{BC}$,deci $\boxed{\text{C}}$ este falsă. Similar avem $\overrightarrow{CR}+\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{0}$, de unde şi $\boxed{\text{D}}$ este falsă.

448. Pentru început putem observa că patrulaterele $ADBC, ABEC, ABCF$ sunt romburi deoarece au toate laturile egale. Astfel ele sunt şi paralelograme, iar de aici putem deduce următoarele egalităţi $\overrightarrow{FA}=\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{FC}=\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DA}=\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{EB}=\overrightarrow{CA}$şi $\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{BA}$. Folosind aceste egalităţi putem scrie echivalent afirmaţiile după cum urmează. $\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{BF}$, adică $\boxed{\text{A}}$ este adevărată. $\overrightarrow{FD}+\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{FC}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{FC}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{FB}$, relaţie care este echivalentă cu $\boxed{\text{B}}$, deci această afirmaţie este adevărată. În continuare, $\overrightarrow{FC}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{FC}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BE}$, deci $\boxed{\text{C}}$ este adevărat. Se poate observa că $\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AF}$, de unde $\boxed{\text{D}}$ este falsă.

449. Considerăm punctul B ca fiind intersecţia dintre dreptele AM şi NO. Deoarece cercul cu centru în I este tangent la fiecare dintre laturile triunghiului ANB, acesta este chiar centrul cercului înscris triunghiului BNA. Asta înseamnă că pentru a putea calcula vectorii $\overrightarrow{AI}$ şi $\overrightarrow{MI}$ trebuie să aflăm lungimea segmentelor AB, BN şi NA. Deoarece dreapta AN este tangentă la cercul de centru O, unghiul $\angle ONA$ este drept, deci şi unghiul BNA este drept. Cum $m(\hat{A})=60^\circ$ va rezulta că $m(\hat{B})=30^\circ$. Putem considera fără lipsă de generalitate că raza cercului cu centru în O este 1. Atunci, deoarece triunghiul ONA este dreptunghic în N şi $m(\angle OAN)=30^\circ$ ca rezulta că $NA=\sqrt{3}$. Reveninid în triunghiul BNA avem că $\sin(\angle NBA)=\dfrac{1}{2}$ de unde rezultă că $BA=2AN=2\sqrt{3}$. De asemenea, $\cos(\angle NBA)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, de unde rezultă că $BN=\dfrac{\sqrt{3}}{2}AB=\dfrac{\sqrt{3}}{2}2\sqrt{3}=3$. Acum putem calcula vectorul $\overrightarrow{AI}$. $\overrightarrow{AI}=\dfrac{1}{\sqrt{3}+2\sqrt{3}+3}(\sqrt{3}\overrightarrow{AB}+2\sqrt{3}\overrightarrow{AN}+3\overrightarrow{AA})=\dfrac{1}{3+\sqrt{3}}(\sqrt{3}\overrightarrow{AB}+2\sqrt{3}\overrightarrow{AN})=\dfrac{1}{1+\sqrt{3}}(\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AN})$. Deoarece $\dfrac{BO}{ON}=2$ avem că $\overrightarrow{AO}=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AN})$ de unde reiese că $\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AN}=3\overrightarrow{AO}$. Dacă înlocuim asta mai sus obţinem că $\overrightarrow{AI}=\dfrac{3}{1+\sqrt{3}}\overrightarrow{AO}$, deci $\boxed{\text{A}}$ este adevărat şi $\boxed{\text{B}}$ este fals. Mai departe avem că $\overrightarrow{MI}=\dfrac{1}{3+3\sqrt{3}}(\sqrt{3}\overrightarrow{MB}+2\sqrt{3}\overrightarrow{MN}+3\overrightarrow{MA})=\dfrac{1}{3+3\sqrt{3}}(3-\sqrt{3})\overrightarrow{MA}+\dfrac{2\sqrt{2}}{3+3\sqrt{3}}\overrightarrow{MN}$, deoarece $BM=AM$ şi punctele A, B sunt de o parte şi de alta a punctului M. Dacă simplificăm formula anterioară ajungem la $\overrightarrow{MI} = \frac{\sqrt{3}-1}{3+\sqrt{3}}\overrightarrow{MA} + \frac{2}{3+\sqrt{3}}\overrightarrow{MN}$, de unde putem concluziona că $\boxed{\text{C}}$ este fals şi $\boxed{\text{D}}$ este adevărat.

450. Deoarece dreptele AM şi AN sunt tangente la cercul de centru O avem că $m(\angle AMO)+ m(\angle ANO) = 90° + 90° = 180°$, deci patrulaterul $AMON$ este inscriptibil. Atunci punctul O_1 există indiferent de poziţia punctului A în plan. Asta înseamnă că afirmaţia $\boxed{\text{B}}$ este falsă. Cercul circumscris patrulaterului $AMON$ este şi cercul circumscris triunghiului AMO. Cum acesta este dreptunghic, cerntrul cercului circumscris coincide cu mijlocul segmentului OA. Atunci punctele O, O_1, A sunt coliniare în această ordine şi $AO_1 = OO_1$, ceea ce înseamnă că $\overrightarrow{O_1O}+\overrightarrow{O_1A} = \overrightarrow{0}$. De aici, $\boxed{\text{A}}$ este adevărată. Vom considera că punctul O_1 se află pe cercul de centru O. Atunci vom avea că $OA = 2OO_1$. Folosind această informaţie putem afla $\sin(\angle MAO) = \frac{OM}{OA} = \frac{OO_1}{2OO_1} = \frac{1}{2}$, de unde $m(\angle MAO) = 30°$ şi implicit $m(\angle MAN) = 60°$. Astfel, $\boxed{\text{C}}$ este falsă şi $\boxed{\text{D}}$ este adevărată.

451. Se poate observa că triunghiul ABC este dreptunghic în A deoarece $AB^2 + AC^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 = BC^2$. Atunci ortocentrul triunghiului ABC coincide cu A, deci $A = H$. Dacă ţinem cont de faptul că $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}$, obţinem că $\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}$ care implică faptul că $\boxed{\text{C}}$ este adevărat. De asemenea, centrul cercului circumscris coincide cu mijlocul segmentului BC, de unde $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ sau echivalent $2\overrightarrow{AO}$, adică $\boxed{\text{D}}$ este adevărat. Vectorul $\overrightarrow{OI}$ este dat de formula $\overrightarrow{OI} = \frac{1}{5+12+13}(13\overrightarrow{OA} + 12\overrightarrow{OB} + 5\overrightarrow{OC}) = \frac{1}{30}(13\overrightarrow{OA} + 12\overrightarrow{OB} + 5\overrightarrow{OC})$. Astfel obţinem că $\boxed{\text{A}}$ este fals şi $\boxed{\text{B}}$ este adevărat.

452. Vom evidenţia câteva proprietăţii ale punctului M care se găsesc în forme analoage şi la celelalte mijloace de laturi. Mai exact, $\overrightarrow{MA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{MB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{MO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. De asemenea, pentru punctul O avem că $\overrightarrow{OA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{OB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ şi $\overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$. Putem folosi aceste informaţii pentru aflarea afirmaţiilor adevărate. Putem manipula egalitatea de la $\boxed{\text{A}}$ astfel $\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{ND} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{3}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{NO} + 3\overrightarrow{QD}$, de unde $\boxed{\text{A}}$ este adevărată. $\overrightarrow{QM}+\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{QA}+\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{NC}+\overrightarrow{CP}$, deci $\boxed{\text{B}}$ este falsă. Similar, $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DP} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} =$

$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{MO} + 2\overrightarrow{MO} = 4\overrightarrow{MO}$, deci $\boxed{\text{C}}$ este falsă. Pentru ultima afirmaţie avem că $\overrightarrow{NQ}+\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{NO}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{0} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{QA} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{NO} = \overrightarrow{QM} + \overrightarrow{NO}$, de unde $\boxed{\text{D}}$ este adevărat.

453. Poligonul $A_1A_3 \ldots A_{59}$ regulat deoarece triunghiurile $A_{n-1}A_nA_{n+1}$ sunt toate congruente între ele, având două perechi de laturi congruente şi unghiurile dintre aceste două laturi congruente. Similar şi poligonul $A_2A_4 \ldots A_{60}$ este regulat. Atunci centrele de greutate ale acestor poligoane coincide cu centrul cercului în care sunt înscrise poligoanele. Cum cercul circumscris poligonului $A_1A_2 \ldots A_{60}$ este circumscris şi celor două poligoane cu 30 de vârfuri, centrele de greutate ale celor două poligoane mai mici coincide cu centrul de greutate al poligonului mare, deci $G_1 = G_2$. Astfel, $\boxed{\text{A}}$ este adevărată şi $\boxed{\text{C}}$ este falsă. Mai rămâne de văzut dacă aceste centre de greutate se află sau nu pe dreapta G_3G_4. Pentru asta putem calcula vectorii $\overrightarrow{G_1G_3}$ şi $\overrightarrow{G_1G_4}$. Mai întâi, $\overrightarrow{G_1G_3} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{G_1A_1} + \overrightarrow{G_1A_2} + \overrightarrow{G_1A_4})$. La calculul lui $\overrightarrow{G_1G_4}$ vom folosi şi faptul că $\overrightarrow{G_1A_{31}} = -\overrightarrow{G_1A_1}$. Acest fapt este adevărat deoarece dreapta A_1A_{31} trece prin centrul cercului circumscris poligonului $A_1A_2 \ldots A_{60}$, deci segmentul A_1A_{31} este diametru şi prin urmare A_1, G_1, A_{31} sunt coliniare în această ordine şi $G_1A_1 = G_1A_{31}$. Atunci putem scrie $\overrightarrow{G_1G_4}$ în felul următor $\overrightarrow{G_1G_4} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{G_1A_{31}} + \overrightarrow{G_1A_{32}} + \overrightarrow{G_1A_{34}}) = -\frac{1}{3}(\overrightarrow{G_1A_1} + \overrightarrow{G_1A_2} + \overrightarrow{G_1A_4}) = -\overrightarrow{G_1G_3}$. Putem nota cu M mijlocul segmentului G_3G_4. Atunci $\overrightarrow{G_1M} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{G_1G_3} + \overrightarrow{G_1G_4}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{G_1G_3} - \overrightarrow{G_1G_3}) = \overrightarrow{0}$, ceea ce înseamnă că G_1 este mijlocul segmentului G_3G_4 şi implicit $G_1 \in G_3G_4$. Putem astfel concluziona că $\boxed{\text{B}}$ este adevărat şi $\boxed{\text{D}}$ este fals.

454. Cercul în care este înscris pentagonul este şi cercul circumscris triunghiurilor ABC şi AED. Conform Teoremei lui Sylvester, avem că $\overrightarrow{OH_1} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ şi $\overrightarrow{OH_2} = \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}$. Atunci $\overrightarrow{OH_1}+\overrightarrow{OH_2} = 2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}$. Dacă ţinem seama de faptul că $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{5}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE})$, obţinem că $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE} = 5\overrightarrow{OG}$. Atunci putem scrie $\overrightarrow{OH_1} + \overrightarrow{OH_2} = \overrightarrow{OA} + 5\overrightarrow{OG}$, deci $\boxed{\text{B}}$ este falsă şi $\boxed{\text{C}}$ este adevărată. Vectorul $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OH_1} + \overrightarrow{OH_2}) = \frac{1}{2}(2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE})$, ceea ce înseamnă că $\boxed{\text{A}}$ este falsă. Pentru stabilirea valorii de adevăr a afirmaţiei $\boxed{\text{D}}$ vom verifica implicaţia $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{0} \implies M = G$.

Am văzut mai înainte că $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{5}{2}\overrightarrow{OG}$. Presupunem că $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{0}$ şi vrem să arătăm că $M = G$. Cum $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{0}$, avem că $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{5}{2}\overrightarrow{0} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} \neq \overrightarrow{0} = \overrightarrow{OG}$. Astfel, $M \neq G$ şi afirmaţia $\boxed{\text{D}}$ este falsă.

455. Vom începe prin a calcula vectorul $\overrightarrow{G_1G_2}$. Avem că $\overrightarrow{G_1G_2} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{G_1M} + \overrightarrow{G_1N} + \overrightarrow{G_1P})$.

Cum punctele M, N, P sunt mijloacele segmentelor AD, BE respectiv CF, rezultatul precedent se mai poate scrie şi $\overrightarrow{G_1G_2} = \frac{1}{3}\Big[\frac{1}{2}(\overrightarrow{G_1A} + \overrightarrow{G_1D}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{G_1B} + \overrightarrow{G_1E}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{G_1C} + \overrightarrow{G_1F})\Big] = \frac{1}{6}(\overrightarrow{G_1A} + \overrightarrow{G_1B} + \overrightarrow{G_1C} + \overrightarrow{G_1D} + \overrightarrow{G_1E} + \overrightarrow{G_1F})$. Cum G_1 este centrul de greutate al hexagonului avem că $\overrightarrow{G_1A} + \overrightarrow{G_1B} + \overrightarrow{G_1C} + \overrightarrow{G_1D} + \overrightarrow{G_1E} + \overrightarrow{G_1F} = \overrightarrow{0}$, de unde reiese că $\overrightarrow{G_1G_2} = \overrightarrow{0}$, adică $G_1 = G_2$. Astfel $\boxed{\text{A}}$ este adevărată. Cum raţionamentul anterior a fost făcut în lipsa vreunei proprietăţi a hexagonului deducem că $G_1 = G_2$ în orice hexagon. Putem deduce de aici că $\boxed{\text{B}}$ este falsă. Cum $G_1 = G_2$ şi G_2 este centrul de greutate al triunghiului MNP deducem că G_1 este centrul de greutate al triunghiului MNP. Triunghiul MNP fiind propriu, acesta are centrul de greutate în interiorul său şi prin urmare $G_1 \notin MN$. De aici rezultă că $\boxed{\text{C}}$ este fals.

456. Vom începe prin a verifica dacă punctul P este centrul de greutate al patrulaterului. Deoarece P este mijlocul segmentului MN avem că $\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PN} = \overrightarrow{0}$. Putem în continuare să folosim faptul că punctele M şi N sunt mijloacele laturilor AB, respectiv CD. În consecinţă vom avea că $\overrightarrow{PM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB})$ şi $\overrightarrow{PN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD})$. Dacă înlocuim mai sus obţinem că $\overrightarrow{0} = \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD})$ sau echivalent $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = \overrightarrow{0}$, ceea ce însemnă că $\boxed{\text{A}}$ este adevărat. Această coondiţie este echivalentă şi cu faptul că P este centrul de greutate al patrulaterului, deci şi $\boxed{\text{C}}$ este adevărată. Deoarece P este centru de greutate avem că $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$, formulă care diferă de cea de la $\boxed{\text{B}}$. Pentru a afirma că $\boxed{\text{B}}$ este fals mai trebuie verificat că $\overrightarrow{AP} \neq \overrightarrow{0}$. Acest fapt este uşor de văzut deoarece, din construcţia sa, punctului P nu poate fi pe dreapta AB, deci nu poate coincide cu A. Aşadar, $\boxed{\text{B}}$ este într-adevăr fals. Similar ca mai sus, $\overrightarrow{BP} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}) = \frac{1}{4}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD})$, deci $\boxed{\text{D}}$ este adevărat.

457. $\vec{AM} = p \cdot \vec{AB} + \vec{AC}$; $\vec{AN} - \vec{AC} = q \cdot \vec{AB} - q \cdot \vec{AC}$; $\vec{AN} = q \cdot \vec{AB} + (1 - q) \cdot \vec{AC}$;

A, M, N sunt coliniare dacă și numai dacă $\frac{p}{q} = \frac{1}{1-q}$; deci variantele $\boxed{\text{A}}$ și $\boxed{\text{C}}$ sunt adevărate.

458. Vom calcula vectorii $\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OG_1}$ şi $\overrightarrow{OG_2}$ pentru a determina care puncte sunt coliniare. Avem că $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})$. Deoarece $ABCD$ este paralelogram avem că $\overrightarrow{OD} = -\overrightarrow{OB}$ şi $\overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{OA}$, deci $\overrightarrow{OM} = -\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$. Deoarece G_1 este centrul de greutate al triunghiului AMB va avea loc $\overrightarrow{OG_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}) = \frac{1}{3}\left[-\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right] = \frac{1}{6}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}) = -\frac{1}{3}\overrightarrow{OM}$. Mai avem că $\overrightarrow{OG_2} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OO}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}) = -\frac{2}{3}\overrightarrow{OM} = 2\overrightarrow{OG_1}$. Aceste relaţii arată că punctele O, M, G_1, G_2 sunt toate coliniare, deci $\boxed{\text{A}}$, respectiv $\boxed{\text{C}}$ sunt adevărate. Deoarece $\overrightarrow{OG_1} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{OM}$, avem că O aparţine segmentului MG_1. Prin urmare $\boxed{\text{B}}$ este adevărată. Cum $\boxed{\text{B}}$ şi $\boxed{\text{D}}$ se exclud reciproc, $\boxed{\text{D}}$ este falsă.

459. Vom începe prin a calcula vectorii $\overrightarrow{AG}$ şi $\overrightarrow{AG_1}$. Mai întâi, deoarece G este centrul de greutate al triunghiului ABC vom avea că $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$. Mai departe, deoarece G_1 este centrul de greutate al triunghiului BCA_1 vom avea că $\overrightarrow{AG_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})+\frac{1}{3}\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AG}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AA_1}$.Astfel, $\overrightarrow{AA_1} = 3\overrightarrow{AG_1}-\overrightarrow{AG}$. Deoarece punctele A, G, G_1 sunt coliniare şi vectorii $\overrightarrow{AG}$ şi $\overrightarrow{AG_1}$ sunt coliniari. Putem deduce de aici că şi cei doi vectori sunt coliniari si cu $\overrightarrow{AA_1}$ pentru că $\overrightarrow{AA_1} = 3\overrightarrow{AG_1}-\overrightarrow{AG}$. Atunci punctele A, G, G_1, A_1 sunt toate coliniare. Deci afirmaţia $\boxed{\text{C}}$ este adevărată. Deoarece triunghiul BCA_1 este echilateral vom avea că $A_1G_1 \perp BC$. Deoarece A, G, G_1, A_1 sunt coliniare şi $AG \perp BC$. Atunci AG este mediatoarea segmentului BC, deci triunghiul ABC este isoscel în A. Prin urmare, $\boxed{\text{B}}$ este adevărat. Afirmaţia $\boxed{\text{A}}$ este falsă deoarece punctele A, G_1, A_1 sunt coliniare indiferent de triunghiul ABC, deci coliniaritatea lor nu poate implica că acesta este mai mult decât isoscel în A. Putem face un raţionament similar ca la început pentru a arăta că, dacă punctele B, G, G_2 sunt coliniare, triunghiul ABC este isoscel în B. Triunghiul fiind isoscel şi în B, el este echilateral. Astfel, $\boxed{\text{D}}$ este adevărată.

460. Pentru a determina dacă punctele A, M, G sunt coliniare vom calcula vectorii $\overrightarrow{AM}$ şi $\overrightarrow{AG}$. Punctul G este centrul de greutate al pentagonului, deci vom avea că

$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{5}(\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}) = \frac{1}{5}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE})$. Mai departe, $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AG_1} + \overrightarrow{AG_2}) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}(\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + \frac{1}{3}(\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE})\right] = \frac{1}{6}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE})$. Atunci $\overrightarrow{AM} = \frac{5}{6}\overrightarrow{AG}$, deci punctele A, M, G sunt coliniare şi prin urmare $\boxed{\text{A}}$ este adevărat. Raţionamentul anterior a fost făcut fără a presupune vreo proprietate a patrulaterului $BCDE$, deci faptul că A, M, G sunt coliniare este adevărat şi dacă $BCDE$ **nu** este paralelogram. Din asta va rezulta că $\boxed{\text{D}}$ este falsă. Pentru a verifica valoarea de adevăr a afirmaţiilor $\boxed{\text{B}}$ şi $\boxed{\text{C}}$ vom calcula vectorul $\overrightarrow{G_1G_2}$ şi vom obţine $\overrightarrow{G_1G_2} = \overrightarrow{AG_2} - \overrightarrow{AG_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}) + \frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) + \frac{1}{3}(\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BE})$. Dacă $G_1G_2 \parallel CD$ avem că vectorii $\overrightarrow{G_1G_2}$ şi $\overrightarrow{CD}$ sunt coliniari. Prin urmare şi perechea de vectori $\overrightarrow{G_1G_2}$ şi $\overrightarrow{BE}$ sunt coliniari. Atunci $BE \parallel CD$. Reciproc, dacă $BE \parallel CD$ avem că vectorii $\overrightarrow{CD}$ şi $\overrightarrow{BE}$ sunt coliniari, iar atunci şi $\overrightarrow{G_1G_2}$ va fi coliniar cu ei. Deci, $G_1G_2 \parallel CD$ şi implicaţia reciprocă este adevărată. Aşadar, $\boxed{\text{B}}$ este adevărat. Putem face un raţionament similar pentru a arăta că, dacă $G_1G_2 \parallel BE$, $G_1G_2 \parallel CD$. Afirmaţia $\boxed{\text{C}}$ este falsă deoarece putem considera pentagonul $ABCDE$ în care patrulaterul $BCDE$ este trapez cu $CD \parallel BE$. Atunci vom avea că $G_1G_2 \parallel BE$, dar BC şi DE nu sunt paralele. Prin urmare, cele două condiţii nu sunt echivalente.

461. Avem că $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{6}(\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF}) = \frac{1}{6}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF})$ şi $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AG_1} + \overrightarrow{AG_2}) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}(\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + \frac{1}{3}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF})\right] = \frac{1}{6}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF}) = \overrightarrow{AM}$, deci $M = G$. Am folosit mai sus faptul că G, G_1, G_2 sunt centre de greutate. Afirmaţia $\boxed{\text{A}}$ este falsă deoarece coliniaritate punctelor implică faptul că există un număr real nenul k astfel încât $\overrightarrow{AG} = k\overrightarrow{AD}$ sau echivalent $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = (6k-1)\overrightarrow{AD}$. Egalitatea vectorială de la $\boxed{\text{A}}$ este doar o particularizare pentru $k = \frac{1}{3}$. $\boxed{\text{B}}$ este adevărată deoarece centrul de greutate al unui hexagon regulat este centrul cercului în care acesta poate fi înscris. În acest caz avem şi că AD este diametru, deci A, G, D sunt coliniare. $\boxed{\text{C}}$ este clar adevărată deoarece $M = G$. Condiţia $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{0}$ este echivalentă cu faptul că A este centrul de greutate al hexagonului, deci $A = M$. Atunci A este şi mijlocul segmentului G_1G_2. Cum hexagonul este convex, aceste puncte se găsesc în interiorul său şi prin urmare şi mijlocul segmentului se găseşte în interiorul hexagonului. Deoarece A este un vârf al hexagonului, el nu poate fi în interior. Astfel, condiţia ca $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{0}$ este mereu falsă. Pe de altă parte, am văzut că, în cazul unui hexagon regulat, A, M, D sunt coliniare. Astfel cele două afirmaţii nu pot fi echivalente şi $\boxed{\text{D}}$ este falsă.

462. Din Teorema lui Sylvester avem că $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$. Deoarece G este centrul de greutate al triunghiului vom avea că $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$. Astfel se poate observa că are loc egalitatea $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$ sau $\overrightarrow{OH} = -3\overrightarrow{GO}$, deci vectorii sunt coliniari şi prin urmare $\boxed{\text{A}}$ este adevărată. Raţionamentul anterior este valabil pentru orice triunghi ABC, deci din simpla condiţie de coliniaritate nu putem deduce proprietăţi ale triunghiului. Prin urmare $\boxed{\text{C}}$ este falsă deoarece condiţia de coliniaritate nu poate implica faptul că triunghiul este dreptunghic. Deoarece $\overrightarrow{OH} = -3\overrightarrow{GO}$, avem şi că $-\overrightarrow{HO} = -3\overrightarrow{GO}$ care se scrie echivalent $\overrightarrow{HO} = 3\overrightarrow{GO}$, deci coliniaritatea vectorilor $\overrightarrow{OH}$ şi $\overrightarrow{GO}$ este echivalentă cu coliniaritatea vectorilor $\overrightarrow{HO}$ şi $\overrightarrow{GO}$. Cum prima coliniaritate nu poate implica faptul că triunghiul ABC este isoscel, nici coliniaritatea vectorilor $\overrightarrow{HO}$ şi $\overrightarrow{GO}$ nu poate implica faptul că triunghiul ABC este isoscel. Prin urmare, $\boxed{\text{B}}$ este falsă. $\boxed{\text{D}}$ este clar falsă deoarece $\boxed{\text{B}}$ şi $\boxed{\text{C}}$ sunt false.

463. Pornim de la faptul că dacă vectorii $\overrightarrow{AB}$ şi $2\overrightarrow{AC} + 5\overrightarrow{AD}$ sunt coliniari există un număr real nenul k astfel încât $\overrightarrow{AB} = 2k\overrightarrow{AC} + 5k\overrightarrow{AD} = 2k(\alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AD}) + 5k\overrightarrow{AD} = 2\alpha k\overrightarrow{AB} + (2k\beta + 5k)\overrightarrow{AD}$. Cum vectorii $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{AD}$ sunt necoliniari şi k este nenul, vom obţine că $2\beta + 5 = 0$ sau $\beta = -\frac{5}{2}$. Valoarea parametrului α poate fi orice număr real nenul deoarece pentru un $\alpha \in \mathbb{R}^*$ putem alege $k = \frac{1}{2\alpha}$ pentru a avea loc condiţia de coliniaritate. Prin urmare, afirmaţiile pentru care $\alpha \neq 0$ şi $\beta = -\frac{5}{2}$ sunt singurele adevřate. Astfel, $\boxed{\text{A}}$ şi $\boxed{\text{B}}$ sunt false, iar $\boxed{\text{C}}$ şi $\boxed{\text{D}}$ sunt adevărate.

464. Începem prin a calcula vectorii $\overrightarrow{OG_1}$ şi $\overrightarrow{OG_2}$. Deoarece G_1 este centrul de greutate al triunghiului ACD, avem că $\overrightarrow{OG_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$. Din faptul că G_2 este centrul de greutate al triunghiului BCD avem că $\overrightarrow{OG_2} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$. Din faptul că vectorii $\overrightarrow{OG_1}$ şi $\overrightarrow{OG_2}$ sunt coliniari va exista un număr real nenul α astfel încât $\overrightarrow{OG_1} = \alpha\overrightarrow{OG_2}$, care se poate scrie echivalent $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \alpha\overrightarrow{OB} + \alpha\overrightarrow{OC} + \alpha\overrightarrow{OD}$. Vom rescrie această egalitate astfel $\overrightarrow{OA} - \alpha\overrightarrow{OB} = (\alpha - 1)(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$. În continuare vom folosi faptul că există un număr real nenul β astfel încât $\overrightarrow{OC} = \beta\overrightarrow{OA}$ şi $\overrightarrow{OD} = \beta\overrightarrow{OB}$.

Acest fapt este adevărat deoarece $\triangle AOB \sim \triangle COD$. Rescriem relaţia de mai sus astfel: $\overrightarrow{OA} - \alpha\overrightarrow{OB} = \beta(\alpha-1)(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$. Deoarece vectorii $\overrightarrow{OA}$ şi $\overrightarrow{OB}$ sunt necoliniari va rezulta că $1 = \beta(\alpha-1)$ şi $-\alpha = \beta(\alpha-1)$. Astfel putem ajunge la faptul că $\alpha = -1$, deci $\overrightarrow{OG_1} = -\overrightarrow{OG_2}$. Înlocuim în relaţia $\overrightarrow{G_1O} = k\overrightarrow{G_1G_2}$ pentru a obţine $\overrightarrow{G_1O} = k(\overrightarrow{OG_1} - \overrightarrow{OG_2}) = k(\overrightarrow{OG_1} + \overrightarrow{OG_1}) = 2k\overrightarrow{OG_1}$. Deoarece vectorul $\overrightarrow{OG_1}$ este nenul, deducem că $2k = -1$ sau $k = -\dfrac{1}{2}$. Atunci singura afirmaţie corectă este $\boxed{\text{C}}$.

465. Deoarece patrulaterele $ABCD, AEFD$ şi $DFGC$ sunt paralelograme avem că $\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AD}$ şi $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{AE}$. În plus, $\overrightarrow{AO_1} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}), \overrightarrow{AO_2} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE})$ şi $\overrightarrow{AO_3} = \overrightarrow{AD} + \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DF}) = \overrightarrow{AD} + \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE})$. Se poate observa că $\overrightarrow{AO_1} + \overrightarrow{AO_2} = \overrightarrow{AO_3}$, deci patrulaterul $AO_1O_3O_2$ este paralelogram. De aici deducem că $\boxed{\text{A}}$ este adevărată şi $\boxed{\text{B}}$ este falsă. Rezultatul precedent se mai poate demonstra şi arătând că $\overrightarrow{O_2O_3} = \overrightarrow{AO_3} - \overrightarrow{AO_2} = \overrightarrow{AD} + \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}) - \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}) = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AO_1}$. Atunci vom avea că $AO_1 \parallel O_2O_3$ şi $AO_1 = O_2O_3$. În continuare vom nota cu M mijlocul segmentului O_2O_3. Avem că $\overrightarrow{O_1M} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_1O_3}) = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{O_1A} + \overrightarrow{O_1O_3} + \overrightarrow{O_1O_3}) = \overrightarrow{O_1O_3} - \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AO_1} = \overrightarrow{AO_2} - \dfrac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}) - \dfrac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{DF} + \dfrac{1}{4}\overrightarrow{BD}$. Dacă $O_1M \parallel DF$, atunci $\overrightarrow{O_1M}$ şi $\overrightarrow{DF}$ sunt coliniari, deci şi $\overrightarrow{BD}$ este coliniar cu acești vectori. Reciproc, dacă vectorii $\overrightarrow{BD}$ şi $\overrightarrow{DF}$ sunt coliniari, rezulta că $\overrightarrow{O_1M}$ este coliniar cu ei, deci $O_1M \parallel DF$. Astfel obţinem că $\boxed{\text{D}}$ este adevărată. $\boxed{\text{C}}$ este falsă deoarece putem construi paralelogramele astfel încât vectorii $\overrightarrow{BD}$ şi $\overrightarrow{DF}$ să fie necoliniari. De exemplu, putem considera că $BECF$ este un paralelogram şi punctele A, D sunt alese pe BE, respectiv CF astfel încât $AD \parallel BC$. Atunci vectorii $\overrightarrow{BD}$ şi $\overrightarrow{DF}$ nu sunt coliniari.

466. Pentru a verifica valoarea de adevăr a afirmaţiilor $\boxed{\text{A}}$ şi $\boxed{\text{B}}$ vom calcula vectorul $\overrightarrow{G_1G_2}$. Vom avea nevoie mai întâi de vectorii $\overrightarrow{GG_1}$ şi $\overrightarrow{GG_2}$. Deoarece G_1 este centrul de greutate al triunghiului AGB_1, avem că $\overrightarrow{GG_1} = \dfrac{1}{3}(\overrightarrow{GG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB_1}) = \dfrac{1}{3}(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB_1}) = \dfrac{1}{3}\left[\overrightarrow{GA} + \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC})\right] = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{GA} + \dfrac{1}{6}\overrightarrow{GC}$. Similar, $\overrightarrow{GG_2} = \dfrac{1}{3}(\overrightarrow{GG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC_1}) = \dfrac{1}{3}(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC_1}) = \dfrac{1}{3}\left[\overrightarrow{GA} + \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB})\right] = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{GA} + \dfrac{1}{6}\overrightarrow{GB}$. Atunci $\overrightarrow{G_1G_2} = \overrightarrow{GG_2} - \overrightarrow{GG_1} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{GA} + \dfrac{1}{6}\overrightarrow{GB} - \dfrac{1}{2}\overrightarrow{GA} - \dfrac{1}{6}\overrightarrow{GC} = \dfrac{1}{6}\overrightarrow{CB}$. De aici $BC \parallel G_1G_2$ şi $BC = 6G_1G_2$. Astfel G_1G_2BC este trapez, dar nu este paralelogram, deci $\boxed{\text{A}}$ este fals şi $\boxed{\text{B}}$ este adevărat.

Avem $\overrightarrow{B_1C_1} == \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = 3\overrightarrow{G_1G_2}$, deoarece B_1C_1 este linie mijlocie în triunghiul ABC. Prin urmare $\boxed{\text{C}}$ este adevărat și $\boxed{\text{D}}$ este fals.

467. Considerăm originea reperului cartezian xOy ca fiind originea vectorilor de poziție. $ABCD$ este paralelogram $\Leftrightarrow \overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{r_C} = \overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{r_D} \Leftrightarrow (\alpha+\beta)\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} = \overrightarrow{j} \Leftrightarrow \alpha+\beta = 0$. Deci avem o infinitate de perechi (α, β) pentru care $ABCD$ este paralelogram.

468. A, B, C sunt coliniare $\Leftrightarrow$ există t număr real astfel încât $\overrightarrow{r_C} = t \cdot \overrightarrow{r_A} + (1 - t) \cdot \overrightarrow{r_B} \Leftrightarrow \alpha\overrightarrow{i} + \alpha^2\overrightarrow{j} = t\overrightarrow{j} + (1-t)\overrightarrow{i} \Leftrightarrow \alpha = 1 - t$ şi $\alpha^2 = t$. Eliminând t obţinem: $\alpha^2 + \alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ sau $\alpha = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

469. În reperul cartezian xOy considerăm $\overrightarrow{i}$ versorul axei Ox, iar $\overrightarrow{j}$ versorul axei Oy. Căutăm o funcţie $f : D \to \mathbb{R}$, unde $D \subseteq \mathbb{R}$ astfel încât $\overrightarrow{v}(t) = t \cdot \overrightarrow{i} + f(t) \cdot \overrightarrow{j}$. Astfel obţinem că: $t \cdot \overrightarrow{i} + f(t) \cdot \overrightarrow{j} = x^2 \cdot \overrightarrow{i} + 3x^2 \cdot \overrightarrow{j} \Leftrightarrow t = x^2$ şi $f(t) = 3x^2 \Leftrightarrow f(t) = 3t$ şi $t = x^2, x \in \mathbb{R}$ Dar $D = \{t \,|\, \exists x \in \mathbb{R} \text{ a.î. } t = x^2\} \Rightarrow D = [0;\infty]$. Avem că $f : [0;\infty] \to \mathbb{R}$, $f(t) = 3t$, deci locul geometric este o semidreaptă.

470. $\dfrac{AM}{MB} = \dfrac{BN}{NC} = \dfrac{CP}{PA} = \alpha \Rightarrow \overrightarrow{r_M} = \dfrac{1}{1+\alpha}\overrightarrow{r_A} + \dfrac{\alpha}{1+\alpha}\overrightarrow{r_B}$. $\overrightarrow{r_N} = \dfrac{1}{1+\alpha}\overrightarrow{r_B} + \dfrac{\alpha}{1+\alpha}\overrightarrow{r_C}$, $\overrightarrow{r_P} = \dfrac{1}{1+\alpha}\overrightarrow{r_C} + \dfrac{\alpha}{1+\alpha}\overrightarrow{r_A}$. Fie G şi G' centrele de greutate ale triunghiurilor ABC, respectiv MNP. Atunci: $\overrightarrow{r_G} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{r_C})$, respectiv. $\overrightarrow{r_{G'}} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{r_M} + \overrightarrow{r_N} + \overrightarrow{r_P}) =$

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+\alpha}\overrightarrow{r_A} + \frac{\alpha}{1+\alpha}\overrightarrow{r_B} + \frac{1}{1+\alpha}\overrightarrow{r_B} + \frac{\alpha}{1+\alpha}\overrightarrow{r_C} + \frac{1}{1+\alpha}\overrightarrow{r_C} + \frac{\alpha}{1+\alpha}\overrightarrow{r_A}\right) =$$

$= \frac{1}{3} \cdot \dfrac{(1+\alpha)(\overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{r_C})}{1+\alpha} = \overrightarrow{r_G}$, deci triunghiurile ABC şi MNP au acelaşi centru de greutate. Arătăm că afirmaţiile $\boxed{\text{A}}$ şi $\boxed{\text{C}}$ sunt false. Pentru aceasta construim un contraexemplu: Fie triunghiul ABC dreptunghic în A, şi $\alpha = 1$, deci MNP va fi triunghiul format cu mijloacele laturilor triunghiului ABC. Arătăm că triunghiul MNP este dreptunghic în N. $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{NP} = (\overrightarrow{r_N} - \overrightarrow{r_M}) \cdot (\overrightarrow{r_P} - \overrightarrow{r_N}) = \dfrac{\overrightarrow{r_C} - \overrightarrow{r_A}}{2} \cdot \dfrac{\overrightarrow{r_A} - \overrightarrow{r_B}}{2} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BA} = 0$, deoarece $AB \perp AC$. Ortocentrul triunghiului ABC este A, iar ortocentrul triunghiului MNP, este N,(ambele fiind triunghiuri dreptunghice), iar în ceea ce priveşte centrul cercului circumscris, în cazul triunghiului ABC este mijlocul lui BC, iar în cazul triunghiului MNP este mijlocul lui MP (ambele fiind triunghiuri dreptunghice).

471. Fie $t, u \in [0,1]$ astfel încât $\overrightarrow{v}(t) = \overrightarrow{v}(u) \Leftrightarrow t \cdot \overrightarrow{r_A} + (1-t) \cdot \overrightarrow{r_B} = u \cdot \overrightarrow{r_A} + (1-u) \cdot \overrightarrow{r_B} \Leftrightarrow (t-u) \cdot \overrightarrow{r_A} - (t-u) \cdot \overrightarrow{r_B} = 0 \Leftrightarrow (t-u) \cdot (\overrightarrow{r_A} - \overrightarrow{r_B}) = 0 \Leftrightarrow (t-u) \cdot \overrightarrow{BA} = 0$. Dar $\overrightarrow{BA} \neq \overrightarrow{0}$

(punctele A şi B sunt distincte) deci $t-u=0 \Leftrightarrow t=u$, deci $\overrightarrow{v}$ este injectivă. Presupunem că $\overrightarrow{v}$ ar fi surjectivă, şi considerăm vectorul $-\overrightarrow{r_A}+2\overrightarrow{r_B}$. Atunci va exista $t \in [0,1]$ cu $\overrightarrow{v}(t)=-\overrightarrow{r_A}+2\overrightarrow{r_B} \Leftrightarrow t\cdot\overrightarrow{r_A}+(1-t)\cdot\overrightarrow{r_B}=-\overrightarrow{r_A}+2\overrightarrow{r_B} \Leftrightarrow (t+1)\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{0} \Rightarrow t=-1$ ceea ce este imposibil. Acum fie $t \in [0,1]$ astfel încât $\overrightarrow{v}(t)=\overrightarrow{r_A} \Leftrightarrow (t-1)\cdot\overrightarrow{r_A}+(1-t)\cdot\overrightarrow{r_B}=\overrightarrow{0} \Leftrightarrow (t-1)\cdot\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{0} \Leftrightarrow t=1$. Deci $\boxed{\text{A}}$ şi $\boxed{\text{C}}$ sunt adevărate.

472. Fie $\overrightarrow{r_C}=x\cdot\overrightarrow{i}+y\cdot\overrightarrow{j}$, $x,y \in \mathbb{R} \Rightarrow 3\cdot\overrightarrow{r_G}=\overrightarrow{r_A}+\overrightarrow{r_B}+\overrightarrow{r_C} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{i}+3\overrightarrow{j}=(2+x)\overrightarrow{i}+(3+y)\overrightarrow{j} \Leftrightarrow x=1$ şi $y=0$.

473. Calculăm $\overrightarrow{r_{G_n}}$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Mai întâi avem că $\overrightarrow{r_{G_{n+1}}}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{r_{G_n}}+\overrightarrow{r_B}+\overrightarrow{r_C}\right)$, $\forall n\in\mathbb{N}$ (1). Arătăm prin inducţie că $\overrightarrow{r_{G_n}}=\frac{1}{3^n}\overrightarrow{r_A}+\frac{3^n-1}{2\cdot 3^n}\left(\overrightarrow{r_B}+\overrightarrow{r_C}\right)$, $\forall n\in\mathbb{N}$ $(\star)$. Cazul $n=0$ este trivial, deoarece $\overrightarrow{r_{G_0}}=\overrightarrow{r_A}$. Acum presupunem afirmaţia adevărată pentru $k\in\mathbb{N}$ şi arătăm că este adevărată şi pentru $k+1$. $\overrightarrow{r_{G_k}}=\frac{1}{3^k}\overrightarrow{r_A}+\frac{3^k-1}{2\cdot 3^k}\left(\overrightarrow{r_B}+\overrightarrow{r_C}\right)$. Folosind (1) avem că $\overrightarrow{r_{G_{k+1}}}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{r_{G_k}}+\overrightarrow{r_B}+\overrightarrow{r_C}\right)=\frac{1}{3^{k+1}}\overrightarrow{r_A}+\frac{3^k-1}{2\cdot 3^{k+1}}\left(\overrightarrow{r_B}+\overrightarrow{r_C}\right)+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{r_B}+\overrightarrow{r_C}\right)=$ $=\frac{1}{3^{k+1}}\overrightarrow{r_A}+\frac{3^k-1+2\cdot 3^k}{2\cdot 3^{k+1}}\left(\overrightarrow{r_B}+\overrightarrow{r_C}\right)=\frac{1}{3^{k+1}}\overrightarrow{r_A}+\frac{3^{k+1}-1}{2\cdot 3^{k+1}}\left(\overrightarrow{r_B}+\overrightarrow{r_C}\right)$. Deci afirmaţia este adevărată şi pentru $k+1$ deci conform inducţiei matematice $(\star)$ este adevărată, deci $\boxed{\text{D}}$ este adevărată. $\lim\limits_{n\to\infty}\overrightarrow{r_{G_n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3^n}\overrightarrow{r_A}+\frac{3^n-1}{2\cdot 3^n}\left(\overrightarrow{r_B}+\overrightarrow{r_C}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{r_B}+\overrightarrow{r_C}\right)$, deci $\boxed{\text{B}}$ este adevărată. Pentru a arătă că toate punctele G_n se află pe aceeaşi dreaptă, arătăm că fiecare punct G_n se află pe dreapta AM, unde M este mijlocul lui BC. Evident că $\overrightarrow{r_M}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{r_B}+\overrightarrow{r_C}\right)$, şi folosind $(\star)$ avem că $\overrightarrow{r_{G_n}}=\frac{1}{3^n}\overrightarrow{r_A}+\frac{3^n-1}{3^n}\overrightarrow{r_M}$. Cum $\frac{1}{3^n}+\frac{3^n-1}{3^n}=1$ obţinem că G_n se află pe dreapta AM, $\forall n\in\mathbb{N}$, deci $\boxed{\text{A}}$ este adevărată.

474. Distingem două cazuri: $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AB}$ sau $\overrightarrow{AC}=-2\overrightarrow{AB}$. În primul caz avem că:
$\overrightarrow{r_C}-\overrightarrow{r_A}=2\overrightarrow{r_B}-2\overrightarrow{r_A} \Rightarrow \overrightarrow{r_B}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{r_A}+\overrightarrow{r_C}\right)$
În al doilea caz $\overrightarrow{r_C}-\overrightarrow{r_A}=-2\overrightarrow{r_B}+2\overrightarrow{r_A} \Rightarrow \overrightarrow{r_B}=\frac{3}{2}\overrightarrow{r_A}-\frac{1}{2}\overrightarrow{r_C}$.

475. Fie I_n, G_n centrul cercului înscris, respectiv centrul de greutate al triunghiului $A_nB_nC_n$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Cum $I_n\equiv I_{n+1}$ $(\equiv I)$, $\forall n\in\mathbb{N}$ şi $\frac{A_nA_{n+1}}{A_{n+1}B_n}=\frac{B_nB_{n+1}}{B_{n+1}C_n}=\frac{C_nC_{n+1}}{C_{n+1}A_n}=\alpha \Rightarrow \overrightarrow{r_{G_{n+1}}}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{r_{A_{n+1}}}+\overrightarrow{r_{B_{n+1}}}+\overrightarrow{r_{C_{n+1}}}\right)=\frac{1}{3}\Big(\frac{1}{1+\alpha}\overrightarrow{r_{A_n}}+\frac{\alpha}{1+\alpha}\overrightarrow{r_{B_n}}+\frac{1}{1+\alpha}\overrightarrow{r_{B_n}}+\frac{\alpha}{1+\alpha}\overrightarrow{r_{C_n}}+\frac{1}{1+\alpha}\overrightarrow{r_{C_n}}++\frac{\alpha}{1+\alpha}\overrightarrow{r_{A_n}}\Big)==\frac{1}{3}\cdot\frac{(1+\alpha)\left(\overrightarrow{r_{A_n}}+\overrightarrow{r_{B_n}}+\overrightarrow{r_{C_n}}\right)}{1+\alpha}=\overrightarrow{r_{G_n}} \Rightarrow G_n\equiv G_{n+1}$ $(\equiv G)$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Fie acum $\mathcal{S}_n=\operatorname{int}(A_nB_nC_n)$ (mulţimea punctelor interioare triunghiului $A_nB_nC_n$). Evident că $\mathcal{S}_{n+1}\subsetneq\mathcal{S}_n$, şi $\{I,G\}\subseteq\mathcal{S}_n$ $\forall n\in\mathbb{N}\Rightarrow\{I,G\}\subseteq\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\mathcal{S}_n$.

Dar triunghiurile $A_nB_nC_n$ devin din ce în ce mai mici, şi nu au laturi comune, deci la limită ele vor degenera. Astfel $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{S}_n$ va conţine un singur punct $\Rightarrow I = G$, deci triunghiul $A_0B_0C_0$ este echilateral.

476. Vectorii nu sunt perpendiculari $\Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} \neq 0$. $(\vec{a}+\vec{b}) \cdot (\vec{a}-\vec{b}) = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = 0$.

477. $6\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} - 5\overrightarrow{BC} \implies 6(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}) = 3\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} - 5\overrightarrow{BC} \implies$ $6\overrightarrow{BM} = -3\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} - 5\overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{BC} - 5\overrightarrow{BC} = -2\overrightarrow{BC} \implies B, C, M$ sunt coliniare şi $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BC} = -3|\overrightarrow{BM}|^2 < 0$. Deci, avem $\boxed{\text{A}}$ și $\boxed{\text{C}}$ adevărate.

478. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 1 \cdot (-3) + 3 \cdot 1 = 0, |\overrightarrow{AC}|^2 = 1^2 + 3^2 = |\overrightarrow{BC}|^2 \Rightarrow ABC$ este dreptunghic isoscel.

479. Fie xOy reperul cartezian cu $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ versorii axei Ox, respectiv Oy. Triunghiul ABC este dreptunghic în A dacă şi numai dacă $AB \perp AC \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$, dar $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} - (2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}) = -3\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j}$. Analog se obţine că $\overrightarrow{AC} = (2\alpha - 2)\overrightarrow{i} + (\alpha^2 - 4\alpha + 3)\overrightarrow{j} \Rightarrow$ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -3(2\alpha - 2) - 2(\alpha^2 - 4\alpha + 3) \Rightarrow -2\alpha^2 + 2\alpha = 0 \Leftrightarrow -2\alpha(\alpha - 1) = 0 \Leftrightarrow$ $\alpha = 0 \Rightarrow C(0, 4)$ sau $\alpha = 1 \Rightarrow C(2, 1)$. Deci convine doar varianta cu $\alpha = 0$ deoarece în celălalt caz punctul C coincide cu punctul A, şi astfel triunghiul ABC este degenerat.

480. Dacă $ABCD$ este romb atunci el este paralelogram şi diagnoalele sale sunt perpendiculare. Cum $\overrightarrow{AB} = -3\overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j} = \overrightarrow{DC}$ obţinem că $ABCD$ este paralelogram. Mai trebuie sa impunem condiţia ca diagonalele să fie perpendiculare, deci $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$. $\overrightarrow{AC} = (\alpha - 3)\overrightarrow{i} + (\beta + 4)\overrightarrow{j}$ şi $\overrightarrow{BD} = (\alpha + 3)\overrightarrow{i} + (\beta - 4)\overrightarrow{j} \Rightarrow \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = \alpha^2 + \beta^2 - 25 \Rightarrow$ $\alpha^2 + \beta^2 = 25$, ceea ce ne arată că avem o infinitate de perechi de numere reale (α, β) pentru care $ABCD$ este romb.

481. Pentru ca $\overrightarrow{v}$ să fie injectivă, fie $(m, n), (s, t) \in \mathbb{R}^2$ şi $\overrightarrow{v}(m, n) = \overrightarrow{v}(s, t) \Leftrightarrow$ $m\overrightarrow{a} + n\overrightarrow{b} = s\overrightarrow{a} + t\overrightarrow{b}$. Înmulţind relaţia la dreapta cu $\overrightarrow{a}$ se obţine că $(m\overrightarrow{a} + n\overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{a} =$ $(s\overrightarrow{a} + t\overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{a} \Leftrightarrow m\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a} + n\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{a} = s\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a} + t\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{a} \Leftrightarrow m \cdot |\overrightarrow{a}|^2 = s \cdot |\overrightarrow{a}|^2$. Dar $|\overrightarrow{a}| \neq 0 \Rightarrow m = s$. Analog înmulţind relaţia la dreapta cu $\overrightarrow{b}$ se obţine că $n = t \Rightarrow (m, n) = (s, t)$, deci $\overrightarrow{v}$ este injectivă. Fie $\overrightarrow{u}$ un vector din plan. Căutăm (α, β) astfel încât $\overrightarrow{v}(\alpha, \beta) = \overrightarrow{u} \Leftrightarrow \alpha\overrightarrow{a} + \beta\overrightarrow{b} = \overrightarrow{u}$. Utilizând acelaşi raţionament ca şi mai sus, după înmulţire la dreapta cu $\overrightarrow{a}$ se obţine că $\alpha \cdot |\overrightarrow{a}|^2 = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{a} \Rightarrow \alpha = \dfrac{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{a}}{|\overrightarrow{a}|^2}$.

Analog se obţine că $\beta = \dfrac{\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{b}|^2}$, deci $\overrightarrow{u} \in \mathrm{Im}\overrightarrow{v}$, $\forall\overrightarrow{u}$ vector din plan, deci $\overrightarrow{v}$ este surjectivă, iar folosind faptul că este şi injectivă, ea va fi şi inversabilă.

482. $\overrightarrow{BA} = 3\overrightarrow{i}$ şi $\overrightarrow{BC} = -2\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j} \Rightarrow BA = 3$ şi $BC = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}$. $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = 3\cdot(-2) + 0\cdot(-2) = -6$. Dar $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{BA}|\cdot|\overrightarrow{BC}|\cdot\cos(\measuredangle ABC) \Leftrightarrow -6 = 3\cdot 2\sqrt{2}\cdot\cos(\measuredangle ABC) \Rightarrow \cos(\measuredangle ABC) = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \measuredangle ABC = \dfrac{3\pi}{4}$.

483. Se observă că punctele $A(0,3)$ şi $B(-2,0)$ se află pe dreapta d. Atunci $\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j}$. Acum fie $P(x,y)$ cu $x,y\in\mathbb{R}$ proiecţia lui M pe dreapta d. Evident că $P\in d$, deci $3x - 2y + 6 = 0$, şi $\overrightarrow{MP} = (x-5)\overrightarrow{i} + (y-4)\overrightarrow{j}$. Impunem condiţia că $MP \perp d$, adică $\overrightarrow{MP}\perp\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow -2(x-5) - 3(y-4) = 0 \Leftrightarrow -2x - 3y + 22 = 0$.
Aşadar am obţinut sistemul $\begin{cases} 3x - 2y + 6 = 0 \\ -2x - 3y + 22 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 2$ şi $y = 6$, deci $P(2,6)$.

484. ABC este triunghi deci $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} = \overrightarrow{0}$. După înmulţire cu $\overrightarrow{b}$ se obţine că: $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} + |\overrightarrow{b}|^2 + \overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{b} = 0$, dar fiecare termen din membrul stâng este pozitiv $\Rightarrow \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} = |\overrightarrow{b}|^2 = \overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{b} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{b} = 0$, deci $B\equiv C \Rightarrow$ triunghiul ABC este degenerat.

485. $|\overrightarrow{c}|^2 = \overrightarrow{c}^2 = (\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b})^2 = |\overrightarrow{a}|^2 + 2\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b} + |\overrightarrow{b}|^2$. Dar $|\overrightarrow{c}|^2 = (|\overrightarrow{a}| + |\overrightarrow{b}|)^2 = |\overrightarrow{a}|^2 + 2|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}| + |\overrightarrow{b}|^2$. Deci $|\overrightarrow{a}|^2 + 2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} + |\overrightarrow{b}|^2 = |\overrightarrow{a}|^2 + 2|\overrightarrow{a}|\cdot|\overrightarrow{b}| + |\overrightarrow{b}|^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}|\cdot|\overrightarrow{b}| \Leftrightarrow |\overrightarrow{a}|\cdot|\overrightarrow{b}|\cdot\Big(1 - \cos(\measuredangle(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}))\Big) = 0$, deci $\cos(\measuredangle(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b})) = 1 \Rightarrow$ vectorii $\overrightarrow{a}$ şi $\overrightarrow{b}$ sunt coliniari. În cazul în care ar fi opuşi atunci $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$, ceea ce ar contrazice faptul că $\overrightarrow{c}$ este nenul.

486. $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$. **Metoda 1.** $AB = AM = BM \iff AB^2 = AM^2 = BM^2 \iff (a+1)^2 + (b+2)^2 = (a-3)^2 + (b-1)^2 = 25...$
Metoda 2 Fie C mijlocul segmentului $[AB]$; notăm cu d mediatoarea segmentului $[AB]$. $d\perp AB, C\in d \Rightarrow C(1, -\dfrac{1}{2}$; $m_{AB} = \dfrac{3}{4} \Rightarrow m_d = -\dfrac{4}{3}$. $d : y - y_c = m_d(x - x_C) \Rightarrow d : 4x + 3y - \dfrac{5}{2} = 0$. $AB : \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow AB : -3x + 4y + 5 = 0$. $h_A = dist(M, AB) = \dfrac{|-3x_M + 4y_M + 5|}{\sqrt{(-3)^2 + 4^2}} = \dfrac{|-3x_M + 4y_M + 5|}{5} \Rightarrow |-3x_M + 4y_M + 5| =$

$\frac{25\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} 4x_M + 3y_M - \frac{5}{2} = 0 \\ -3x_M + 4y_M + 5 = -\frac{25\sqrt{3}}{2} \end{cases}.$

487. $D(\frac{8}{3}, \frac{11}{3})$, $E(\frac{4}{7}, \frac{15}{7})$, $F(\frac{14}{5}, \frac{9}{5})$, $AD : 11x - 5y - 11 = 0$, $BE : x - 4y + 8 = 0$, $CF : 8x + 7y - 40 = 0$.

488. Fie M mijlocul lui AB astfel încât $M\left(\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\right)$. Dreapta OC are ecuația $y = x$, deci M aparține lui OC. Prin urmare, OC este mediana lui AB. Panta lui OC este 1 iar panta lui AB este $-\frac{1}{5}$, deci dreptele nu sunt perpendiculare. Astfel, OC este mediana, dar nu înălțimea. Prin urmare, triunghiul AOB nu este isoscel, ceea ce înseamnă că nu mai poate fi o altă linie importantă.

489. Într-adevăr pantele dreptelor AB şi AC sunt $m_{AB} = -1$ respectiv $m_{AC} = 1$. Aşadar $AB \perp AC$ deoarece $m_{AB} \cdot m_{AC} = -1$. $\boxed{\text{B}}$ **Adevărat.** Orice triunghi XYZ are acelaşi centru de greutate cu triunghiul său median întrucât dreapta suport a oricărei mediane a triunghiului XYZ este dreaptă suport pentru o mediană a triunghiului median al ΔXYZ. $\boxed{\text{C}}$ **Fals.** Ortocentrul triunghiului dreptunghic ABC este vârful drept $A(-4, 1)$, iar ortocentrul triunghiului median MNP, care este dreptunghic, este vârful drept $M(\frac{-7}{2}, \frac{9}{2})$. $\boxed{\text{D}}$ **Fals.** Centrul cercului circumscris triunghiului dreptunghic ABC este mijlocul $M(\frac{-7}{2}, \frac{9}{2})$ al ipotenuzei sale, iar centrul cercului circumscris triunghiului dreptunghic MNP este mijlocul $U\left(-\frac{11}{4}, \frac{11}{4}\right)$al ipotenuzei sale. **Observaţie.** Pentru calculul coordonatelor centrului de greutate, al ortocentrului sau centrului cercului cricumscris unui triunghi există formule binecunoscute. În cazul problemei noastre alternativa aplicarii acestora ar însemna soluţii mai lungi mai ales pentru punctele C şi D. Totuşi, pentru B alternativa mai sus menţionată este rezonabilă: Coordonatele centrului de greutate al triunghiului ABC sunt $(\frac{-4 + (-7) + 0}{3}, \frac{1 + 4 + 5}{3})$ adică $G_{\Delta ABC}(\frac{-11}{3}, \frac{10}{3})$. Ţinând seama de faptul că $M(\frac{-7 + 0}{2}, \frac{4 + 5}{2})$, $N(\frac{-4 + 0}{2}, \frac{1 + 5}{2})$, $P(\frac{-4 + (-7)}{2}, \frac{1 + 4}{2})$ adică $M(\frac{-7}{2}, \frac{9}{2})$, $N(-2, 3)$, $P(\frac{-11}{2}, \frac{5}{2})$, deducem că centrul de greutate al triunghiului MNP are coordonatele $\left(\frac{\frac{-7}{2}+(-2)+(\frac{-11}{2})}{3}, \frac{\frac{9}{2}+3+\frac{5}{2}}{3}\right)$ adică $G_{\Delta MNP}(\frac{-11}{3}, \frac{10}{3})$, fapt care arată că $G_{\Delta ABC} = G_{\Delta MNP}$.

490. Din definiția pantei tangentei, $m_{AB} = \tan\theta$ și $m_{CD} = \tan\gamma$. Cum $m_{AB} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ și $m_{CD} = -1$, obținem $\theta = \frac{\pi}{6}$, $\gamma = \frac{3\pi}{4}$.

491. Evident A_1 are coordonatele $(1,1)$. Cercul $C_2\left(A_2; r_2\right)$ are centrul A_2 de coordonate (a_2, a_2) şi raza $r_2 = a_2$. Condiţia de tangen ţă cu cercul $C_1\left(A_1; r_1\right)$ ne conduce la valoarea $r_2 = 3 - 2\sqrt{2}$ Cercul $C_{n+1}\left(A_{n+1}; r_{n+1}\right)$ are centru A_{n+1} de coordonate (a_{n+1}, a_{n+1}) şi rază $r_{n+1} = a_{n+1}$. Condiţia de tangenţă cu cercul $C_n\left(A_n; r_n\right)$ ne conduce la valoarea $r_{n+1} = \left(3-2\sqrt{2}\right) r_n$. Urmează că $r_n = \left(3-2\sqrt{2}\right)^{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Atunci $s_n = \pi\left(r_n\right)^2 = \begin{cases} \pi, & \text{dacă } n = 1 \\ \pi\left(3-2\sqrt{2}\right)^{2n-3}, & \text{dacă } n \in \mathbb{N} \text{ şi } n \geq 2 \end{cases}$, deci $s_1 + s_2 + ... + s_n = \pi + \frac{\pi}{8}\sqrt{2}\left(1 - \left(3-2\sqrt{2}\right)^{2n-3}\right), \forall n \in \mathbb{N}$. Urmează că $\lim\limits_{n\to\infty}(s_1 + s_2 + ... + s_n) = \frac{8+\sqrt{2}}{8}\pi$. $s_n = \pi\left(r_n\right)^2 = \begin{cases} \pi, & \text{dacă } n = 1 \\ \pi\left(3-2\sqrt{2}\right)^{2n-2} & \text{dacă } n \in \mathbb{N} \text{ şi } n \geq 2 \end{cases}$ deci $s_1 + s_2 + ... + s_n = \pi\left(1 + (3-2\sqrt{2})^2 + (3-2\sqrt{2})^4 + ... + (3-2\sqrt{2})^{2(n-1)}\right) = \pi\frac{1-(3-2\sqrt{2})^{2n}}{1-(3-2\sqrt{2})^2} = \pi\frac{1-(3-2\sqrt{2})^{2n}}{12\sqrt{2}-16}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$. Urmează că $\lim\limits_{n\to\infty}(s_1 + s_2 + ... + s_n) = \frac{1}{12\sqrt{2}-16} = \frac{4+3\sqrt{2}}{8}\pi$.

492. Observăm următoarea regulă: Dacă numărul pasului este multiplu de 2, jucătorul se află în punctul $(4, -2)$, iar în caz contrar în punctul $(2, 2)$.

493. Coordonatele centrului de greutate sunt: $G\left(\frac{1+(-4)+2}{3}, \frac{2+(-1)+(-3)}{3}\right) = G\left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$.

494. Deoarece $\overrightarrow{BA} = 4\overrightarrow{j}$ şi $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{i}$, atunci $AB \perp BC$, deci triunghiul ABC este dreptunghic în B. Fie acum $P(\alpha, \beta)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ şi $P \in [CA]$. $MBNP$ este pătrat $\Rightarrow MP \perp BA \Rightarrow MP \,||\, BC$. Dar cum $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{i}$, deci paralel cu $Ox \Rightarrow M(1, \beta)$. Analog $N(\alpha, 1)$. Până aici $MBNP$ este dreptunghi, iar impunând condiţia ca toate laturile să fie egale obţinem că: $MP = PN \Leftrightarrow \alpha - 1 = \beta - 1 \Leftrightarrow \alpha = \beta$. Acum $P \in [CA]$.

Determinăm ecuaţia dreptei CA: $\dfrac{y-1}{x-1} = \dfrac{5-1}{1-3} \Leftrightarrow 2x + y - 7 = 0 \Rightarrow 3\alpha - 7 = 0 \Leftrightarrow \alpha = \dfrac{7}{3} = \beta \Rightarrow P\left(\dfrac{7}{3}, \dfrac{7}{3}\right) \in [AC]$, deoarece $1 < \dfrac{7}{3} < 3$. Deci lungimea laturii pătratului $MBNP$ este $\dfrac{7}{3} - 1 = \dfrac{4}{3}$.

495. Determinăm ecuaţia înălţimii din vârful C. $h_C : \dfrac{y-(-1)}{x-2} = m_C$, unde m_C este panta dreptei h_C. Dar $h_C \perp AB \Rightarrow m_C \cdot m_{AB} = -1 \Leftrightarrow m_C \cdot \dfrac{1-2}{-1-0} = -1 \Leftrightarrow m_C = -1$ $\Rightarrow h_C : x + y - 1 = 0$. Analog se obţine că $h_B : 2x - 3y + 5 = 0$. Pentru a găsi coordonatele lui $H(x, y)$ trebuie să găsim intersecţia dreptelor h_C şi h_B. Deci obţinem sistemul:
$\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ 2x - 3y + 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow 5x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{2}{5} \Rightarrow y = \dfrac{7}{5}$. Astfel $H\left(-\dfrac{2}{5}, \dfrac{7}{5}\right)$.

496. Analog ca şi la problema precedentă se determină coordonatele ortocentrului $H\left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$. Acum fie $O(x, y)$ şi folosind relaţia lui Sylvester: $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ obţinem că: $(\dfrac{2}{3} - x)\overrightarrow{i} + (\dfrac{1}{3} - y)\overrightarrow{j} = (-1-x)\overrightarrow{i} + (-3-y)\overrightarrow{j} + (-x)\overrightarrow{i} + (1-y)\overrightarrow{j} + (2-x)\overrightarrow{i} + (-y)\overrightarrow{j} \Leftrightarrow (\dfrac{2}{3} - x)\overrightarrow{i} + (\dfrac{1}{3} - y)\overrightarrow{j} = (1-3x)\overrightarrow{i} + (-2-3y)\overrightarrow{j} \Rightarrow 1 - 3x = \dfrac{2}{3} - x$ si $-2 - 3y = \dfrac{1}{3} - y \Rightarrow x = \dfrac{1}{3}$ si $y = -\dfrac{7}{3}$, deci $O\left(\dfrac{1}{6}, -\dfrac{7}{6}\right)$.

497. Fie $I(x, y)$ centrul cercului înscris triunghiului ABC şi d_{AB}, d_{BC}, d_{CA} ecuaţiile dreptelor ce au ca suport laturile triunghiului. Avem că: $d(I, d_{AB}) = d(I, d_{BC}) = d(I, d_{CA})$. Dar $d_{AB} : \dfrac{y-1}{x-2} = \dfrac{-1-1}{-2-2} \Leftrightarrow d_{AB} : x - 2y = 0$, iar cum BC este paralelă cu axa Ox se obţine că $d_{BC} : y + 1 = 0$, iar în mod ananlog $d_{CA} : x - 2 = 0$. Folosind formula distanţei de la un punct la o dreaptă obţinem că: $\dfrac{|x-2y|}{\sqrt{5}} = |y+1| = |x-2|$. Relaţia $|y+1| = |x-2|$ reprezintă ecuaţia celor două bisectoare (interioară și exterioară) a unghiului A. Noi ne dorim să eliminiăm ecuaţia bisectoarei exterioare. În primul caz avem că: $y + 1 = x - 2 \Leftrightarrow x - y - 3 = 0$ şi intersectând cu dreapta AB obţinem punctul de coordonate $(6, 3)$, care este în afara triunghiului ABC, deci $y + 1 = x - 2$ este ecuaţia bisectoarei exterioare. Deci rămânem cu $y + 1 = -x + 2 \Leftrightarrow x + y - 1 = 0$. Analog pentru $\dfrac{|x-2y|}{\sqrt{5}} = |y+1|$ se obţine că $\dfrac{x-2y}{\sqrt{5}} = y + 1 \Leftrightarrow (\sqrt{5}+2)y - x + \sqrt{5} = 0$. Deci obţinem sistemul: $\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ (\sqrt{5}+2)y - x + \sqrt{5} = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -1 + \sqrt{5}$ şi $y = 2 - \sqrt{5}$, de unde $I\left(-1 + \sqrt{5}, 2 - \sqrt{5}\right)$.

498. Pentru a determina punctele A, B, C determinăm intersecţia dreptelor AB, BC şi CA. $A(x_A, y_A) \in AB \cap CA \Leftrightarrow \begin{cases} x_A - 2y_A + 4 = 0 \\ x_A + 3y_A + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow y_A = 0$ şi $x_A = -4$, deci $A(-4, 0)$.

$B(x_B, y_B) \in AB \cap BC \Leftrightarrow \begin{cases} x_B - 2y_B + 4 = 0 \\ 2x_B + y_B - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow 4x_B = 0 \Rightarrow x_B = 0$ şi $y_B = 2$, deci $B(0, 2)$. $C(x_C, y_C) \in BC \cap CA \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_C + y_C - 2 = 0 \\ x_C + 3y_C + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow 5x_C = 10 \Rightarrow x_C = 2$ şi $y_C = -2$, deci $C(2, -2)$.

499. Punctul $M(x, y)$ este pe cerc $\Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 = 4$ $(\star)$. $\overrightarrow{AM} = (x-4)\overrightarrow{i} + (y-2)\overrightarrow{j}$ şi $\overrightarrow{CM} = x\overrightarrow{i} + (y-1)\overrightarrow{j}$. Dreapta AM este tangentă la cerc $\iff \overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{CM} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CM} = 0 \Leftrightarrow (x-4)\cdot x + (y-2)\cdot(y-1) = 0 \Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 - 4x - y + 1 = 0$ $\Leftrightarrow 4 - 4x - y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = 5 - 4x$. Substituind în $(\star)$ obţinem că: $x^2 + (4-4x)^2 = 4$ $\Leftrightarrow 17x^2 - 32x + 12 = 0 \Rightarrow \Delta = 208 \Rightarrow x_{1,2} = \dfrac{16 \pm 2\sqrt{13}}{17} \Rightarrow y_1 = 5 - 4x_1 = 5 - 4 \cdot \dfrac{16 + 2\sqrt{13}}{17} = \dfrac{21 - 8\sqrt{13}}{17} \Rightarrow y_2 = 5 - 4x_2 = 5 - 4 \cdot \dfrac{16 - 2\sqrt{13}}{17} = \dfrac{21 + 8\sqrt{13}}{17}$

Deci $M\left(\dfrac{16 + 2\sqrt{13}}{17}, \dfrac{21 - 8\sqrt{13}}{17}\right)$ şi $M\left(\dfrac{16 - 2\sqrt{13}}{17}, \dfrac{21 + 8\sqrt{13}}{17}\right)$.

500. Cercurile $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$ sunt tangente $\Leftrightarrow d(O(0,0), M(x,y)) = 2R \Leftrightarrow OM = 2 \Leftrightarrow$ $x^2 + y^2 = 4$, deci punctele M se află pe un cerc.

501. Triunghiul AMB este dreptunghic în $M \Leftrightarrow AM^2 + MB^2 = AB^2 \Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-2)^2 + (x-2)^2 + (y-1)^2 = 3^2 + (-1)^2 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 + x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 = 10$ $\Leftrightarrow 2x^2 - 2x + 2y^2 - 6y + 10 = 10 \Leftrightarrow x^2 - x + y^2 - 3y = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x \cdot \dfrac{1}{2} + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + y^2 - 2y \cdot \dfrac{3}{2} + \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \dfrac{3}{2}\right)^2 = \dfrac{5}{2}$. Deci punctele M se află pe un cerc.

502. Fie $G(x_G, y_G)$ centrul de greutate comun triunghiurilor $AB_\alpha C_\beta$. Atunci $1 + (-2) + 0 = 3x_G$ şi $-3 + \alpha + \beta = 3y_G \Rightarrow \alpha + \beta = 3y_G + 3$ $(\star)$. Cum punctul G este fix $\Rightarrow 3y_G + 3$ este o constantă, deci $(\star)$ reprezintă ecuaţia unei drepte.

503. Determinăm ecuaţia lui AB : $\dfrac{y-0}{x-(-1)} = \dfrac{0-2}{-1-1} \Leftrightarrow \dfrac{y}{x+1} = 1 \Leftrightarrow x - y + 1 = 0$.

Acum $\mathcal{A}_{ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot AB \cdot d(C, AB)$. $AB = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$. Distanța $d(C, AB) =$

$\dfrac{|x_C - y_C + 1|}{\sqrt{2}} \Rightarrow 2\sqrt{2} \cdot \dfrac{|x_C - y_C + 1|}{\sqrt{2}} = 2 \Leftrightarrow |x_C - y_C + 1| = 1 \Leftrightarrow x_C - y_C = 0$ sau $x_C - y_C + 2 = 0$. Deci avem o infinitate de puncte C cu proprietatea cerută.

504. Fie $\dfrac{AC}{CB} = \dfrac{AB}{AC} = k \Rightarrow AC = kCB, AB = kAC \Rightarrow AB = k^2CB$. $\dfrac{AC}{CB} = k \Rightarrow x_C = \dfrac{x_A + kx_B}{1+k}, y_C = \dfrac{y_A + ky_B}{1+k}$. Dar $AB = AC + CB \Rightarrow k^2CB = kCB + CB \Rightarrow (CB > 0)\ k^2 - k - 1 = 0 \Rightarrow k_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow (k > 0) k = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. $x_C = 1 = \dfrac{x_A + kx_B}{1+k}, x_B = \dfrac{1 + k - x_A}{k} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{1+\sqrt{5}}, y_B = \dfrac{2(1+k) - y_A}{k} = \dfrac{2\sqrt{5}-1}{1+\sqrt{5}} \Rightarrow (x_B + x_A)^2 - y_B = \dfrac{49}{4} + \dfrac{5\sqrt{5}-6}{1+\sqrt{5}} + \dfrac{6-2\sqrt{5}}{6+2\sqrt{5}}$.

505. $AB : y = \dfrac{3x+8}{7} \Rightarrow m_{AB} = \dfrac{3}{7}; BC : y = \dfrac{x-6}{-2} \Rightarrow m_{BC} = -\dfrac{1}{2}$. Fie d_1, d_2, d_3 cele 3 înălțimi ale $\triangle ABC : d_1 \perp AB, d_2 \perp BC, d_3 \perp AC$. $m_{d_1} = -\dfrac{7}{3}, C \in d_1 \Rightarrow d_1 : y = -\dfrac{7}{3}x - \dfrac{13}{3}$; $m_{d_2} = 2, A \in d_2 \Rightarrow d_2 : y = 2x + 9$. P este ortocentru $\Rightarrow P = d_1 \cap d_2 \Rightarrow P(-\dfrac{40}{13}, \dfrac{37}{13})$. $A_{\triangle PAB} = \dfrac{275}{26}$. Fie . Fie $M = d_2 \cap BC \Rightarrow M(-\dfrac{3}{2}, 6)$. Fie P' simetricul lui P față de dreapta $BC \Rightarrow P'(\dfrac{1}{13}, \dfrac{119}{13})$.

506. $x_G = \dfrac{10}{3}, y_G = 2$ Folosind formula distanței obținem: $\left|\dfrac{m \cdot \frac{10}{3} - 2 + 2}{\sqrt{m^2+1}}\right| = 2$ Cum $m > 0$, obținem: $m \cdot 10 = 6 \cdot \sqrt{m^2+1}$ Deci: $m = \dfrac{6}{8} \Rightarrow 8 \cdot m = 6$

507. Fie G centrul de greutate $\Rightarrow x_G = -\dfrac{1}{3}, y_G = \dfrac{5}{3}$;. Panta dreptei OD este: $\text{panta}_{OD} = \dfrac{y_D}{x_D}$ Iar panta dreptei OG este -5. Cum dreptele sunt perpendiculare, obținem: $\dfrac{y_D}{x_D} = \dfrac{1}{5}$ Astfel, avem: $5 \cdot \dfrac{y_D}{x_D} + 2 = 3$

508. Fie punctele $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B)$ și $C(x_C, y_C) \Rightarrow G(\dfrac{x_A + x_B + x_C}{3}, \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3})$.

$$\begin{cases} x_A + x_B + x_C = 18 \\ y_A + y_B + y_C = 21 \end{cases} \quad \mathbf{(1)}; \quad \{C\} = AC \cap BC \Rightarrow \begin{cases} 2x_C - y_C + 1 = 0 \\ 5x_C - 7y_C + 16 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 14x_C - 7y_C + 7 = 0 \\ 5x_C - 7y_C + 16 = 0 \end{cases} \Rightarrow 9x_C - 9 = 0 \Rightarrow C(1,3) \begin{cases} x_A + x_B = 17 \\ y_A + y_B = 18 \end{cases} \quad \mathbf{(2)};$$

$$\begin{cases} 5x_A - 7y_A + 16 = 0 (A \in AC) \\ 2x_B - y_B + 1 = 0 (B \in BC) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10x_A - 14y_A + 32 = 0 \\ 10x_B - 5y_B + 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow 10(x_A + x_B) - 14y_A -$$

$5y_B + 37 = 0 \Rightarrow \begin{cases} 14y_A + 5y_B = 207 \\ y_A + y_B = 18 \end{cases} \Rightarrow y_A = 13, y_B = 5.\ 5x_A = 7 \cdot 13 + 16 = 0 \Rightarrow$
$x_A = 15, x_B = 2 \Rightarrow A(15, 13), B(2, 5).$

$AB : \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow AB : \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 15 & 13 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow AB : x \cdot \begin{vmatrix} 13 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} - y \cdot \begin{vmatrix} 15 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} +$
$\begin{vmatrix} 15 & 13 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 0 \iff AB : 8x - 13y + 49 = 0$

509. Fie α unghiul dintre dreptele d și d', unde d are panta m, iar d' are panta m'.
$tg\alpha = \left|\frac{m - m'}{1 + mm'}\right|$; $d' : x + 2y + 5 = 0 \Rightarrow d' : y = -\frac{1}{2}x - \frac{5}{2} \Rightarrow m' = -\frac{1}{2}$; $\operatorname{tg} 45° = \left|\frac{m + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}m}\right| \Rightarrow 1 = \left|\frac{2m + 1}{2 - m}\right|$. **Cazul 1:** $\frac{2m+1}{2-m} = 1 \Rightarrow 2m + 1 = 2 - m \Rightarrow 3m = 1 \Rightarrow$
$m = \frac{1}{3}$. $d_1 : y - y_A = m(x - x_A) \Rightarrow d_1 : y + 1 = \frac{1}{3}(x + 1) \Rightarrow d_1 : x - 3y - 2 = 0.$
Cazul 2: $\frac{2m+1}{2-m} = -1 \Rightarrow 2m + 1 = -2 + m \Rightarrow m = -3$. $d_2 : y - y_A = m(x - x_A) \Rightarrow$
$d_2 : 3x + y + 4 = 0$. $d' : x + 2y + 5 = 0$, pentru $x = -1 \Rightarrow y = -2$ și $x = -3, y = -1$.

510. $AB||CD \Rightarrow m_{CD} = m_{AB} = 2$ și $AD||BC \Rightarrow m_{BC} = m_{AD} = 3$. $\{A\} = AB \cap AD \Rightarrow$
$\begin{cases} y_A = 2x_A \\ y_A = 3x_A - 1 \end{cases} \Rightarrow 3x_A - 1 = 2x_A \Rightarrow x_A = 1, y_A = 2, A(1, 2)$. Deoarece M - mijlocul
$[AC] \Rightarrow x_M = \frac{x_A + x_C}{2} \Rightarrow x_C = 3$; $2y_M = y_A + y_C \Rightarrow y_C = 4$. $CD : 2x - y - 2 = 0$,
$AD : y = 3x - 1$. $\{D\} = AD \cap CD \Rightarrow \begin{cases} y_D = 2x_D - 2 \\ y_D = 3x_D - 1 \end{cases} \Rightarrow 2x_D - 2 = 3x_D - 1 \Rightarrow x_D =$
$-1, y_D = -4$. Deoarece M - mijlocul $[BD], M(2, 3) \Rightarrow 2x_M = x_B + x_D \Rightarrow x_B = 5; 2y_M =$
$y_B + y_D \Rightarrow y_B = 10$. N - mijlocul lui $[BC] \Rightarrow N(4, 7)$, P - mijlocul lui $[CD] \Rightarrow P(1, 0)$.
$BD : \frac{y+4}{7} = \frac{x+1}{3} \Rightarrow BD : 7x - 3y - 5 = 0$. $AC : x - y + 1 = 0$.

511. Mai întâi, aflăm punctul comun al celor două drepte rezolvând sistemul format de ecuațiile lor: $\begin{cases} x + 2y - 3 = 0 \\ 2x - 3y + 1 = 0 \end{cases}$ Rezolvăm sistemul și obținem punctul $A(1, 1)$.Acum, ecuația dreptei care trece prin punctul $A(1, 1)$ și prin originea $O(0, 0)$ este: $x = y$

512. Fie $A(1, y) \in d_1$, $B(x, 1) \in d_2$, unde $x, y \in \mathbb{R}$. O, A, B, C sunt vârfurile unui pătrat cu $[AB]$ diagonlă $\Longrightarrow$ $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = x + y = 0$ şi $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$. Aşadar, $A(1, -x)$, $B(x, 1)$ şi $C(1 + x, 1 - x)$, unde $x \in \mathbb{R}$. $C \in d : x + y = 2$. $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1 + x^2}\sqrt{2} \geq \sqrt{2}$. $\mathcal{A}_{OACB} = 1 + x^2 \geq 1$.

513. Ecuaţia dreptei determinată de punctele $A\,(a, 0)$ şi $F\,(-b, b)$ este $bx + (a + b)\,y = ab$. Ecuaţia dreptei determinată de punctele $B\,(0, b)$ şi $E\,(a, -a)$ este $(a + b)\,x + ay = ab$. Intersecţia segmentelor AF şi BE poate fi determinată ca soluţia unică $M\Big(\dfrac{ab^2}{a^2 + ab + b^2}, \dfrac{a^2 b}{a^2 + ab + b^2}\Big)$ a sistemului liniar $\begin{cases} bx + (a + b)\,y &= ab, \\ (a + b)\,x + ay &= ab. \end{cases}$ Înălţimea din vârful C al triunghiului ABC_Δ are ecuaţia $ax - by = 0$. Se poate observa, că coordonatele punctului M satisfac ecuaţia dreptei $ax - by = 0$. Aria triunghiului AMC_Δ este $\mathcal{A} = \dfrac{a^3 b}{2\,(a^2 + ab + b^2)} \neq \dfrac{a^2 b^2}{2\,(a^2 + ab + b^2)}$, deoarece $a > 0$ şi $a \neq b$.

514. Notăm $d_1 \cap Ox = \{D\} \Longrightarrow y_D = 0, x_D = 4 \Longleftrightarrow D(4, 0)$. $d_1 \cap Oy = \{D'\} \Longrightarrow x_{D'} = 0, y_{D'} = 4 \Longleftrightarrow D'(0, 4)$. Avem, așadar, $d \perp DD'$; Fie M mijlocul segmentului $DD' \Longrightarrow M(2, 2)$. $m_{d_1} = -1 \Longrightarrow m_d = 1 \Longleftrightarrow d : y = x$. Cum $A \in d \Longrightarrow x_A = y_A$. Notăm cu d_3 dreapta de ecuație $y = 3x$. $B = pr_{d_3}(A) \Longrightarrow y_B = 3x_B$. Avem $AB \perp d_3 . d_3 : y = 3x \Rightarrow m_{d_3} = 3 \Rightarrow m_{AB} = -\dfrac{1}{3}$. Fie $x_A = a \Rightarrow y_A = a$. Atunci, avem ecuația dreptei $AB : y - a = -\dfrac{1}{3}(x - a) \Longleftrightarrow y = -\dfrac{x}{3} + \dfrac{4a}{3}$. Cum $\{B\} = AB \cap d_3 \Rightarrow 3x_B = -\dfrac{1}{3} \cdot x_B + \dfrac{4a}{3} \Longleftrightarrow 9x_B = -x_B + 4a \Longleftrightarrow x_B = \dfrac{2a}{5} \Rightarrow y_B = \dfrac{6a}{5} \Rightarrow B\Big(\dfrac{2a}{5}, \dfrac{6a}{5}\Big)$. Fie M_2 mijlocul segmentului $AB \Longleftrightarrow x_{M_2} = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{7a}{10}, y_{M_2} = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{11a}{10} \Rightarrow M_2\Big(\dfrac{7a}{10}, \dfrac{11a}{10}\Big)$, deci M_2 aparține dreptelor de ecuație $x - \dfrac{7}{11}y = 0$ sau $y = \dfrac{11}{7}x$.

515. Fie $d_1 : -7x + 3y + 2 = 0$, $d_2 : x + 2y - 10 = 0$, $d_3 : -5x + 7y + 16 = 0$. Dacă le intersectăm două câte două obținem: $d_1 \cap d_2 = \{A\}, A(2, 4)$, $d_1 \cap d_3 = \{B\}, B(-1, -3)$, $d_2 \cap d_3 = \{C\}, C(6, 2)$. Reprezentând în planul xOy semiplanele specifice fiecărei inecuații obținem că mulțimea soluțiilor sistemului este de fapt interiorul triunghiului ABC, împreună cu frontiera acestuia. Aria acestei mulțimi este aria lui

ABC, adică $\frac{1}{2}|\Delta|$, unde $\Delta = \det\begin{pmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} = -34$, deci aria este 17.

516. Fie $d_1 \cap O_x = A'(\frac{2}{5}, 0), d_1 \cap O_y = B(0, -2)$. M este mijlocul lui $AB \Rightarrow x_M = \frac{1}{5}, y_M = -1 \Rightarrow M(\frac{1}{5}, -1)$. $m_{d_1} = 5 \Rightarrow m_d = -\frac{1}{5}$. Dreapta d este de ecuație $y + 1 = -\frac{1}{5}(x - \frac{1}{5}) \iff y = -\frac{1}{5}x - \frac{24}{25} \Rightarrow A = (\frac{76 \cdot 2}{5 \cdot 27}, -\frac{32}{27})$ $\begin{cases} x_{B'} = \dfrac{y_{B'} + 2}{5} \\ x_{B'} = \dfrac{2y_{B'} + 8}{5} \end{cases} \Rightarrow$ $y_{B'} = -6, x_{B'} = -\frac{4}{5}$. Aria $= \frac{1}{2}\left|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\right| = \frac{2075}{189}$

517. $d \cap Ox = D_1(-\frac{5\sqrt{2}}{4}, 0)$. $d \cap Oy = D_2(0, -\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{3}})$. $OD_1 \approx 1,7; OD_2 \approx 4$. Fie $OF \perp D_1D_2 \Rightarrow OF = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{19}} \approx 1,6$. Dacă un punct P este între D_1 și F nu există puncte `super`, dar dacă punctul P este între D_2 și $F \Rightarrow$ există 3 puncte `super`.

518. Determinăm ecuațiile dreptelor ce formează triunghiul ABC: $AB : \frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} \iff \frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{1} \iff x - y + 2 = 0$; $AC : \frac{x - x_A}{x_C - x_A} = \frac{y - y_A}{y_C - y_A} \iff \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-4} \iff 2x + y - 5 = 0$; $BC : \frac{x - x_B}{x_C - x_B} = \frac{y - y_B}{y_C - y_B} \iff \frac{x-2}{1} = \frac{y-4}{-5} \iff 5x + y - 14 = 0$. Cum pentru toate dreptele coeficientul lui x este pozitiv, putem defini funcțiile f_{AB}, f_{AC}, f_{BC}. Coordonatele centrului de greutate sunt $x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = 2$ și $y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = 2$. Așadar, avem că: $f_{AB}(G) = f_{AC}(G) = -f_{BC}(G) = 1$, deci $f_{AB}(G)f_{BC}(G)f_{CA}(G) = -1 < 0$. Cum $3 - (-1) + 2 = 6 > 0$ și $5 \cdot 1 + 3 - 14 = -6 < 0$, avem că $f_{AB}(C) + f_{BC}(A) = 1 + (-1) = 0$. Fie $\alpha \in \mathbb{R}$. $(1-\alpha)x_a + \alpha x_b - (1-\alpha)y_a - \alpha y_b + 2 = 4a - 4a - 2 + 2 = 0$. Avem deci că $\forall \alpha \in \mathbb{R}, X((1-\alpha)x_a + \alpha x_b, (1-\alpha)y_a + \alpha y_b) \in AB$, deci $\forall \alpha \in \mathbb{R}, f_{AB}(X((1-\alpha)x_a + \alpha x_b, (1-\alpha)y_a + \alpha y_b)) = 0$. De fapt, mulțimea punctelor X de această formă reprezintă mulțimea punctelor ce se află pe dreapta determinată de A și B. Condiția $M(x_M, y_M) \in \text{int}ABC$ este echivalentă cu

(x_M, y_M) să fie soluție a sistemului de inecuații: $\begin{cases} x - y + 2 > 0 \\ 2x + y - 5 > 0 \\ 5x + y - 14 < 0 \end{cases}$ (acest lucru se poate observa grafic, hașurând semiplanele date de fiecare inecuație și observând că intersecția lor este tocmai interiorul triunghiului ABC). Așadar, dacă $M(x_M, y_M) \in \text{int}ABC$, avem că $f_{AB}(M) = f_{AC}(M) = 1, f_{BC}(M) = -1$, deci $f_{AB}(M)f_{AC}(M)f_{BC}(M) = -1 < 0$. Astfel, implicația de la stânga la dreapta este corectă. Implicația inversă este falsă și vom oferi un contra-exemplu: fie punctul $N(x_N, y_N)$ astfel încât $f_{AB}(N) = f_{AC}(N) = f_{BC}(N) = -1$. Atunci $f_{AB}(N)f_{AC}(N)f_{BC}(N) = -1 < 0$, dar cum $f_{AB}N = -1$, rezultă că $x_N - y_N + 2 < 0$, deci (x_N, y_N) nu este soluție a sistemului de inecuații ce descrie interiorul lui ABC. Așadar, nu are loc echivalența celor două afirmații.

519. Fie $M(x, y)$ un punct oarecare. Distanța de la M la O este $\sqrt{x^2 + y^2}$. Distanța de la M la dreapta $d : x = 1 \iff x - 1 = 0$ este $\dfrac{|x-1|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = |x - 1|$. Așadar, ecuația locului geometric cerut este: $\sqrt{x^2 + y^2} = |x - 1| \iff x^2 + y^2 = (x - 1)^2 \iff y^2 = -2x + 1 \iff x = \dfrac{y^2 - 1}{-2}$.

520. $x^2 + 4xy - 5y^2 = 0 \iff x^2 - xy + 5xy - 5y^2 = 0 \iff x(x - y) + 5y(x - y) = 0 \iff (x + 5y)(x - y) = 0$, care este reuniunea dreptelor $d_1 : x = -5y$ și $d_2 : x = y$, care sunt concurente în origine.

521. Fie $M(x, y)$. Avem că $MA^2 = (x - 3)^2 + (y - 4)^2$ și $MB^2 = (x + 1)^2 + (y - 7)^2 \Rightarrow MA^2 - MB^2 = (x - 3)^2 + (y - 4)^2 - (x + 1)^2 - (y - 7)^2 = -8x + 6y - 25 \Rightarrow MA^2 - MB^2 = 4 \iff -8x + 6y - 25 = 4 \iff -8x + 6y - 29 = 0$. Așadar, locul geometric al punctelor cu proprietatea din enunț este dreapta de ecuație $d : -8x + 6y - 29 = 0$. Cum $m_{AB} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{3}{-4}$ și $m_d = \dfrac{4}{3}$, rezultă că dreapta d este perpendiculară pe AB.

522.

$d_1 : y = m_1x + n_1$, unde m_1 este panta dreptei d_1; $d_2 : y = m_2x + n_2$ unde m_2 este panta dreptei d_2, $d_1 \perp d_2 \iff m_1 \cdot m_2 = -1$. $m_{AC} = \dfrac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \dfrac{y_A - y_C}{x_A - x_C} = \dfrac{5}{-5} = -1$ și $m_{BC} = \dfrac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = 1 \Rightarrow m_{AC} \cdot m_{BC} = -1 \Rightarrow AC \perp BC \Rightarrow \boxed{\text{A}}$ este adevărată, iar $\boxed{\text{B}}$ falsă. Mijlocul lui $[AB]$ este $M(x_M, y_M)$. $x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} = 3$,

$y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} = 2 \Rightarrow M(3,2)$. $N(x_N, y_N)$ este mijlocul lui $[OC]$. $x_N = \dfrac{x_O + x_C}{2} = \dfrac{1}{2}$, $y_N = \dfrac{y_O + y_C}{2} = \dfrac{5}{2} \Rightarrow N(\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$. $\begin{cases} AC : y = -x + 6 \\ Oy : x = 0 \end{cases} \Rightarrow CA \cap Oy = \{E\}, E(0,6)$.

$\begin{cases} BC : y - 4 = x \\ Ox : y = 0 \end{cases} \Rightarrow BC \cap Ox = \{F\}, F(-4,0)$. P - mijlocul lui $[EF] \Rightarrow x_P = -2, y_P =$

3. $MN : \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{2} & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow MN : x + 5y - 13 = 0$. M, N, P - coliniare $\iff P \in MN \iff$ $x_P + 5y_P - 13 = 0$ - adevărat.

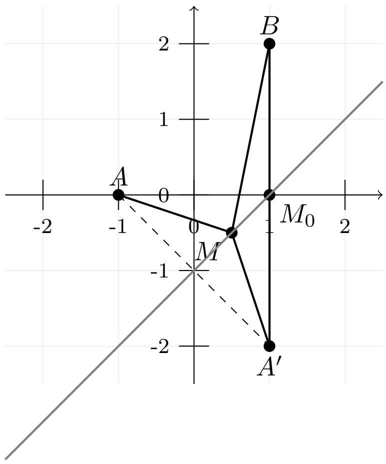
523. $d_1 : y = m_1 x + n_1$; $d_2 : y = m_2 x + n_2$, $d_1 || d_2 \iff m_1 = m_2$. $d : y = \dfrac{4}{3}x + 1 \Rightarrow$ $m_d = \dfrac{4}{3}$ și $d || d' \Rightarrow m_{d'} = m_d = \frac{4}{3}$. $d' : 4x - 3y + 3n = 0$. $dist(d', d) = dist(A, d')$ unde $A \in d$. $dist(A, d') = \dfrac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Rightarrow A(0,1)$. $dist(A, d') = \dfrac{4x_A - 3y_A + 3n|}{\sqrt{a^2 + b^2}} =$ $\dfrac{3|n-1|}{5} = 3 \Rightarrow |n-1| = 5 \Rightarrow n = \{-4, 6\}$. $d_1' : 4x - 3y + 18 = 0$, $d_2' : 4x - 3y - 12 = 0$.

524. $x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} = 2 \Rightarrow x_B = 2$, $y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} = 1 \Rightarrow y_B = 5, B(2,5)$.

$\mathcal{A}_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2} | \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} | = \dfrac{1}{2} | \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} | = 6$. $AC = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2} =$ $2\sqrt{2}$. $\mathcal{A}\triangle ABC = \dfrac{AC \cdot dist(B, AC)}{2} = 6 \Rightarrow dist(B, AC) = 3\sqrt{2}$. BG - mediană $\Rightarrow BG :$ $\dfrac{x-2}{2-2} = \dfrac{y-1}{5-1}$. Prin convenție, dacă numitorul este nul, atunci și numărătorul este nul $\Rightarrow BG : x = 2$, deci BG nu are pantă $\Rightarrow BG || Oy$.

525. Distanța de la punctul $P(0, a)$ la dreapta d_1 este dată de: $d(P, d_1) = \dfrac{|-3a+1|}{\sqrt{10}}$, Distanța de la punctul $P(0, a)$ la dreapta d_2 este dată de: $d(P, d_2) = \dfrac{|a+2|}{\sqrt{10}}$. Condiția ca cele două distanțe să fie egale este îndeplinită pentru $a \in \{-\dfrac{1}{4}, \dfrac{3}{2}\}$.

526. Fie $A'(1, -2)$ simetricul lui A faţă de d şi $\{M_0(1,0)\} = BA' \cap d$. Atunci $|AM_0| +$ $|M_0B| = |A'M_0| + |M_0B| = |A'B| \leq |A'M| + |MB| = |AM| + |MB|$ şi $|AM_0| = |M_0B| = 2$.



Deci, oricare ar fi $M \in d$, $s_M \in [4, \infty)$ şi avem: $\boxed{\text{A}}$ adevărată ($\forall M \in d : s_M \geq 4 > \sqrt{2}+2$); $\boxed{\text{B}}$ falsă ($s_M \to \infty$, când $|MM_0| \to \infty$); $\boxed{\text{C}}$ falsă ($s_{M_0} = 4 < \sqrt{2} + \sqrt{10}$, pentru că $\sqrt{2} + \sqrt{10} > 4 \Leftrightarrow 12 + 2\sqrt{20} > 16 \Leftrightarrow \sqrt{5} > 1$); $\boxed{\text{D}}$ falsă ($\forall M \in d : s_M \geq 4 > \sqrt{2} + 2$).

527. Fie $A'(1, 0)$. Deoarece înălțimea din A pe BD este mai mare decât înălțimea din A' pe BD, S este mai mare decât aria lui $A'BCD$. Fie $C'(-1, 0)$. Deoarece înălțimea din C pe BD este mai mare decât înălțimea din C' pe BD, aria lui $A'BCD$ este mai mare decât aria lui $A'BC'D$. Deoarece suma înălțimilor din B și D pe $A'B'$ este 2, aria lui $A'BC'D$ este 2. Deci, $S \in (2, 4)$.

528. Într-adevăr pantele dreptelor AB şi AC sunt $m_{AB} = \dfrac{4-1}{-7-(-4)} = -1$ respectiv $m_{AC} = \dfrac{5-1}{0-(-4)} = 1$. Aşadar $AB \perp AC$ deoarece $m_{AB} \cdot m_{AC} = -1$. De altfel dreptele AB şi AC sunt paralele cu cele două bisectoare ale reperului cartezian considerat. $\boxed{\text{B}}$ **Adevărat.** Orice triunghi XYZ are acelaşi centru de greutate cu triunghiul său median întrucât dreapta suport a oricărei mediane a triunghiului XYZ este dreaptă suport pentru o mediană a triunghiului median al ΔXYZ. $\boxed{\text{C}}$ **Fals.** Ortocentrul triunghiului dreptunghic ABC este vârful drept $A(-4, 1)$, iar ortocentrul triunghiului median MNP, care este dreptunghic, este vârful drept $M\left(-\dfrac{7}{2}, \dfrac{9}{2}\right)$. $\boxed{\text{D}}$ **Fals.** Centrul cercului circumscris triunghiului dreptunghic ABC este mijlocul $M\left(\dfrac{-7}{2}, \dfrac{9}{2}\right)$ al ipotenuzei sale, iar centrul cercului circumscris triunghiului dreptunghic MNP este mijlocul $U\left(\frac{-2+\left(\frac{-7}{2}\right)}{2}, \frac{3+\frac{5}{2}}{2}\right) = U\left(-\frac{11}{4}, \frac{11}{4}\right)$ al ipotenuzei sale. **Observaţie.** Pentru calculul coordonatelor centrului de greutate, al ortocentrului sau centrului cercului cricumscris unui triunghi există formule binecunoscute. În cazul problemei noastre alternativa aplicarii acestora ar însemna soluţii mai lungi mai ales pentru punctele C şi D. Totuşi, pentru B alternativa mai sus menţionată este rezonabilă: Coordonatele centrului de greutate al triunghiului ABC sunt $\left(\dfrac{-4+(-7)+0}{3}, \dfrac{1+4+5}{3}\right)$ adică $G_{\Delta ABC}\left(-\dfrac{11}{3}, \dfrac{10}{3}\right)$. Ţinând seama de faptul că $M\left(\dfrac{-7+0}{2}, \dfrac{4+5}{2}\right)$, $N\left(\dfrac{-4+0}{2}, \dfrac{1+5}{2}\right)$, $P\left(\dfrac{-4+(-7)}{2}, \dfrac{1+4}{2}\right)$ adică $M\left(-\dfrac{7}{2}, \dfrac{9}{2}\right)$, $N(-2,3)$, $P\left(-\dfrac{11}{2}, \dfrac{5}{2}\right)$, deducem că centrul de greutate al triunghiului MNP are coordonatele $\left(\dfrac{-\frac{7}{2}+(-2)+\left(-\frac{11}{2}\right)}{3}, \dfrac{\frac{9}{2}+3+\frac{5}{2}}{3}\right)$ adică $G_{\Delta MNP}\left(-\dfrac{11}{3}, \dfrac{10}{3}\right)$, fapt care arată că $G_{\Delta ABC} = G_{\Delta MNP}$.

529. Cum $|AB|^2 = 32$, $|BC|^2 = 13$, $|CA|^2 = 37$ și $|CA|^2 + |CB|^2 = 50 \neq 32 = |AB|^2$; $|AB|^2 + |AC|^2 = 69 \neq 13 = |BC|^2$; $|BA|^2 + |BC|^2 = 45 \neq 37 = |CA|^2$

$\boxed{\text{B}}$ **Fals.** Într-adevăr, aria triunghiului DEF nu este jumătate din produsul lungimilor a două dintre laturile sale, deoarece ΔDEF nu este dreptunghic, aşa cum rezultă din faptul că $\Delta DEF \sim \Delta ABC$ şi din faptul că ΔABC nu este dreptunghic, conform lui $\boxed{\text{A}}$.

$\boxed{\text{C}}$ **Adevărat.** Într-adevăr, fiecare dintre produsele $|EF|\cdot\text{dist}(A, BC)$, $|FD|\cdot\text{dist}(B, CA)$ şi $|DE|\cdot\text{dist}(C, AB)$ este egal cu aria triunghiului ABC. De exemplu, ţinând seama de faptul că DE este linie mijlocie în ΔABC, avem $|DE| = \dfrac{1}{2}|AB|$, şi deci $|DE|\cdot\text{dist}(C, AB) = \dfrac{1}{2}|AB|\cdot\text{dist}(C, AB) = \mathcal{A}_{\Delta ABC}$. Pentru a arăta că valoarea comună a celor trei produse este 10, observăm că $\text{dist}(A, BC) = \dfrac{|3(-2)+2(-1)-12|}{\sqrt{3^2+2^2}} = \dfrac{20}{\sqrt{13}}$, deoarece $A(-2, -1)$ şi

(BC) au ecuaţia $3x+2y-12=0$. De asemenea, $|EF|\cdot\text{dist}(A,BC)=\frac{1}{2}|BC|\cdot\text{dist}(A,BC)=\frac{1}{2}\sqrt{13}\cdot\frac{20}{\sqrt{13}}=10$.

$\boxed{\text{D}}$ **Adevărat.** Cele 4 triunghiuri au arii egale deoarece ele sunt congruente. Deoarece suma ariilor lor este tocmai $\mathcal{A}_{\Delta ABC}=10$, deducem că valoarea lor comună este, întradevăr, $\frac{10}{4}=\frac{5}{2}$.

Observaţie. Punctul $\boxed{\text{C}}$ poate fi complet rezolvat şi prin calcul numeric. Ecuaţiile dreptelor suport ale laturilor triunghiului ABC: (AB) cu ecuaţia $x-y+1=0$, (BC) cu ecuaţia $3x+2y-12=0$, (CA) cu ecuaţia $x-6y-4=0$. Cum $A(-2,-1), B(2,3), C(4,0)$. $\text{dist}(A,BC)=\frac{|3(-2)+2(-1)-12|}{\sqrt{3^2+2^2}}=\frac{20}{\sqrt{13}}$. $\text{dist}(B,CA)=\frac{|2-6\cdot 3-4|}{\sqrt{1^2+(-6)^2}}=\frac{20}{\sqrt{37}}$. $\text{dist}(C,AB)=\frac{|4-0+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{5}{\sqrt{2}}$. Aşadar, $|EF|\cdot\text{dist}(A,BC)=\frac{1}{2}|BC|\cdot\text{dist}(A,BC)=\frac{1}{2}\sqrt{13}\cdot\frac{20}{\sqrt{13}}=10$. $|FD|\cdot\text{dist}(B,CA)=\frac{1}{2}|AC|\cdot\text{dist}(B,CA)=\frac{1}{2}\sqrt{37}\cdot\frac{20}{\sqrt{37}}=10$. $|DE|\cdot\text{dist}(C,AB)=\frac{1}{2}|AB|\cdot\text{dist}(C,AB)=\frac{1}{2}\sqrt{32}\cdot\frac{5}{\sqrt{2}}=\frac{4\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{5}{\sqrt{2}}=10$.

530. Fie C un cerc din $\mathcal{C}$ cu centrul $M(x_M,y_M)$. Deoarece d este mediatoarea segmentului $[AB]$, raza lui C este $r=d(A,M)=d(B,M)$, deci, avem $r=d(A,M)=\sqrt{5(y_M^2-6y_M+10)}$. Aceasta este o funcţie convexă, iar minimul ei se obţine pentru $y_M=3$. Deci, cea mai mică rază a unui cerc din $\mathcal{C}$ este $\sqrt{5}$. Prin urmare $\boxed{\text{A}}$ este falsă iar $\boxed{\text{B}}$ este adevărată. Dacă cercul C intersectează fiecare axă de coordonate în exact un punct, atunci centrul lui, M, este la distanţe egale faţă de cele două axe, adică $M=M(r,r)$. Dar M este pe dreapta d, deci $r-2r=2$, o contradicţie cu $r>0$, deci $\boxed{\text{C}}$ este falsă. Triunghiul ABD este isoscel şi dreptunghic, deci centrul cercului circumscris este mijlocul ipotenuzei, adică $(6,2)\in d$, deci $\boxed{\text{D}}$ este adevărată.

531. Ecuația perpendicularei este $\frac{x}{3}=\frac{y}{6}\iff y=2x$, așadar, panta dreptei d este $m=-\frac{1}{2}$. Cum $P\in d$, putem scrie ecuația dreptei d astfel: $y-y_P=m(x-x_P)\iff y-6=-\frac{1}{2}(x-3)\iff y=-\frac{1}{2}x+\frac{15}{2}\iff x+2y-15=0$.

532. $12x^2-12y^2-10xy-x+34y-20=0\iff 12x^2-18xy+15x+8xy-12y^2+$

$10y - 16x + 24y - 20 = 0 \iff 3x(4x - 6y + 5) + 2y(4x - 6y + 5) - 4(4x - 6y + 5) = 0 \iff$ $(3x + 2y - 4)(4x - 6y + 5) = 0$. Fie un punct $M(x_0, y_0)$ a cărui coordonate satisfac ecuația din enunț. Atunci avem că $3x_0 + 2y_0 - 4 = 0$ sau $4x_0 - 6y_0 + 5 = 0$, deci punctul M aparține dreptei $d_1 : 3x + 2y - 4 = 0$ sau dreptei $d_2 : 4x - 6y + 5 = 0$. Așadar, mulțimea soluțiilor este reuniunea acestor două drepte. Se observă că $m_1 = -\frac{3}{2}$ și $m_2 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$, deci $m_1 m_2 = -1$, așadar dreptele sunt perpendiculare.

533. Condiţia de concurenţă este echivalentă cu condiţia ca sistemul format de cele trei ecuaţii cu două necunoscute să fie compatibil, adică:$\Delta \equiv \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = 0$. Dacă adăugăm coloanele 2 şi 3 la prima coloană şi dăm factor comun, ecuaţia de mai sus se poate scrie $(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & c & a \\ 1 & a & b \end{vmatrix} = 0$ sau $(a+b+c)(ab+bc+ca-a^2-b^2-c^2) = 0$. Astfel, determinantul se anulează dacă unul dintre factori se anulează, ceea ce înseamnă că primele două afirmații sunt adevărate. Pe de altă parte, se poate verifica imediat, prin calcul direct, că determinantul este egal cu $\Delta = 3abc - a^3 - b^3 - c^3$, deci şi cea de-a treia implicaţie este adevărată. Ultima condiţie este în contradicţie cu condiţia $\boxed{\text{C}}$, deci este falsă.

534. Problema concurenței celor trei drepte este echivalentă cu existența și unicitatea soluției sistemului liniar format din ecuațiile celor 3 drepte. Fie $\hat{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ -1 & -4 & -5 \\ 7 & -6 & -\alpha \end{pmatrix}$ matricea extinsă a sistemului. Din teorema lui Kronecker-Capelli, acest lucru este echivalent cu rang$(\hat{A}) = 2$. Cum există un minor de ordinul 2 nenul a lui A, condiția este echivalentă cu $\det \hat{A} = 0$. $\det \hat{A} = 2 \cdot (-4) \cdot (-\alpha) + 7 \cdot (-3) \cdot (-5) + (-1) \cdot (-1) \cdot (-6) - (-1) \cdot (-4) \cdot 7 - 2 \cdot (-5) \cdot (-6) - (-\alpha) \cdot (-1) \cdot (-3) = 8\alpha + 105 - 6 - 28 - 60 + 3\alpha = 11\alpha + 11 \Rightarrow \det \hat{A} = 0 \iff \alpha = -1$.

535. $S = s \cdot r = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{4R}$, unde $s = \frac{3+4+5}{2} = 6$ este semiperimetrul și $S = \sqrt{s(s-3)(s-4)(s-5)} = 6$ este aria triunghiului. Deci $r = 1$ și $R = \frac{5}{2}$.

536. Fie ABC triunghiul cu lungimile laturilor $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$ (numere pitagorice, deci triunghiul e dreptunghic) și $MNPQ$ pătratul cu latura x. Aria triunghiului este $S = 6$. Dacă $M, N \in [BC]$, $P \in [AC]$ și $Q \in [AB]$, considerăm înălțimea h_x din A pe QP, înălțimea h_a din A pe BC și obținem ecuația $h_a = h_x + x$. Din asemănarea triunghiurilor AQP și ABC, avem $\frac{h_x}{h_a} = \frac{x}{a}$, deci $h_a = h_a \cdot \frac{x}{a} + x \,\big|\cdot a \implies 2S = 2S \cdot \frac{x}{a} + xa$ $\implies x = \frac{2aS}{2S + a^2} = \frac{12a}{12 + a^2}$. $a = 3 \implies x = \frac{12 \cdot 3}{12 + 3^2} = \frac{12}{7}$. Similar, $b = 4 \implies x = \frac{12 \cdot 4}{12 + 4^2} = \frac{12}{7}$ și $c = 5 \implies x = \frac{12 \cdot 5}{12 + 5^2} = \frac{60}{37}$.

537. Teorema sinusurilor $\implies \frac{\sqrt{3}}{\sin A} = \frac{b}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{c}{\sin C} = 2 \implies \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}, m(\widehat{A}) = 60^\circ (m(\widehat{A}) \neq 120^\circ$, $\triangle ABC$ fiind nedegenerat, $m(\widehat{C}) = 60^\circ, b = c = \sqrt{3}$. Perimetrul este $p = 3\sqrt{3}$. $\mathcal{A}_{\triangle ABC} = \frac{3\sqrt{3}}{4} = \frac{p \cdot r}{2} \implies r = \frac{1}{2}$ (lungimea razei cercului înscris).

538. Din faptul că $CA^2 = AB^2 + BC^2$ deducem folosind reciproca teoremei lui Pitagora că triunghiul ABC este dreptunghic în B, deci $\boxed{\text{A}}$ este falsă. Triunghiul ABC fiind dreptunghic, lungimea înălţimii din A este: $h_A = \frac{AB \cdot BC}{CA} = \frac{48}{10} = \frac{24}{5} \neq 4$ deci $\boxed{\text{B}}$ este falsă. Avem $S_{BIC} = r \cdot BC \cdot \frac{1}{2}$. Avem $S_{ABC} = (AB \cdot BC) \cdot \frac{1}{2} = 24$ şi $p_{ABC} = \frac{1}{2}(AB{+}BC{+}CA) = 12$, deci $r = S \cdot \frac{1}{p} = 2$. Astfel avem că: $S_{BIC} = \frac{1}{2} \cdot r \cdot BC = 6.$, deci $\boxed{\text{C}}$ este adevărată. Observăm că triunghiurile AIB şi AIC au aceeaşi înălţime din I, astfel că: $\frac{S_{AIB}}{S_{AIC}} = \frac{AB}{AC} = \frac{4}{5}$. Aşadar $\boxed{\text{D}}$ este falsă.

539. Folosind egalitatea $\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\gamma)}{c}$, obţinem că $\frac{a}{c} \cdot \sin(2\gamma) = \frac{a}{c} \cdot 2\sin(\gamma)\cos(\gamma) = 2a \cdot \frac{\sin(\gamma)}{c} \cdot \cos(\gamma) = 2a \cdot \frac{\sin(\alpha)}{a} \cdot \cos(\gamma) = 2\sin(\alpha)\cos(\gamma)$, $\frac{c}{a} \cdot \sin(2\alpha) = \frac{c}{a} \cdot 2\sin(\alpha)\cos(\alpha) = 2c \cdot \frac{\sin(\alpha)}{a} \cdot \cos(\alpha) = 2c \cdot \frac{\sin(\gamma)}{c} \cdot \cos(\alpha) = 2\sin(\gamma)\cos(\alpha)$, de unde rezultă că: $\frac{a}{c} \cdot \sin(2\gamma) + \frac{c}{a} \cdot \sin(2\alpha) = 2 \cdot (\sin(\alpha)\cos(\gamma) + \sin(\gamma)\cos(\alpha)) = 2 \cdot \sin(\alpha + \gamma) = 2 \cdot \sin(\alpha + (\alpha + 2r)) = 2 \cdot \sin(2 \cdot (\alpha + r)) \underset{3(\alpha+r)=\pi}{\overset{\alpha+(\alpha+r)+(\alpha+2r)=\pi}{=}} 2 \cdot \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{3}\right) = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.

540. $\sin x + \cos x = \sin x + \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$. Deci, $\sin N + \cos N = \sin P + \cos P \iff \sqrt{2}\cos\left(N - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\left(P - \frac{\pi}{4}\right) \iff \cos\left(N - \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(P - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \iff -2\sin\frac{N-P}{2} \cdot \sin\left(\frac{N+P}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \iff \sin\frac{N-P}{2}\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \iff N = P$. Rezultă că $\hat{N} = \hat{P}$ și cum $\hat{M} = \frac{\pi}{3}$, triunghiul este echilateral.

541. $x_P^2 + y_P^2 = 1 \Rightarrow P \in$ cercului trigonometric. Cum $m_d = 3$, avem $m_{PP'} = -\frac{1}{3}$, deci

$PP' : y = -\frac{x}{3} + \frac{1}{15} + \frac{2\sqrt{6}}{5}$. Fie $M = PP' \cap d$. Avem $x_M = \frac{-7+3\sqrt{6}}{25}$ și $y_M = \frac{3+3\sqrt{6}}{10}$, de unde rezultă $x_{P'} = \frac{-7+3\sqrt{6}}{30} < 2$.

542. Punctul M fiind pe cercul trigonometric cu coordonatele $x = \frac{1}{2}$ şi $y = \frac{\sqrt{3}}{1}$, rezultă că măsura unghiului dintre axa Ox şi dreapta OM este $60°$. Astfel, după rotire unghiul dintre axa Ox şi dreapta OM' este $-30°$. Deci $x' = \cos(-30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, iar $y' = \sin(-30°) = -\frac{1}{2}$. Obţinem că $x' \cdot y' = -\frac{\sqrt{3}}{4}$.

543. A, B, C sunt în progresie aritmetică, așadar $2m(\hat{B}) = m(\hat{A}) + m(\hat{C})$ și știm că $m(\hat{A})+m(\hat{B})+m(\hat{C}) = \pi$, de unde rezultă că: $m(\hat{B}) = \frac{\pi}{3}$și $m(\hat{A})+m(\hat{C}) = \frac{2\pi}{3}$. Folosind teorema sinusului obținem: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{a+b+c}{\sin A+\sin B+\sin C} = 4 \Rightarrow a = 4\sin A,\quad b = 4\sin B = 2\sqrt{3},\quad c = 4\sin C \Rightarrow a+c = 3\sqrt{2}+\sqrt{6} = 4(\sin A+\sin C) \Rightarrow 8\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2} = 3\sqrt{2}+\sqrt{6}$. Dar $\sin\frac{A+C}{2} = \sin B = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cos\frac{A-C}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \cos(A-C) = 2\cos^2\frac{A-C}{2} - 1 = \frac{\sqrt{3}}{2}. \Rightarrow m(\hat{A}) - m(\hat{C}) = \frac{\pi}{6}$. Din $m(\hat{A}) + m(\hat{C}) = \frac{2\pi}{3}$ rezultă că: $m(\hat{C}) = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \cos C = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

544. În orice triunghi ABC are loc relația $\operatorname{tg} A+\operatorname{tg} B+\operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A\cdot\operatorname{tg} B\cdot\operatorname{tg} C$. Așadar, $5+\operatorname{tg} C = 6\operatorname{tg} C \Rightarrow \operatorname{tg} C = 1 \Rightarrow \sin C = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

545. Vom rescrie produsul $\sin A\sin B$ sub forma $4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$ folosind formula pentru $\sin 2\alpha$. Acum vom aplica următoarele relații ce leagă funcțiile trigonometrice ale jumătăților unghiurilor de semiperimetrul $p = \frac{a+b+c}{2}$ al triunghiului: $\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$ $\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$. Formulele pentru B și C se obțin prin permutări circulare. Așadar, rescriind egalitatea folosind formulele date, obținem: $4\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}\cdot\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}\cdot\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}\cdot\sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}} = \frac{p(p-c)}{ab} \Rightarrow \frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{abc^2} = \frac{p(p-c)}{ab} \Rightarrow \frac{4(p-a)(p-b)}{c^2} = 1 \Rightarrow 4\cdot\frac{-a+b+c}{2}\cdot\frac{a-b+c}{2} = c^2 \Rightarrow -a^2+ab-ac+ba-b^2+bc+ca-cb+c^2 = c^2 \Rightarrow a^2-2ab+b^2 = 0 \Rightarrow a = b$.

546. Fie $\triangle ABC$ un triunghi oarecare. Folosind formula $\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$ și permutările ei circulare obținem că: $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}\cdot\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}\cdot\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}} = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc} = \frac{S^2}{p\cdot abc}$, unde cu S am notat aria triunghiului ABC. Folosind acum expresiile pentru raza cercului înscris, respectiv raza cercului circumscris triunghiului: $r = \dfrac{S}{p}$ $R = \dfrac{abc}{4S} \Rightarrow \dfrac{1}{R} = \dfrac{4S}{abc}$, obținem: $\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2} = \dfrac{1}{4}\cdot r\cdot\dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{r}{R}$. Relația de mai sus este adevărată pentru orice triunghi, deci: $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \sin\dfrac{A_n}{2}\sin\dfrac{B_n}{2}\sin\dfrac{C_n}{2} = \dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{r_n}{R_n} = \dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{2^n} = \dfrac{1}{2^{n+2}} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sin\dfrac{A_n}{2}\sin\dfrac{B_n}{2}\sin\dfrac{C_n}{2} = 0$ și $\lim_{n\to\infty} 2^n\sin\dfrac{A_n}{2}\sin\dfrac{B_n}{2}\sin\dfrac{C_n}{2} = \dfrac{1}{4} \in \mathbb{Q}$.

547. Din teorema cosinusului: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \Rightarrow a^2 + b^2 = xc^2 = x(a^2 + b^2) - 2xab\cos C \Rightarrow (a^2 + b^2)(1 - x) = -2xab\cos C < 2xab < x(a^2 + b^2) \Rightarrow 1 - x < x \Rightarrow x \in \left(\dfrac{1}{2}, \infty\right)$.

548. $\dfrac{\sin A + \sin C}{\sin B} = \dfrac{2\sin\dfrac{A+C}{2}\cos\dfrac{A-C}{2}}{2\sin\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{B}{2}}$. Cum $A + B + C = \pi$, rezultă că $\dfrac{A+C}{2} = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{B}{2}$ și deci $\sin\dfrac{A+C}{2} = \cos\dfrac{B}{2}$. Simplificând în egalitate obținem: $\operatorname{ctg}\dfrac{B}{2} = \dfrac{\sin A + \sin C}{\sin B} = \dfrac{\cos\dfrac{A-C}{2}}{\sin\dfrac{B}{2}} \Rightarrow \cos\dfrac{A-C}{2} = \operatorname{ctg}\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{B}{2} = \cos\dfrac{B}{2} \Rightarrow \dfrac{A-C}{2} = \pm\dfrac{B}{2} \Rightarrow A \mp B - C = 0$ Așadar, avem că $A = B + C = \dfrac{\pi}{2}$ sau că $C = A + B = \dfrac{\pi}{2}$.

549. Din teorema sinusurilor avem că: $a = 2R\sin A, b = 2R\sin B, c = 2R\sin C$. Relația din enunț se poate rescrie astfel: $2R\sin A\cos B + 2R\sin B\cos C + 2R\sin C\cos A = R\sin A + R\sin B + R\sin C$. Simplificăm cu R și ne folosim de identitatea evidentă $2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)$ pentru a obține: $\sin(A+B) + \sin(A-B) + \sin(B+C) + \sin(B-C) + \sin(C+A) + \sin(C-A) = \sin A + \sin B + \sin C$ Cum $A + B + C = \pi$, iar $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$, observăm că $\sin(A+B) = \sin C$, $\sin(B+C) = \sin A$, $\sin(C+A) = \sin B$. Așadar egalitatea noastră devine: $\sin(A-B) + \sin(B-C) + \sin(C-A) = 0(1)$. Vom demonstra acum că această sumă este egală cu 0 doar în cazul triunghiurilor isoscele. $\sin(A-B) + \sin(B-C) = 2\sin\dfrac{A-C}{2}\cos\dfrac{A+C-2B}{2}$. Ne mai folosim de faptul că: $\sin(C-A) = 2\sin\dfrac{C-A}{2}\cos\dfrac{C-A}{2}$. Folosind aceste relații, (1) devine: $2\sin\dfrac{A-C}{2}(\cos\dfrac{A+C-2B}{2} - \cos\dfrac{C-A}{2}) = 0$, $-4\cdot\sin\dfrac{A-C}{2}\sin\dfrac{C-B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2} = 0$, $\sin\dfrac{A-B}{2}\sin\dfrac{B-C}{2}\sin\dfrac{C-A}{2} = 0$. Deci, pentru ca identitatea din enunț să aibă loc trebuie ca cel puțin unul din termenii produsului din membrul stâng sa fie nul, lucru echivalent cu $A - B = 0$ sau $B - C = 0$ sau $C - A = 0$. Așadar, triunghiul ABC trebuie să fie isoscel.

550. $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R \implies \begin{cases} \sin A = \dfrac{a}{2R} \\ \sin B = \dfrac{b}{2R} \\ \sin C = \dfrac{c}{2R} \end{cases}$. Aşadar, $\sin^2 A + \sin^2 B = \sin^2 C \iff \dfrac{a^2}{4R^2} + \dfrac{b^2}{4R^2} = \dfrac{c^2}{4R^2} \iff a^2 + b^2 = c^2 \iff$ triunghiul este dreptunghic.

551. Din geometria vectorială sau folosind succesiv faptul că linia mijlocie este paralelă cu a treia latură și are lungimea jumătate din lungimea acesteia, obținem că punctul Q este centrul de greutate și al triunghiului ABC. De aici, B, Q, M sunt coliniare, deci și B, K, Q sunt coliniare, $\boxed{\text{A}}$ e adevărată. $\mathcal{A}[APN] = \dfrac{\frac{h_A}{2} \cdot PN}{2} = \dfrac{\frac{h_A}{2} \cdot \frac{BC}{2}}{2} = \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{h_A \cdot BC}{2} = \mathcal{A}[ABC] \cdot \dfrac{1}{4}$. Analog, $\mathcal{A}[BPM] = \mathcal{A}[ABC] \cdot \dfrac{1}{4} \Rightarrow \mathcal{A}[PNCM] = \mathcal{A}[ABC] - \mathcal{A}[BPM] - \mathcal{A}[APN] = \dfrac{1}{2}\mathcal{A}[ABC] \implies \boxed{\text{B}}$ adevărată. $\mathcal{A}[PMN] = \mathcal{A}[PMCN] - \mathcal{A}[MNC] = \dfrac{1}{4}\mathcal{A}[ABC]$, $\boxed{\text{C}}$ e falsă. Cum $KQ = \dfrac{1}{3}KN$ și K - mijlocul lui $BN \Rightarrow KQ = \dfrac{1}{6}BN$, $\boxed{\text{D}}$ e falsă.

552. Fie E și F picioarele înălțimilor din B, respectiv C. Atunci: $CE \perp BH \Rightarrow CE = h_C$; $BF \perp HC \Rightarrow BF = h_B; AD \perp BC \Rightarrow HA = h_D$. Cum $CE \cap BF \cap HD = \{A\} \implies A =$ortocentrul triunghiului BHC, $\boxed{\text{C}}$ adevărată. În triunghiului BDA, dreptunghic în $\hat{D}$, ortocentrul este punctul D; iar dacă $D = C$, atunci triunghiul ABC e dreptunghic în $\hat{C}$, deci $H = C$, astfel că A, B, H nu pot fi coliniare.

553. Se poate arăta că patrulaterul $A_9A_8A_{12}A_{11}$ este un trapez isoscel și calculăm pe rând baza mare B, baza mică b și înălțimea h a acestuia. Pornim cu observația că arcul mic format de oricare două puncte vecine are măsura $\dfrac{360°}{12} = 30°$. Pentru B($=A_8A_{12}$): în triunghiul ΔA_8OA_{12} - isoscel cu $OA_8 = OA_{12} = R$, avem $m(A_8A_{12}) = 4 \cdot 30° = 120°$. Ducând perpendiculara din vârful O pe segmentul A_8A_{12}, obținem triunghiuri dreptunghice de $30° - 60° - 90° \implies B = 2 \cdot \dfrac{R\sqrt{3}}{2} = R\sqrt{3}$. Pentru b($=A_9A_{11}$): Cum $\measuredangle A_9OA_{11} = 60°$, rezultă ΔABC este echilateral $\implies$ b = R. Pentru h: fie D, E $\in A_8A_{11}$ a.i. $A_{11}D \perp A_8A_{12}$ și $A_9E \perp A_8A_{12}$. Notăm x = $A_{12}D$ și avem ca $x + R + x = R\sqrt{3} \Rightarrow x = \dfrac{R(\sqrt{3}-1)}{2}$. Cum $\measuredangle A_{11}A_{12}A_8$, unghi pe cerc, are măsură $\dfrac{m(A_8A_{11})}{2} = \dfrac{3 \cdot 30°}{2} = 45°$, avem că triunghiul $\Delta A_{11}DA_{12}$ este isoscel și dreptunghic $\Longrightarrow h = x = \dfrac{R(\sqrt{3}-1)}{2}$. Atunci $\mathcal{A}[A_9A_8A_{12}A_{11}] = \dfrac{(B+b)\cdot h}{2} = \dfrac{(R+R\sqrt{3})\cdot R\cdot\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}}{2} = \dfrac{R^2(1+\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)}{4} = \dfrac{R^2}{2}$. Cum A_1 și A_7 sunt diametral opuse, triunghiul $\Delta A_1A_6A_7$ este dreptunghic, deci distanța căutată este lungimea segmentului A_1A_6. Avem că $A_1A_7 = 2R$ și $m(\measuredangle A_7A_1A_6) = \dfrac{m(A_6A_7)}{2} = 15°$. $\Rightarrow A_1A_6 = A_1A_7\cdot\cos 15° = 2R\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = R\cdot\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$.

554. Fie S aria lui ABC. Avem că $S = \dfrac{bc\sin A}{2}$. Notăm $k = bc \Rightarrow S = \dfrac{k\sin A}{2} \leq \dfrac{k\cdot 1}{2} = \dfrac{k}{2}$. Așadar, $S_{max} = \dfrac{bc}{2}$ și se obține pentru $\sin A = 1 \iff m(\hat{A}) = \dfrac{\pi}{2}$, adică atunci când ABC este dreptunghic în A.

555. Fie S aria lui ABC. Avem $S = \dfrac{AB\cdot AC}{2} = \dfrac{BC\sin C\cdot BC\cos C}{2} = \dfrac{BC^2}{2}\sin C\cos C$ $= \dfrac{BC^2}{2}\operatorname{tg} x\cos^2 x = \dfrac{BC^2}{2}\operatorname{tg} x\cdot\dfrac{1}{\operatorname{tg}^2 x+1} = 18\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\dfrac{1}{4}+1} = \dfrac{9\cdot 4}{5} = \dfrac{36}{5}$.

556. Fie E şi D picioarele înălțimilor duse din vârfurile B respectiv A pe laturile opuse.

Se observă, că patrulaterul $DHEC$ este inscriptibil, de unde se obține că unghiul $AHB = DHE$ este suplementar unghiului C, care este la rândul lui suplementar unghiului $A+B$. Aplicăm teorema sinusurilor în triunghiul AHB. Avem că $\dfrac{AH}{\sin(\frac{\pi}{2}-A)} = \dfrac{AB}{\sin(A+B)}$. Așadar, avem că $\dfrac{AH}{\cos A} = \dfrac{AB}{\sin(\pi-C)} = \dfrac{AB}{\sin C} = 2R$, unde pentru ultima egalitate am folosit teorema sinusurilor în triunghiul $ABC \Rightarrow AH = 2R\cos A = \dfrac{BC}{\sin A}\cos A = BC\operatorname{ctg} A$. Cum $\cos A = \dfrac{4}{5} \Rightarrow \sin A = \dfrac{3}{5} \Rightarrow \operatorname{ctg} A = \dfrac{4}{3}$. Deci, avem că $AH = 6\cdot\dfrac{4}{3} = 8$.

557. $m(\hat{C}) = \pi - (m(\hat{A}) + m(\hat{B})) = \dfrac{\pi}{3}$. Fie S aria triunghiului. Avem că $S = \dfrac{ab\sin C}{2}$.

Raza cercului în care este înscris triunghiul este egală cu raza cercului circumscris. Aplicăm acum teorema sinusurilor: $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R \Rightarrow a = 2R\sin A, b = 2R\sin B$. Prin urmare, $s = \dfrac{1}{2}4R^2\sin A\sin B\sin C$. Mai rămâne așadar să calculăm $\sin A$: $\sin A = \sin\dfrac{5\pi}{12} = \sin(\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{4}) = \sin\dfrac{\pi}{6}\cos\dfrac{\pi}{4} + \sin\dfrac{\pi}{4}\cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$. Așadar, $S = \dfrac{1}{2}\cdot 16\cdot\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{6+2\sqrt{3}}{2} = 3+\sqrt{3}$.

558. Folosind relația $\cos(2t) = 1-2\sin^2 t$ scriem ecuația în formă $1-2\sin^2 t = \sin t \quad\Leftrightarrow$

$2\sin^2 t+\sin t-1 = 0$. Cu substituția $x = \sin t$ găsim ecuația pătratică $2x^2+x-1 = 0$, care

are soluțiile $x_1 = \dfrac{1}{2}$ și $x_2 = -1$, de aceea $2\sin^2 t + \sin t - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin t = \dfrac{1}{2}$ sau $\sin t = -1$. În intervalul $[0, 2\pi]$ ecuația $\sin t = \dfrac{1}{2}$ are două soluții ($t_1 = \dfrac{\pi}{6}$ și $t_2 = \dfrac{5\pi}{6}$), iar ecuația $\sin t = -1$ o singură soluție ($t_3 = \dfrac{3\pi}{2}$). Deci în intervalul $[0, 2\pi]$ ecuația $\cos 2t = \sin t$ are trei soluții.

559. Înlocuim $\sin^2 x$ cu $1 - \cos^2 x$ => $f(x) = 2\cos^4 x - 11\cos^2 x + 5$. Notăm $\cos^2 x = t, t \in [0, 1]$, și găsim valoarea minimă pentru funcția de gradul al II-lea $f(t) = 2t^2 - 11t + 5$. Valoarea minimă este $-\dfrac{\Delta}{4a} = -\dfrac{81}{8}$.

560. Ecuația se rescrie ca $\dfrac{1}{2e}\Big[\log_{\sin x}\cos x + \log_{\cos x}\sin x\Big] = \dfrac{5}{4e}$. Cu notația $t = \log_{\sin x}\cos x \Rightarrow t + \dfrac{1}{t} = \dfrac{5}{2}$, de unde obținem soluțiile $t \in \{\dfrac{1}{2}, 2\} \quad \Rightarrow \sin^1 x = \cos^2 x$ și $\sin^2 x = \cos^1 x$.

561. Pentru $x \in (\dfrac{\pi}{2}, \pi)$, avem $\sin x > 0$, şi $\cos x < 0$, deci $\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x < 0$ şi $\sin x \geq \cos x$, deci $\boxed{\text{A}}$, $\boxed{\text{B}}$ sunt false. $\sin 2x - 2\sin x \leq 0 \Leftrightarrow 2\sin x(\cos x - 1) \leq 0$, ceea ce este adevărată, pentru că în intervalul dat $\sin x > 0$, iar $\cos x < 0 < 1$. Deci $\boxed{\text{C}}$ este adevărată, iar $\boxed{\text{D}}$ este falsă.

562. $\operatorname{tg} x - \sin x = \dfrac{\sin x}{\cos x} - \sin x = \sin x \cdot \left(\dfrac{1}{\cos x} - 1\right) = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0$ sau $\cos x = 1$, adică în intervalul dat avem soluţiile: $x \in \{0, \pi, 2\pi\}$ sau $x = 0$. Deci, în total avem trei soluții: $x \in \{0, \pi 2\pi\}$.

563. Dacă $\sin A + \sin^2 A = \dfrac{3}{2} \Rightarrow \sin A = \dfrac{1}{2} + 1 - \sin^2 A \Rightarrow \sin A = \dfrac{1}{2} + \cos^2 A$. Ridicând la pătrat, avem egalitatea $\sin^2 A = \cos^4 A + \cos^2 A + \dfrac{1}{4} \Rightarrow 1 - \cos^2 A = \cos^4 A + \cos^2 A + \dfrac{1}{4} \Rightarrow \cos^4 A + 2\cos^2 A - \dfrac{3}{4} = 0$. Ridicăm expresia la puterea a doua, de unde obţinem $\cos^8 A + 4\cos^6 A + \dfrac{5}{2}\cos^4 A - 3\cos^2 A + \dfrac{9}{16} = 0$. Putem observa că numerele a, b, c, d, e pot fi următoarele: $a = 1$, $b = 4$, $c = \dfrac{5}{2}$, $d = -3$, $e = \dfrac{9}{16}$.

564. Expresia dată este echivalentă cu $6\sin x\cos y - 6\sin y\cos x = 0$, adică $\sin(x - y) = 0$. Cum $x, y \in (0, \dfrac{\pi}{2})$, rezultă că $x - y = 0$.

565. Grupând termenii, avem $\sin x + \sin 5x = 2\sin 3x\cos 2x$ și $\sin 3x + \sin 7x = 2\sin 5x\cos 2x$, deci ecuația devine $2\cos 2x(\sin 3x + \sin 5x) = 0$, adică $4\cos 2x\sin 4x\cos x = 0$. Cum $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, avem cele 3 soluții $0, \dfrac{\pi}{2}$ și $\dfrac{\pi}{4}$.

566. Grupând termenii din membrul drept obținem $-\sin 4x - \sin 2x = -2\sin 3x\cos x$.

Atunci avem ecuația echivalentă $(\cos x+\sin 3x)^2=0$, adică $\sin 3x=-\cos x=\sin(x-\frac{\pi}{2})$ cu soluțiile $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$ și $x=\frac{3\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$. Astfel $-\frac{\pi}{4}$ este o soluție a ecuație, $\boxed{\text{A}}$ este adevărată, iar soluția $\frac{3\pi}{8}\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$, deci $\boxed{\text{B}}$ e falsă. Observăm că pentru a doua mulțime de soluții $\cos 8x=\cos(3\pi+4k\pi)=\cos 3\pi=\cos\pi=-1$, așa că nu toate soluțiile verifică afirmația $\boxed{\text{C}}$. Soluțiile din intervalul $[0,2\pi]$ sunt $\frac{3\pi}{8},\frac{3\pi}{4},\frac{7\pi}{8},\frac{11\pi}{8},\frac{7\pi}{4}$ și $\frac{15\pi}{8}$, $\boxed{\text{D}}$ e adevărată.

567. Cum $\sin x$ și $\cos x\in[-1,1]\implies\cos^7 x\le\cos^2 x$ și $\sin^{14}x\le\sin^2 x$, iar prin însumarea celor două inegalități obținem că $\sin^7 x+\cos^{14}x\le 1$. Cerința ne oferă egalitatea, deci au loc egalități în ambele inegalități de mai sus. Obținem astfel sistemul $\begin{cases}\sin^2 x=\sin^7 x\\ \cos^2 x=\cos^{14}x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin^2 x\cdot(\sin^5 x-1)=0\\ \cos^2 x\cdot(\cos^{12}x-1)=0\end{cases}$. Dacă $\sin^2 x=0$, atunci $x\in\{k\pi|k\in\mathbb{Z}\}$ și $\cos^2 x=1\Rightarrow\cos x\in\{\pm1\}$. Dacă $\sin^5 x=1\implies\sin x=1$ și $\cos x=0$, deci ambele soluții verifică întregul sistem și $\sin x+\cos x\in\{-1,1\}$.

568. Pentru început, identificam în ce cadrane se află x și $5x$: $x\in(\frac{83\pi}{10},\frac{42\pi}{5})=(8\pi+\frac{3\pi}{10},8\pi+\frac{2\pi}{5})$. $5x\in(\frac{83\pi}{2},\frac{42\pi}{5})=(41\pi+\frac{\pi}{2},42\pi)=(40\pi+\frac{3\pi}{2},40\pi+2\pi)$, dar din periodicitate, obținem ca x e în primul cadran, iar $5x$ în ultimul. De aici, $\sin x,\cos x>0$, deci $\boxed{\text{C}}$ e falsă. $\cos 5x=\sqrt{1-\sin^2 5x}=\frac{8}{17}\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$, $\boxed{\text{A}}$ e adevărată și $\boxed{\text{B}}$ e falsă. $\cos 10x=2\cos^2 5x-1=2\cdot\frac{64}{289}-1=-\frac{161}{289}$, $\boxed{\text{D}}$ adevărată.

569. Notăm cu $a=\sin x$ și $b=\cos x$. Cum $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\implies a,b>0$. $m=\sin 2x=2\sin x\cos x=2ab$. $\implies m>0$ şi $b=\frac{m}{2a}$. Din formula fundamentală a trigonometriei avem că $a^2+b^2=1\implies a^2+\frac{m^2}{4a^2}=1|\cdot a^2\implies a^4-a^2+\frac{m^2}{4}=0$. Privită ca o ecuație de gradul doi în variabila a^2, aceasta are discriminantul $\Delta=1-m^2$, și soluțiile $a^2_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1-m^2}}{2}$ sunt pozitive. Dacă $a=\sqrt{\frac{1+\sqrt{1-m^2}}{2}}$, atunci $b=\frac{m}{2a}=\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{1-\sqrt{1-m^2}}}{2}$. Dar obținem astfel că $a>b$, ceea ce nu convine din ipoteză. Dacă $a=\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-m^2}}{2}}$, atunci $b=\frac{m}{2a}=\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{1+\sqrt{1-m^2}}}{2}$. În acest caz, observăm $a<b$ și ajungem la: $\operatorname{tg}x=\frac{a}{b}=\frac{\sqrt{1-\sqrt{1-m^2}}}{\sqrt{1+\sqrt{1-m^2}}}=\frac{1-\sqrt{1-m^2}}{m}$.

570. Ecuația este echivalentă cu $\cos 2x\cdot(4\cos 2x-7)=0$. Dacă $4\cos 2x-7=$

$0 \implies \cos 2x = \dfrac{7}{4} > 1$, deci nu există soluții în acest caz. Dacă $\cos 2x = 0 \implies x \in \left\{ \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2} \middle| k \in \mathbb{Z} \right\} = \left\{ \dfrac{(2k+1)\pi}{4} \middle| k \in \mathbb{Z} \right\}$, adică varianta $\boxed{\text{C}}$ e corectă. Acum verificăm celelalte grile: $\dfrac{x}{\pi} = \dfrac{2k+1}{4} \notin \mathbb{Z}, \forall k \in \mathbb{Z}$, deci $\boxed{\text{B}}$ e falsă. Cum $0 = \cos 2x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 \implies \sin^2 x = \cos^2 x = \dfrac{1}{2} \implies |\sin x| = |\cos x|$, $\boxed{\text{A}}$ adevărată. Din $|\sin x| = \dfrac{1}{\sqrt{2}} > \dfrac{1}{2}$, $\boxed{\text{D}}$ falsă.

571. Ecuația este echivalentă cu $(1+\sqrt{3})\sin x + (1-\sqrt{3})\cos x = 1+\sqrt{3}$. Vom folosi formulele pentru sin și cos în funcție de tangeta unghiului înjumătățit: $\sin x = \dfrac{2\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}$ și $\cos x = \dfrac{1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}$. Înlocuim acum formulele în ecuație și obținem: $(\sqrt{3}+1)\dfrac{2\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}} + (\sqrt{3}-1)\dfrac{1-\mathrm{tg}^2 x}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}} = 1+\sqrt{3}$. Cu notația $t = \mathrm{tg}\dfrac{x}{2}$ avem: $2(\sqrt{3}+1)t + \sqrt{3} - 1 - (\sqrt{3}-1)t^2 = 1+\sqrt{3}+(1+\sqrt{3})t^2$, de unde ajungem la $\sqrt{3}t^2 - (\sqrt{3}+1)t + 1 = 0$, pentru care $\Delta = (\sqrt{3}-1)^2$ și soluțiile sunt $t_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}, t_2 = 1$. Pentru $\mathrm{tg}\dfrac{x}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \implies x \in \{\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$, Pentru $\mathrm{tg}\dfrac{x}{2} = 1 \implies x \in \left\{\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\}$. $\implies \alpha \in \{\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi | k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi | k \in \mathbb{Z}\} \implies \sin\alpha \in \{\dfrac{\sqrt{3}}{2}, 1\}$.

572. Folosim formula pentru cosinusul unghiului dublu și obținem că: $\dfrac{1+\cos 2x}{2} + \dfrac{1+\cos 4x}{2} = \dfrac{1+\cos 6x}{2} + \dfrac{1+\cos 8x}{2}$, adică $\cos 4x + \cos 6x = \cos 2x + \cos 8x$. Din formula de transformare a sumei în produs, obținem că ecuația e echivalenta cu $2\cos x \cos 5x = 2\cos 3x \cos 5x \implies \cos 5x \cdot (\cos x - \cos 3x) = 0$. Dacă $\cos 5x = 0$, $x \in \left\{\pm\dfrac{\pi}{10} + \dfrac{2k\pi}{5} | k \in \mathbb{Z}\right\} = \left\{\dfrac{(4k\pm 1)\pi}{10} | k \in \mathbb{Z}\right\}$. Dacă $\cos x - \cos 3x = 0$, $2\sin x \sin 2x = 0$, $x \in \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$ sau $x \in \left\{\dfrac{k\pi}{2} | k \in \mathbb{Z}\right\}$.

573. Folosind formula pentru unghiul dublu avem că $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, și deci în membrul drept rămâne $\sin^2 x \cdot \mathrm{ctg} x = \sin^2 x \cdot \dfrac{\cos x}{\sin x} = \sin x \cos x$. Atunci ecuația devine $\sin x \cos x = 5\sin x - 2\dfrac{\sin x}{\cos x} \mid \cdot \cos x \implies \sin x \cdot (\cos^2 x - 5\cos x + 2) = 0$. Dacă $\sin x = 0 \implies x \in \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$. Dacă $\cos^2 x - 5\cos x + 2 = 0 \implies (\cos x - 2)(\cos x - \dfrac{1}{2}) = 0$. Cum $|\cos x| \leq 1 \implies$ ecuația $\cos x = 2$ nu are soluții. Pentru $\cos x = \dfrac{1}{2} \implies x \in \left\{\pm\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\}$. Soluțiile care ne interesează sunt $(\{k\pi | k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pm\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi | k \in$

$\mathbb{Z}\})\bigcap[0,10\pi]=\{0,\pi,2\pi-\frac{\pi}{3},2\pi,2\pi+\frac{\pi}{3},3\pi,4\pi-\frac{\pi}{3},4\pi,\ldots,10\pi-\frac{\pi}{3},10\pi\}$ care au suma egală cu $\pi\cdot[(1+2+3+\ldots+9+10)+2\cdot(2+4+6+8)+10-\frac{1}{3}]=\pi\cdot(55+2\cdot 20+10-\frac{1}{3})=\frac{314}{3}\pi$.

574. Pe intervalul $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ funcțiile sin şi cos sunt pozitive și concave. Din inegalitatea lui Jensen și inegalitatea dintre media aritmetică și cea geometrică: $\sin\frac{x+y}{2}\geq\frac{\sin x+\sin y}{2}\geq\sqrt{\sin x\sin y}>0$ și $\cos\frac{x+y}{2}\geq\frac{\cos x+\cos y}{2}\geq\sqrt{\cos x\cos y}>0$. Înmulțind cele două inegalități, obținem: $\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x+y}{2}\geq\sqrt{\sin x\cos x\cos y\sin y}\ \mid\cdot 2\implies$ $\sin(x+y)\geq 2\sqrt{\frac{1}{2}\sin 2x\cdot\frac{1}{2}\sin 2y}=\sqrt{\sin 2x\sin 2y}$. Dar, din ipoteza $\sin(x+y)\leq\sqrt{\sin 2x\sin 2y}$. Rezultă că are loc egalitate în inegalitate, și deci, și în inegalitățile folosite $\implies\sin x=\sin y$, $\cos x=\cos y$. Dar $x,y\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\implies x=y$, adică $\boxed{\text{A}}$ este corectă. Soluţie alternativă. Pe intervalul $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ funcțiile sin şi cos sunt pozitive, deci partea stângă a inegalității este pozitivă. Ridicând la pătrat se obține: $\sin^2(x+y)\leq\sin 2x\sin 2y\Leftrightarrow\sin^2x\cos^2y+2\sin x\cos y\sin y\cos x+\sin^2y\cos^2x\leq 4\sin x\cos x\sin y\cos y$ $\Leftrightarrow\sin^2(x-y)\leq 0\Leftrightarrow\sin(x-y)=0$. Dar $x,y\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, deci $x=y$, adică $\boxed{\text{A}}$ este corectă. Pentru varianta $\boxed{\text{D}}$, observăm, că dacă $x=y\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, atunci $\sin x+\sin y=2\sin x>\sqrt{3}\Leftrightarrow\sin x>\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow x\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)$. Deci inegalitatea nu este adevărată pentru orice $x,y\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

575. Din formula de transformare a produsului în suma avem ca $\sin x\sin 5x=\frac{1}{2}(\cos 4x-\cos 6x)$. Atunci ecuația devine $\frac{\cos 4x-\cos 6x}{2}+\cos 6x=\text{ctg}x\Leftrightarrow\frac{\cos 4x+\cos 6x}{2}=\frac{\cos x}{\sin x}$. Folosim încă o dată același set de formule și ajungem la $\cos x\cos 5x=\frac{\cos x}{\sin x}\Leftrightarrow\cos x\cdot(\cos 5x-\frac{1}{\sin x})=0$. Dacă $\cos x=0\implies x\in\{\frac{\pi}{2}+k\pi|k\in\mathbb{Z}\}$, de unde avem soluțiile în intervalul $[-2\pi,2\pi]$ sunt : $-\frac{3\pi}{2},-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}$. Dacă $\cos 5x=\frac{1}{\sin x}\Rightarrow\sin x\cos 5x=1\implies\frac{\sin 6x+\sin 4x}{2}=1$, adică $\sin 6x+\sin 4x=2$. Cum $\sin x\in[-1,1],\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow$

$$\begin{cases}\sin 4x=1\\ \sin 6x=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{(4n+1)\pi}{12},n\in\mathbb{Z}\\ x=\dfrac{(4m+1)\pi}{8},m\in\mathbb{Z}\end{cases}\Rightarrow x\in\emptyset.$$

Într-adevăr, dacă ar exista m și n astfel încât $\frac{(4n+1)\pi}{12}=\frac{(4m+1)\pi}{8}$, am obține că $8n+2=12m+3$, imposibil deoarece membrul stâng reprezintă un număr întreg par, iar cel stâng un număr impar. Atunci soluțiile finale sunt doar cele obținute în primul caz, în număr de 4.

576. Pentru a și b, expresia este egală succesiv cu $E(a,b)=4\cdot\frac{\sin(a+b)\cdot\cos(a-b)}{\sin 2a\cdot\sin 2b}=$

$4\sin(a+b)\cdot\dfrac{\cos(a-b)}{2\sin a\cos a\cdot 2\sin b\cos b}=\sin(a+b)\cdot\dfrac{\sin a\sin b+\cos a\cos b}{\sin a\cos a\sin b\cos b}=\sin(a+b)\cdot$ $\left(\dfrac{1}{\cos a\cos b}+\dfrac{1}{\sin a\sin b}\right)=\mathrm{tg}a+\mathrm{tg}b+\mathrm{ctg}b+\mathrm{ctg}a.$

577. Ecuația din cerință are discriminantul $\Delta=(2+\sqrt{3})^2-4\cdot 2\sqrt{3}=7-4\sqrt{3}=(2-\sqrt{3})^2$ și soluțiile $x_{1,2}=\dfrac{2+\sqrt{3}\pm(2-\sqrt{3})}{4}$, deci $x_1=1$ și $x_2=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **Cazul I:** $\sin a=1$, $\cos 3b=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\implies a\in\left\{\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\Big| k\in\mathbb{Z}\right\}$ și $b\in\left\{\pm\dfrac{\pi}{18}+\dfrac{2p\pi}{3}\Big| p\in\mathbb{Z}\right\}$. **Cazul II:** $\sin a=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 3b=1\implies a\in\left\{\dfrac{\pi}{3}+2k\pi\Big| k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\dfrac{2\pi}{3}+2n\pi\Big| n\in\mathbb{Z}\right\}$ și $b\in\left\{\dfrac{2m\pi}{3}\Big| m\in\mathbb{Z}\right\}$. Observăm că pentru $n=0$ și $m=1$, se obține $a=b=\dfrac{2\pi}{3}$.

578. Folosind $\mathrm{ctg}x=\dfrac{1}{\mathrm{tg}x}$ și notând $t=\mathrm{tg}x$, obținem ecuația echivalentă $t^3+t^2-10t+8=0$. Se observă că $t=1$ este rădăcină, deci să factorizăm cu $(t-1)$, și anume: $t^3-t^2+2t^2-2t-8t+8=0\Rightarrow t^2(t-1)+2t(t-1)-8(t-1)=0\Rightarrow(t-1)(t^2+2t-8)=0\Rightarrow(t-1)(t-2)(t+4)=0$. Dacă t=1: $\implies\mathrm{tg}x=1$, deci $x\in\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi|k\in\mathbb{Z}\}$. Dacă t=2: $\implies\mathrm{tg}x=2$, deci $x\in\{\mathrm{arctg}2+k\pi|k\in\mathbb{Z}\}$. Dacă t=-4: $\implies\mathrm{tg}x=-4$, deci $x\in\{-\mathrm{arctg}4+k\pi|k\in\mathbb{Z}\}$.

579. Notăm $4x=t$, astfel transformând inecuația dată $\sin 4x<\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ în $\sin t<\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Inecuația $\sin(x)<a$ are soluția generală reuniunea intervalelor $(-\pi-\arcsin(a)+2\pi k,\arcsin(a)+2\pi k)$, unde $k\in\mathbb{Z}$. Astfel:
$2k\pi-\pi-\arcsin\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)<t<\arcsin\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)+2k\pi\Leftrightarrow 2k\pi-\pi-\dfrac{\pi}{3}<t<\dfrac{\pi}{3}+2k\pi\Leftrightarrow$ $2k\pi-\pi-\dfrac{\pi}{3}<4x<\dfrac{\pi}{3}+2k\pi\Leftrightarrow\dfrac{k\pi}{2}-\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\pi}{12}<x<\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{k\pi}{2}\Leftrightarrow\dfrac{k\pi}{2}-\dfrac{\pi}{3}<x<\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{k\pi}{2}.$
Deoarece $1\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, $1<\dfrac{\pi}{3}$ şi funcţia sin este crescătoare pe intervalul $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, rezultă că $\sin 1<\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, deci $\boxed{\text{C}}$ este adevărată. Şi $\boxed{\text{D}}$ este adevărată pentru că $\sin\dfrac{3\pi}{2}=-1<\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

580. Au loc următoarele relații: $\mathrm{tg}\left(\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)=\dfrac{\sin\left(\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)}{\cos\left(\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)}=\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{3}}}{\sqrt{1-\dfrac{1}{3}}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

$\mathrm{tg}\left(2\mathrm{arctg}\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{2\mathrm{tg}\left(\mathrm{arctg}\dfrac{1}{2}\right)}{1-\mathrm{tg}^2\left(\mathrm{arctg}\dfrac{1}{2}\right)}=\dfrac{4}{3}$; $\arcsin(\sin 7)=\arcsin(\sin(7-2\pi))=7-2\pi$, deoarece $7-2\pi\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$; $\arccos(\sin 4)=\arccos\left(\cos\left(4-\dfrac{\pi}{2}\right)\right)=4-\dfrac{\pi}{2}$, deoarece $4-$

$\frac{\pi}{2} \in (0, \pi)$.

581. $\sin\left(2\arcsin\frac{3}{5}\right) = 2\sin\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)\cos\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)$ unde $\sin\left(\arcsin\frac{3}{5}\right) = \frac{3}{5}$ $\cos\left(\arcsin\frac{3}{5}\right) = \sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{25-9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$ $\sin\left(2\arcsin\frac{3}{5}\right) = 2\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5} = \frac{24}{25}$.

582. $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \implies \frac{x}{2} \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right) \implies \cos\frac{x}{2} > \sin\frac{x}{2}$. Folosim următoarele rezultate teoretice $\begin{cases} \left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2 = 1+\sin x \\ \left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2 = 1-\sin x \end{cases}$ $\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1-\sin x} = \left|\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right| - \left|\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right| = \sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2} - \left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right) = 2\sin\frac{x}{2}$.

583. $x \in (0,\pi) \Rightarrow x\cdot\sin x > 0$, astfel putem folosi inegalitatea mediilor: $M_a \geq M_g$. Obţinem $\dfrac{\frac{12}{x\sin x} + 48x\sin x}{2} \geq \sqrt{12\cdot 48} \Rightarrow$ valoarea minimă a expresiei este 48. Această valoare se poate atinge atunci când derivata funcției $\frac{12+48x^2\sin^2 x}{x\cdot\sin x} = 0 \Leftrightarrow x\cdot\sin x = \frac{1}{2}$

584. Din inegalitatea Cauchy-Buniakowski-Schwarz avem că: $(r\sin x + t\cos x)^2 \leq (\sin^2 x + \cos^2 x)(r^2+t^2) = (r^2+t^2) \Rightarrow r\sin x + t\cos x \leq \sqrt{r^2+t^2}$. Soluție alternativă: $r\sin x + t\cos x = \sqrt{r^2+t^2}(\frac{r}{\sqrt{r^2+t^2}}\sin x + \frac{t}{\sqrt{r^2+t^2}}\cos x) = \sqrt{r^2+t^2}\sin(x + \arcsin\frac{t}{\sqrt{r^2+t^2}}) \leq \sqrt{r^2+t^2}$.

585. Egalitatea în inegalitatea Cauchy-Buniakowski-Schwarz se obține pentru: $\frac{\sin x}{r} = \frac{\cos x}{t} \Rightarrow \frac{r}{t} = \operatorname{tg} x$. Înlocuind $x = \frac{\pi}{3}$, obținem: $\frac{r}{t} = \sqrt{3} \iff r = \sqrt{3}t$. Soluție alternativă: $r\sin x + t\cos x = \sqrt{r^2+t^2}(\frac{r}{\sqrt{r^2+t^2}}\sin x + \frac{t}{\sqrt{r^2+t^2}}\cos x) = \sqrt{r^2+t^2}\sin(x + \arcsin\frac{t}{\sqrt{r^2+t^2}}) \Rightarrow$ valoarea maximă se atinge când $\sin(x + \arcsin\frac{t}{\sqrt{r^2+t^2}}) = 1$. Dacă considerăm așadar $x + \arcsin\frac{t}{\sqrt{r^2+t^2}} = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$, cum $x = \frac{\pi}{3}$, avem $\arcsin\frac{t}{\sqrt{r^2+t^2}} = \frac{\pi}{6}$, deci $\frac{t}{\sqrt{r^2+t^2}} = \frac{1}{2} \iff 4t^2 = r^2+t^2 \iff r = \pm\sqrt{3}$. Observăm astfel că varianta $\boxed{\text{A}}$ este corectă.

586. Se foloseşte următoarea observaţie: $4\cos x\cdot\cos(60^\circ - x)\cdot\cos(60^\circ + x) = \cos 3x$, deoarece $4\cos x\cdot\cos(60^\circ - x)\cdot\cos(60^\circ + x) = 2\cos x\cdot[\cos 120^\circ + \cos 2x] = 2\cos x\cdot(-\frac{1}{2} + 2\cos^2 x - 1) = 4\cos^3 x - 3\cos x = \cos 3x$. Astfel, $4\cos 6^\circ\cdot\cos 54^\circ\cdot\cos 66^\circ = 4\cos 6^\circ\cdot\cos(60-6)^\circ\cdot\cos(60+6)^\circ = \cos(3\cdot 6^\circ) = \cos 18^\circ(1)$. Analog se obţine $4\cos 18^\circ\cdot\cos 42^\circ\cdot\cos 78^\circ =$

$4\cos 18^\circ \cdot \cos(60-18)^\circ \cdot \cos(60+18)^\circ = \cos 54^\circ (2)$. Înmulţind identităţile (1) şi (2), avem $16\cos 6^\circ \cdot \cos 66^\circ \cdot \cos 42^\circ \cdot \cos 78^\circ = 1$.

587. Fie $u = \sin x, v = \cos y \Rightarrow \begin{cases} u+v=1 \\ u^2+v^2=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \cos y = \frac{1}{2}, \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = (-1)^m \frac{\pi}{6} + m\pi, m \in \mathbb{Z}, y = \pm\frac{\pi}{3} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$.

588. $\operatorname{tg}(89^\circ) = \operatorname{tg}(90^\circ - 1^\circ) = \operatorname{ctg}(1^\circ) = \frac{1}{\operatorname{tg}(1^\circ)}$ $\operatorname{tg}(88^\circ) = \operatorname{tg}(90^\circ - 2^\circ) = \operatorname{ctg}(2^\circ) = \frac{1}{\operatorname{tg}(2^\circ)}$ și așa mai departe. In mijloc avem termenul $\operatorname{tg}(45^\circ)$ care este egal cu 1.Prin înmulțire se obține că $S = 1$.

589. $\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

590. $\frac{\pi}{2} < 2 < \pi \Rightarrow \sin(2) > 0$; $\pi < 4 < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \sin(4) < 0$; $\frac{3\pi}{2} < 6 < 2\pi \Rightarrow \sin(6) < 0$.

591. $\sin\left(\frac{13\pi}{6}\right) = \sin\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$, $\sin\left(\frac{7\pi}{3}\right) = \sin\left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

592. $\frac{11\pi}{4} = 2\pi + \frac{3\pi}{4}$, $\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\left(\frac{11\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\frac{5\pi}{2} = 2\pi + \frac{\pi}{2}$, $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $\cos\left(\frac{5\pi}{2}\right) = 0$.

593. Folosim formulele $\sin(\pi - x) = \sin(x), \sin(\pi + x) = -\sin(x), \sin(2\pi - x) = -\sin(x)$.

594. Avem $\angle AOB = \frac{\pi}{3}$, $\angle BOC = \frac{\pi}{3}$, $\angle COA = \angle AOB + \angle BOC = \frac{2\pi}{3}$. Astfel triunghiurile AOB şi BOC sunt echilaterale (deoarece sunt isoscele cu un vârf de măsură $\frac{\pi}{3}$), de unde triunghiul ABC este isoscel cu laturile $AB = BC = 1$ şi cu unghiul ABC de măsură $\frac{2\pi}{3}$.

595. Deoarece $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, rezultă că $\sin x \geq 0, \cos x \geq 0$ şi astfel $\sin x + \cos x > 0$. Atunci $|\sin x + \cos x| = |\sin x| + |\cos x| \Leftrightarrow \sin x + \cos x = \sin x + \cos x \Leftrightarrow 0 = 0$. Deci toate valorile ale lui $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ sunt soluţii. Prin urmare, soluția ecuației este $\boxed{\text{D}}$.

596. $\sin(x - \pi) = -\sin(\pi - x) = -\sin(x) = \frac{3}{4}$.

597. $\cos(180^\circ + \theta) = -\cos(\theta)$. Așadar: $\cos(240^\circ) = \cos(180^\circ + 60^\circ) = -\cos(60^\circ)$. Deci: $\cos(240^\circ) = -\frac{1}{2}$.

598. $\frac{11\pi}{7} \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$, adică este în al patrulea cadran, deci: $\sin\frac{11\pi}{7} < 0$. Unghiul $\frac{2\pi}{9}$ este în primul cadran (între 0 și $\frac{\pi}{2}$), deci: $\sin\frac{2\pi}{9} > 0$. Unghiul $\frac{5\pi}{8}$ este în al doilea cadran (între $\frac{\pi}{2}$ și π), deci: $\sin\frac{5\pi}{8} > 0$.

599. Observăm că 5 radiani este între $\frac{3\pi}{2}$ și 2π: $\frac{3\pi}{2} \approx 4.71$ radiani, $2\pi \approx 6.28$ radiani. Deci, 5 radiani se află în al patrulea cadran.Astfel: $\cos 5 > 0$. Analog, $\sqrt{8}$ radiani este în al doilea cadran, între $\frac{\pi}{2}$ și π, astfel: $\cos\sqrt{8} < 0$.

600. Folosim identitatea $\sin 2x = 2\sin x\cos x$. Mai întâi, determinăm $\cos x$ folosind identitatea trigonometrică: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Substituind $\sin x = \frac{3}{5}$: $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$. Prin urmare: $\cos x = \pm\frac{4}{5}$. Deoarece $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, rezultă că $\cos x = -\frac{4}{5}$. Atunci $\sin 2x = 2\sin x\cos x = 2\cdot\frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{-24}{25}$ Astfel, $\sin(2x) = -\frac{24}{25}$.
$\operatorname{tg} x = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = \frac{3}{5}\cdot\frac{-5}{4} = -\frac{3}{4}$.

601. Știm că $\cos x = -\frac{1}{5}$ și folosim identitatea trigonometrică: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ Substituim valoarea lui $\cos x$: $\sin^2 x + \left(-\frac{1}{5}\right)^2 = 1$; $\sin^2 x + \frac{1}{25} = 1$; $\sin^2 x = 1 - \frac{1}{25} = \frac{24}{25}$; $\sin x = \pm\frac{\sqrt{24}}{5}$. Cum $x \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$, $\sin x$ este negativ, deci: $\sin x = -\frac{\sqrt{24}}{5}$. Acum determinăm $\sin 2x$ folosind formula de dublu unghi: $\sin 2x = 2\sin x\cos x = 2\cdot\left(-\frac{\sqrt{24}}{5}\right)\cdot\left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{2\sqrt{24}}{25}$.

602. $\operatorname{tg}\left(\frac{13\pi}{6}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{13\pi}{6} - 2\pi\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$; $\cos\left(\frac{13\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

603. Unghiul 169° este în cadranul al doilea (între 90° și 180°). În acest cadran, funcția cosinus este negativă. Unghiul 220° este în cadranul al treilea (între 180° și 270°). În acest cadran, funcția cosinus este negativă. Unghiul 324° este în cadranul al patrulea (între 270° și 360°). În acest cadran, funcția cosinus este pozitivă.

604. Înlocuim x cu $\pi - x$ în ecuația inițială: $2f(\pi - x) + 7f(x) = 8\sin(\pi - x)$. Știm că $\sin(\pi - x) = \sin x$, deci: $2f(\pi - x) + 7f(x) = 8\sin x$. Avem acum două ecuații: $2f(x)+7f(\pi-x) = 8\sin x$ și $2f(\pi-x)+7f(x) = 8\sin x$. Multiplicăm prima ecuație cu 2 și a doua ecuație cu 7: $4f(x)+14f(\pi-x)=16\sin x$ și $14f(\pi-x)+49f(x)=56\sin x$. Scădem prima ecuație din a doua: $(14f(\pi-x)+49f(x))-(4f(x)+14f(\pi-x))=56\sin x-16\sin x$. $45f(x)=40\sin x \quad\Rightarrow\quad f(x)=\dfrac{40}{45}\sin x \quad\Rightarrow\quad f(x)=\dfrac{8}{9}\sin x$. Prin urmare, funcția care satisface ecuația dată este: $f(x)=\dfrac{8}{9}\sin x$.

605. Înlocuim x cu $2\pi-x$ în ecuația dată: $5f(2\pi-x)+f(x)=8\cos(2\pi-x)$

Deoarece $\cos(2\pi-x)=\cos x$, obținem: $5f(2\pi-x)+f(x)=8\cos x$ Astfel, avem două ecuații: $\begin{cases} 5f(x)+f(2\pi-x)=8\cos x \\ 5f(2\pi-x)+f(x)=8\cos x \end{cases}$. Adunând cele două ecuații: $6f(x)+6f(2\pi-x)=16\cos x \implies f(x)+f(2\pi-x)=\dfrac{8}{3}\cos x$. Scăzând ecuația (2) din ecuația (1): $4f(x)-4f(2\pi-x)=0 \implies f(x)=f(2\pi-x)$ Substituind $f(x)=f(2\pi-x)$ în $f(x)+f(2\pi-x)=\dfrac{8}{3}\cos x$: $2f(x)=\dfrac{8}{3}\cos x \implies f(x)=\dfrac{4}{3}\cos x$.

606. Înlocuim x cu $-x$ în ecuație: $f(2\pi-x)+4f(2\pi+x)=5\cos(-x)$. Având în vedere

că $\cos(-x)=\cos(x)$, obținem: $f(2\pi-x)+4f(2\pi+x)=5\cos x$.

Astfel, avem două ecuații: $\begin{cases} f(2\pi+x)+4f(2\pi-x)=5\cos x \\ f(2\pi-x)+4f(2\pi+x)=5\cos x \end{cases}$ Notăm $f(2\pi+x)$ cu a și $f(2\pi-x)$ cu b. Deci, ecuațiile devin: $\begin{cases} a+4b=5\cos x \\ b+4a=5\cos x \end{cases}$. Scădem prima ecuație din a doua: $(b+4a)-(a+4b)=0 \Leftrightarrow 3a-3b=0 \Leftrightarrow a=b$. Înlocuind $a=b$ în prima ecuație, obţinem $a=\cos x \Leftrightarrow f(2\pi+x)=\cos x$. Înlocuim x cu $x-2\pi$: $f(2\pi+(x-2\pi))=\cos(x-2\pi)\Leftrightarrow f(x)=\cos x$.

607. Cel mai mic număr pozitiv T pentru care $\cos y=\cos(y+T)$ pentru orice număr real y, adică perioada funcției cos este 2π. Astfel $\cos y=\cos(y+2\pi), \forall y\in\mathbb{R}$. Alegând $y=3x$, avem că $\boxed{\text{D}}$ este adevărată.

608. În egalitatea $E(x)=E(x+T)\Leftrightarrow \cos x+\sin 2x=\cos(x+T)+\sin(2x+T)$

înlocuim pe rând valorile $x=0$ și $x=\dfrac{\pi}{2}$. Se obține: $\cos 0+\sin 0=\cos T+\sin T\Leftrightarrow 1=\cos T+\sin T$; (1). $\cos\dfrac{\pi}{2}+\sin\pi=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+T\right)+\sin(\pi+T)\Leftrightarrow 0=-\sin T-\sin T\Leftrightarrow \sin T=0$. (2). Din (1) și (2) avem $\sin T=0$ și $\cos T=1$. Cel mai mic număr pozitiv T pentru care au loc simultan aceste condiții este $T=2\pi$.

609. Dezvoltarea sumelor rezultă în expresia $\sum_{k=0}^{n} \sin(a+k)\cos(b+k) - \sin(b+k)\cos(a+k)$ și, cum $\sin(a+k)\cos(b+k) - \sin(b+k)\cos(a+k) = \sin(a+k-b-k) = \sin(a-b)$, valoarea expresiei este, de fapt, $(n+1)\sin(a-b)$. Cum $a-b = \frac{\pi}{2}$, obținem varianta $\boxed{\text{D}}$ ca fiind singura corectă.

610. Ridicăm ecuaţia la pătrat. $\sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x = \frac{3}{2} \Rightarrow \sin 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow x \in \left\{\frac{5\pi}{12}, \frac{\pi}{12}\right\}$. Mai trebuie verificat dacă au apărut soluţii noi cu ridicarea ecuaţiei iniţiale la pătrat. Prin calcule simple obţinem că $\sin\frac{\pi}{12} + \cos\frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{1-\cos(\pi/6)}{2}} + \sqrt{\frac{1+\cos(\pi/6)}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} + \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} = \sqrt{\frac{3}{2}}$. (ultima egalitate se poate verificare prin ridicarea egalităţii la pătrat.) $\sin\frac{5\pi}{12} + \cos\frac{5\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right) = \cos\frac{\pi}{12} + \sin\frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{3}{2}}$. Deci ambele soluţii obţinute sunt soluţii ale ecuaţiei iniţiale. Astfel, $\frac{x_1}{x_2} = 5$.

611. $S_n = \sin(x)\cos((n-1)x) + \sin(2x)\cos((n-2)x) + \cdots + \sin((n-1)x)\cos(x)$ Dar suma se mai poate scrie: $S_n = \sin((n-1)x)\cos(x) + \sin((n-2)x)\cos(2x) + \cdots + \sin(x)\cos((n-1)x)$. Adunând cele două expresii avem $2S_n = [\sin(x)\cos((n-1)x) + \sin((n-1)x)\cos(x)] + [\sin(2x)\cos((n-2)x) + \sin((n-2)x)\cos(2x)] + \cdots + [\sin((n-1)x)\cos(x) + \sin(x)\cos((n-1)x)]$; $2S_n = \sin(nx) + \sin(nx) + \cdots + \sin(nx)$ (un total de $(n-1)$ termeni) Aşadar $2S_n = (n-1)\sin(nx)$ şi $S_n = \frac{(n-1)}{2}\sin(nx)$.

612. Produsul cerut este egal cu $\text{ctg}(41°)\cdot\text{ctg}(42°)\cdot\text{ctg}(43°)\cdot\text{ctg}(44°)\cdot\text{ctg}(45°)\cdot\text{ctg}(46°)\cdot\text{ctg}(47°)\cdot\text{ctg}(48°)\cdot\text{ctg}(49°)$. Folosind $\text{ctg}(90° - x) = \text{tg}(x)$, rescriem: $\text{ctg}(90° - 41°) = \text{tg}(41°)$, $\text{ctg}(90° - 42°) = \text{tg}(42°)$, $\text{ctg}(90° - 43°) = \text{tg}(43°)$, $\text{ctg}(90° - 44°) = \text{tg}(44°)$ Folosind cele de mai sus, produsul de calculat devine $\text{ctg}(41°)\cdot\text{ctg}(42°)\cdot\text{ctg}(43°)\cdot\text{ctg}(44°)\cdot\text{ctg}(45°)\cdot\text{tg}(45°)\cdot\text{tg}(44°)\cdot\text{tg}(43°)\cdot\text{tg}(42°)\cdot\text{tg}(41°)$. Cum $\text{ctg}(45°) = 1$ și $\text{tg}(45°) = 1$, calculul devine: $\text{ctg}(41°)\cdot\text{ctg}(42°)\cdot\text{ctg}(43°)\cdot\text{ctg}(44°)\cdot\text{tg}(44°)\cdot\text{tg}(43°)\cdot\text{tg}(42°)\cdot\text{tg}(41°) = 1$.

613. Înmulțim expresia cerută cu $\cos(10°)$: $16\sin(10°)\cos(10°)\sin(30°)\sin(50°)\sin(70°)$. Folosind identitateasin$(2A) = 2\sin(A)\cos(A)$, expresia devine $8\sin(20°)\sin(30°)\sin(50°)\sin(70°)$. Observăm că $\sin(70°) = \sin(90° - 20°) = \cos(20°)$, astfel expresia devine $8\sin(20°)\sin(30°)\sin(50°)\cos(20°) = 4\sin(40°)\sin(30°)\sin(50°)$. Cum $\sin(50°) = \cos(40°)$, folosind din nou formula pentru dublarea argumentului, avem $2\sin(80°)\cdot\sin(30°)$. Produsul cerut este egal cu $\dfrac{2\sin(80°)\cdot\sin(30°)}{\cos(10°)} = 2\sin(30°) = 1$.

614. Observăm că produsul conține termenul $\sin(0°)$, iar $\sin(0°) = 0$. Prin urmare, produsul cerut are valoarea 0.

615. Deoarece $\mathrm{tg}(180° - x) = -\mathrm{tg}(x)$, pentru orice valoare x pentru care expresiile sunt definite. Observăm că pentru fiecare unghi x în intervalul $1° \le x \le 89°$, există un unghi $180° - x$ în intervalul $91° \le x \le 179°$ astfel încât: $\mathrm{tg}(180° - x) = -\mathrm{tg}(x)$. Prin urmare, pentru fiecare termen $\mathrm{tg}(x)$ unde x este în intervalul $1°$ la $89°$, există un termen corespunzător $\mathrm{tg}(180° - x)$ unde $180° - x$ este în intervalul $91°$ la $179°$, astfel încât: $\mathrm{tg}(180° - x) = -\mathrm{tg}(x)$. Astfel, suma tuturor termenilor poate fi grupată în perechi de termeni care se anulează reciproc: $(\mathrm{tg}(1°) + \mathrm{tg}(179°)) + (\mathrm{tg}(2°) + \mathrm{tg}(178°)) + \ldots + (\mathrm{tg}(89°) + \mathrm{tg}(91°))$. Fiecare pereche $\mathrm{tg}(x) + \mathrm{tg}(180° - x) = \mathrm{tg}(x) - \mathrm{tg}(x) = 0$. Astfel, întreaga sumă este 0.

616. Vom folosi identitatăţile trigonometrice $\mathrm{tg}(90° - x) = \mathrm{ctg}(x)$ şi $\mathrm{tg}(x)\cdot\mathrm{ctg}(x) = 1$. Grupăm termenii produsului în perechi, astfel $(\mathrm{tg}(1°)\cdot\mathrm{tg}(89°))\cdot(\mathrm{tg}(2°)\cdot\mathrm{tg}(88°))\cdot\ldots\cdot(\mathrm{tg}(44°)\cdot\mathrm{tg}(46°))\cdot\mathrm{tg}(45°)$ Termenii din fiecare paranteză se înmulţesc la 1, aşadar produsul final este egal cu 1.

617. Folosim identitatea: $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$. Astfel, pentru $\sin^4 x$, avem $\sin^4 x = \left(\dfrac{1-\cos(2x)}{2}\right)^2$; $\sin^4 x = \dfrac{1 - 2\cos(2x) + \cos^2(2x)}{4}$. Știind că $\cos^2(2x) = \dfrac{1+\cos(4x)}{2}$ avem $\sin^4 x = \dfrac{1 - 2\cos(2x) + \dfrac{1+\cos(4x)}{2}}{4} \Rightarrow \sin^4 x = \dfrac{3 - 4\cos(2x) + \cos(4x)}{8}$.

Calculăm fiecare termen: $\sin^4\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = \dfrac{3 - 4\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right)}{8}$; $\sin^4\left(\dfrac{3\pi}{8}\right) = \dfrac{3 - 4\cos\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) + \cos\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)}{8}$; $\sin^4\left(\dfrac{5\pi}{8}\right) = \dfrac{3 - 4\cos\left(\dfrac{5\pi}{4}\right) + \cos\left(\dfrac{5\pi}{2}\right)}{8}$; $\sin^4\left(\dfrac{7\pi}{8}\right) = \dfrac{3 - 4\cos\left(\dfrac{7\pi}{4}\right) + \cos\left(\dfrac{7\pi}{2}\right)}{8}$. Înlocuind valorile $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0, \cos\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = 0, \cos\left(\dfrac{5\pi}{2}\right) = 0, \cos\left(\dfrac{7\pi}{2}\right) = 0$ şi $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \cos\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \cos\left(\dfrac{5\pi}{4}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \cos\left(\dfrac{7\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Astfel, fiecare termen devine $\sin^4\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = \dfrac{3 - 4\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2} + 0}{8} = \dfrac{3-2\sqrt{2}}{8}$; $\sin^4\left(\dfrac{3\pi}{8}\right) =$

$\dfrac{3-4\cdot\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)+0}{8}=\dfrac{3+2\sqrt{2}}{8}$; $\sin^4\left(\dfrac{5\pi}{8}\right)=\dfrac{3-4\cdot\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)+0}{8}=\dfrac{3+2\sqrt{2}}{8}$;

$\sin^4\left(\dfrac{7\pi}{8}\right)=\dfrac{3-4\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}+0}{8}=\dfrac{3-2\sqrt{2}}{8}$. Suma este egală cu $\dfrac{3-2\sqrt{2}}{8}+\dfrac{3+2\sqrt{2}}{8}+\dfrac{3+2\sqrt{2}}{8}+\dfrac{3-2\sqrt{2}}{8}=\dfrac{(3-2\sqrt{2})+(3+2\sqrt{2})+(3+2\sqrt{2})+(3-2\sqrt{2})}{8}=\dfrac{12}{8}=\dfrac{3}{2}$.

618. Înmulţind expresia cu $2\sin\dfrac{x}{2}$, se ajunge la suma telescopică $2S\sin\dfrac{x}{2}=\sum_{k=1}^{n}\left(\dfrac{\cos\dfrac{(2k-1)x}{2}-\cos\dfrac{(2k+1)x}{2}}{2}\right)=\dfrac{\cos\dfrac{x}{2}-\cos\dfrac{(2n+1)x}{2}}{2}=\dfrac{\sin\dfrac{nx}{2}\sin\dfrac{(n+1)x}{2}}{2}$.

Alternativ, suma se poate calcula folosind formula lui De Moivre, după ce se observă că este egală cu partea imaginară expresiei $\sum_{i=1}^{n}\epsilon^i=\dfrac{\epsilon^{n+1}-1}{\epsilon-1}-1$, unde $\epsilon=\cos x+i\cdot\sin x$.

619. Notăm cu $S=16\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 60^\circ\cos 80^\circ$. Înmulțim expresia S cu $\sin 20^\circ$ obține: $S\cdot\sin 20^\circ=16\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 60^\circ\cos 80^\circ\sin 20^\circ$. Folosind formula pentru dublarea argumentului, membrul drept se observă a fi egal cu $2\sin(160^\circ)\cdot\cos(60^\circ)$. Cum $\sin(160^\circ)=\sin(20^\circ)$, aflăm că $S=2\cdot\cos(60^\circ)=1$.

620. Deoarece $\sin(360^\circ-x)=-\sin(x)$, oricare ar fi x, grupaţi câte doi, termenii din sumă se vor anula reciproc, după cum urmează: $\sin 1^\circ+\sin 359^\circ=0$, $\sin 2^\circ+\sin 358^\circ=0$, $\sin 3^\circ+\sin 357^\circ=0,\ldots\sin 179^\circ+\sin 181^\circ=0$, $\sin 180^\circ=\sin 360^\circ=0$. Deci, suma tuturor termenilor este: $S=0$.

621. Pornim de la expresia $S=\dfrac{1}{\sin 10^\circ}-\dfrac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ}$. Înmulțim această expresie cu $\sin 10^\circ\cos 10^\circ$: $S\cdot\sin 10^\circ\cos 10^\circ=\left(\dfrac{1}{\sin 10^\circ}-\dfrac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ}\right)\cdot\sin 10^\circ\cos 10^\circ$ şi obţinem $S\cdot\sin 10^\circ\cdot\cos 10^\circ=\cos 10^\circ-\sqrt{3}\sin 10^\circ$. Acum, multiplicând această egalitate cu $\dfrac{1}{2}$, se ajunge la $\dfrac{1}{2}\cdot S\cdot\sin 10^\circ\cdot\cos 10^\circ=\dfrac{1}{2}\left(\cos 10^\circ-\sqrt{3}\sin 10^\circ\right)$, de unde $\dfrac{1}{2}S\cdot\sin 10^\circ\cdot\cos 10^\circ=\dfrac{1}{2}\cos 10^\circ-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 10^\circ$. Simplificând, ajungem la $\dfrac{1}{4}\cdot S\cdot\sin 20^\circ=\sin(30^\circ-10^\circ)$. Deci $S=4$.

622. Avem $\cos x+\sin x=\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos x+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin x\right)$. Observăm că $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ este egal cu $\cos\dfrac{\pi}{4}$ și cu $\sin\dfrac{\pi}{4}$. Deci: $\cos x+\sin x=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}\cos x+\sin\dfrac{\pi}{4}\sin x\right)\implies\cos x+\sin x=\sqrt{2}\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

623. Folosind formula $\sin^3 x = \dfrac{3\sin x - \sin 3x}{4}$, avem: $3^{k-1}\sin^3\left(\dfrac{x}{3^k}\right) = \dfrac{1}{4}\Big(3^k \sin\left(\dfrac{x}{3^k}\right)$ $-3^{k-1}\sin\left(\dfrac{x}{3^{k-1}}\right)\Big)$. Se adună relațiile pentru $k = 1, 2, \ldots, n$. Fiecare relație este de forma: $3^{k-1}\sin^3\left(\dfrac{x}{3^k}\right) = \dfrac{1}{4}\left(3^k\sin\left(\dfrac{x}{3^k}\right) - 3^{k-1}\sin\left(\dfrac{x}{3^{k-1}}\right)\right)$. Adunând aceste relații de la $k = 1$ până la $k = n$ obţinem $\sum_{k=1}^n 3^{k-1}\sin^3\left(\dfrac{x}{3^k}\right) = \dfrac{1}{4}\sum_{k=1}^n \Big(3^k\sin\left(\dfrac{x}{3^k}\right) - 3^{k-1}$ $\cdot \sin\left(\dfrac{x}{3^{k-1}}\right)\Big)$. Observăm că termenii din sumă se anulează parțial, după cum urmează $\sum_{k=1}^n 3^{k-1}\sin^3\left(\dfrac{x}{3^k}\right) = \dfrac{1}{4}\left(3^n\sin\left(\dfrac{x}{3^n}\right) - \sin x\right)$.

624. Pentru a simplifica expresia $\cos x - \sqrt{3}\sin x$, începem prin a o înmulți cu $\dfrac{1}{2}$. Se obţine $\dfrac{1}{2}(\cos x - \sqrt{3}\sin x) = \dfrac{1}{2}\cos x - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x$. Aceasta poate fi scrisă ca $\dfrac{1}{2}\cos x - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x = \cos x\cos\dfrac{\pi}{3} - \sin x\sin\dfrac{\pi}{3}$. Prin urmare, folosind o formula trigonometrică cunoscută, putem scrie $\dfrac{1}{2}\cos x - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$ şi expresia originală devine $\cos x - \sqrt{3}\sin x = 2\cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$.

625. Pentru orice y cu proprietatea că $\sin y \neq 0$, are loc $\cos y = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sin 2y}{\sin y}$. Folosim această identitate pentru $y = \dfrac{x}{2}, \dfrac{x}{4}, \ldots, \dfrac{x}{2^N}$. Astfel, avem $\cos\left(\dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sin\left(\dfrac{x}{1}\right)}{\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)}$; $\cos\left(\dfrac{x}{4}\right) = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{x}{4}\right)}$; $\ldots$ $\cos\left(\dfrac{x}{2^n}\right) = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sin\left(\dfrac{x}{2^{n-1}}\right)}{\sin\left(\dfrac{x}{2^n}\right)}$. Înmulțind toate aceste relații, obținem $\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)\cdot\cos\left(\dfrac{x}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\cos\left(\dfrac{x}{2^n}\right) = \dfrac{1}{2^n}\cdot\dfrac{\sin x}{\sin\left(\dfrac{x}{2^n}\right)}$. Rezultatul final este

$$\frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{x}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\cos\left(\frac{x}{2^n}\right)}{1} = \frac{\sin x}{2^n\cdot\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}.$$

626. Similar cu problema precedentă, pentru valorile y cu proprietatea că $\sin y \neq 0$, avem $\cos y = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sin 2y}{\sin y}$. Astfel, dacă folosim pe rând $y = x, 2x, 4x, \ldots, 2^{n-1}x$ avem: $\cos x = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sin 2x}{\sin x}$, $\cos 2x = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sin 4x}{\sin 2x}$ $\cos 4x = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sin 8x}{\sin 4x}$ $\ldots$ $\cos\left(2^{n-1}x\right) = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sin\left(2^n x\right)}{\sin\left(2^{n-1}x\right)}$. Înmulțind toate aceste relații, obținem $\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 4x\cdot\ldots\cdot\cos\left(2^{n-1}x\right) = \dfrac{1}{2^n}\cdot\dfrac{\sin\left(2^n x\right)}{\sin x}$.

627. Să observăm că $16\sin x\cdot\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 4x\cdot\cos 8x = 1 \iff \sin 16x = 1$. $16x \in \{(-1)^k\cdot\arcsin 1 + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \implies 16x \in \{(-1)^k\cdot\dfrac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. $x \in \{(-1)^k\cdot\dfrac{\pi}{32} + \dfrac{k\pi}{16} \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$$\left.\begin{cases} k=0 & \Rightarrow x=\dfrac{\pi}{32}\in[-2\pi,2\pi] \\ k=1 & \Rightarrow x=-\dfrac{\pi}{32}+\dfrac{2\pi}{32}=\dfrac{\pi}{32}\in[-2\pi,2\pi] \\ & \vdots \\ k=30 & \Rightarrow x=\dfrac{\pi}{32}+\dfrac{60\pi}{32}=\dfrac{61\pi}{32}\in[-2\pi,2\pi] \\ k=31 & \Rightarrow x=-\dfrac{\pi}{32}+\dfrac{62\pi}{32}=\dfrac{61\pi}{32}\in[-2\pi,2\pi] \\ k=32 & \Rightarrow x=\dfrac{\pi}{32}+\dfrac{64\pi}{32}=\dfrac{65\pi}{32}\notin[-2\pi,2\pi] \end{cases}\right\} \Rightarrow 32:2=16 \text{ soluţii}$$

$$\left.\begin{cases} k=-1 & \Rightarrow x=-\dfrac{\pi}{32}-\dfrac{2\pi}{32}=-\dfrac{3\pi}{32}\in[-2\pi,2\pi] \\ k=-2 & \Rightarrow x=\dfrac{\pi}{32}-\dfrac{4\pi}{32}=-\dfrac{3\pi}{32}\in[-2\pi,2\pi] \\ & \vdots \\ k=-30 & \Rightarrow x=\dfrac{\pi}{32}-\dfrac{60\pi}{32}=-\dfrac{59\pi}{32}\in[-2\pi,2\pi] \\ k=-31 & \Rightarrow x=-\dfrac{\pi}{32}-\dfrac{62\pi}{32}=-\dfrac{63\pi}{32}\in[-2\pi,2\pi] \\ k=-32 & \Rightarrow x=\dfrac{\pi}{32}-\dfrac{64\pi}{32}=-\dfrac{63\pi}{32}\in[-2\pi,2\pi] \end{cases}\right\} \Rightarrow 32:2=16 \text{ soluţii.}$$

În concluzie, există 32 de soluţii.

628. $\cos^2 x+\cos^2 2x=1 \implies \cos^2 2x=\sin^2 x \implies \cos^2 2x-\sin^2 x=0 \implies$

$\implies (\cos 2x-\sin x)(\cos 2x+\sin x)=0 \implies \cos 2x-\sin x=0$ sau $\cos 2x+\sin x=0$.

Cazul 1: $\cos 2x-\sin x=0 \implies 2\sin^2 x+\sin x-1=0 \implies$

$$\implies \begin{cases} \sin x=\dfrac{1}{2} \Rightarrow x\in\left\{(-1)^k\cdot\dfrac{\pi}{6}+k\pi \,\middle|\, k\in\mathbb{Z}\right\} \Rightarrow \left\{\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6}\right\} \text{soluţii când k} \in\{0,1\}. \\ \sin x=-1 \text{ fals pentru x} \in[0,\pi] \end{cases}$$

Cazul 2: $\cos 2x+\sin x=0 \implies 2\sin^2 x-\sin x-1=0 \implies$

$$\implies \begin{cases} \sin x=1 \implies x\in\left\{(-1)^k\cdot\dfrac{\pi}{2}+k\pi \,\middle|\, k\in\mathbb{Z}\right\} \implies \dfrac{\pi}{2} \text{ este o soluţie pentru k} \in\{0,1\} \\ \sin x=-\dfrac{1}{2} \text{ fals pentru x} \in[0,\pi]. \end{cases}$$

În concluzie, suma soluţiilor distincte este $\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{5\pi}{6}+\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{3\pi}{2}$.

629. Avem $f(\log_3 4)=3^{\log_3 4+1}-9^{\log_3 4}=3^{\log_3 12}-3^{\log_3 16}$. Cum $a^{\log_a x}=x\forall x\in\mathbb{R}_+^* \Rightarrow$

$f(\log_2 3)=12-16=-4$.

630. Cum $ABCD$ este paralelogram, obținem direct $BC=AD=1$ și $CD=AB=2$.

În $\triangle BCD, BC=1, CD=2$ și $m(\widehat{C})=60^\circ$, deci din Teorema cosinusului obținem $BD^2=BC^2+DC^2-2BC\cdot DC\cdot\cos(\widehat{C})=5-2=3 \Rightarrow BD=\sqrt{3}$. Analog, aplicând Teorema cosinusului în $\triangle ADC$, obținem $AC=\sqrt{7}$.

631. Amplificând cu conjugata, obținem $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\cdot\dfrac{(\sqrt{n+2^n}-\sqrt{n})(\sqrt{n+2^n}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+2^n}+\sqrt{n}} =$ $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\cdot\dfrac{2^n}{\sqrt{n+2^n}+\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\cdot\dfrac{2^n}{2^{n/2}\left(\sqrt{\frac{n}{2^n}+1}+\sqrt{\frac{n}{2^n}}\right)}$. Cum $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{2^n}=0$ și $\dfrac{2^n}{2^{n/2}}=2^{n/2}$, limita devine $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\cdot 2^{n/2}=+\infty$.

632. Numărul submulțimilor lui A cu 2 elemente este $C_n^2=\dfrac{n!}{(n-2)!\cdot 2}=\dfrac{n(n-1)}{2}=21 \iff n(n-1)=42$ și cum $n\in\mathbb{N}$ obținem $n=7$, de unde rezultă varianta $\boxed{\text{B}}$

633. Rescriem ecuația ca $2^{2x}-2^x\cdot 3^x\cdot 3=4\cdot 3^{2x}$. Notăm $2^x=a>0$ și $3^x=b>0$ și rămânem cu $a^2-3ab-4b^2=0 \iff a^2+ab-4ab-4b^2=0 \iff a(a+b)-4b(a+b)=0 \iff (a-4b)(a+b)=0$. Avem, așadar:

Cazul I: $a-4b=0 \iff a=4b$, deci $2^x=4\cdot 3^x \iff x=\log_2\left(4\cdot 3^x\right) \iff x=\log_2 4+x\cdot\log_2 3 \iff x=2+x\cdot\log_2 3 \iff x=\dfrac{2}{1-\log_2 3}$ (1).

Cazul II: $a+b=0 \iff 2^x=-3^x$, evident imposibil. (2)

Așadar, (1) și (2) implică afirmațiile $\boxed{\text{B}}$ și $\boxed{\text{C}}$.

634. Fie $F'\in(AC)$ astfel încât F - mijlocul lui AF'. Avem $x_F=\dfrac{x_A+x_{F'}}{2}$ și $y_F=\dfrac{y_A+y_{F'}}{2}$, deci $4=\dfrac{1+x_{F'}}{2}, 18=\dfrac{3+y_{F'}}{2} \iff F'(7,33)$. De asemenea, observăm că F' este mijlocul lui CF, așadar avem $x_{F'}=\dfrac{x_C+x_F}{2}$ și $y_{F'}=\dfrac{y_C+y_F}{2}$, deci $7=\dfrac{x_C+4}{2}, 33=\dfrac{y_C+18}{2} \iff C(10,48)$. Fie M mijlocul lui AB. Avem $x_M=\dfrac{x_A+x_B}{2}$ și $y_M=\dfrac{y_A+y_B}{2}$, deci $x_M=\dfrac{x_B+1}{2}, y_M=\dfrac{y_B+3}{2}$(1). De asemenea, E este mijlocul lui MA și avem $x_E=\dfrac{x_M+x_A}{2}, y_E=\dfrac{y_M+y_A}{2}$ adică $x_M+x_A=6, y_M+y_A=12 \Rightarrow M(5,9)$, de unde rezultă $B(9,15)$. Cum G este centru de greutate în $\triangle ABC$, $x_G=\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3}, y_G=\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3} \iff x_G=\dfrac{1+10+9}{3}, y_G=\dfrac{3+48+15}{3} \iff G\left(\dfrac{20}{3},22\right)$.

635. În $\triangle ABC$ avem $(DE),(DF)$ și (FE) linii mijlocii, deci $\mathcal{A}_{\triangle DEF}=\dfrac{1}{4}\cdot\mathcal{A}_{\triangle ABC}$.

Avem $\mathcal{A}_{\triangle DEF}=\dfrac{1}{2}|\Delta|$, unde $\Delta=\begin{vmatrix} x_D & y_D & 1\\ x_E & y_E & 1\\ x_F & y_F & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1\\ -2 & 5 & 1\\ 1 & 4 & 1\end{vmatrix}=10-8+1-5+2-8=-8$, deci $\mathcal{A}_{\triangle DEF}=4 \Rightarrow \mathcal{A}_{\triangle ABC}=16$.

636. Realizăm schimbarea de variabilă $t=\sin x, \mathrm{d}t=\cos x\mathrm{d}x$. Capetele de integrare vor fi 0, $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ și integrala devine $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{dt}{4t^2+1} = \frac{1}{4}\int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{dt}{t^2+\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}\cdot 2\operatorname{arctg} 2x\Big|_0^{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$.

637. Observăm că $f(0) = 1$, deci $A \in Gf$. Panta dreptei AB este $m_{AB} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{7-1}{2-0} = 3$. Cum AB este tangentă la Gf în A, avem $f'(0) = m_{AB} = 3$. $f'(x) = \dfrac{(x^2+ax+1)'(\sqrt{x^2+1}) - (x^2+ax+1)(\sqrt{x^2+1})'}{x^2+1} = \dfrac{x^3+x+a}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$, deci $f'(0) = a = 3$.

638. Fie $M = AC \cap BD$. Cum $ABCD$ paralelogram, M este mijlocul lui AC, deci avem $x_M = \dfrac{x_A + x_C}{2}, y_M = \dfrac{y_A + y_C}{2} \iff x_M = \dfrac{2+7}{2}, y_M = \dfrac{1+2}{2} \Rightarrow M\left(\dfrac{9}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$. Evident, cum M este și mijlocul lui BD, înlocuim $x_M = \dfrac{x_B + x_D}{2}, y_M = \dfrac{y_B + y_D}{2}$, de unde obținem $D(5,0)$, deci $BD : \dfrac{x - x_B}{x_B - x_D} = \dfrac{y - y_B}{y_B - y_D} \iff BD : 4 - x = \dfrac{y-3}{3} \iff BD : 12 - 3x = y - 3 \iff BD : 3x + y = 15$.

639. Avem $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{1}{2} \iff 2\sin\alpha = \cos\alpha \iff 4\sin^2\alpha = \cos^2\alpha \Rightarrow 5\sin^2\alpha = 1 \iff \sin^2\alpha = \dfrac{1}{5}$ și cum $\sin\alpha < 0 \forall\alpha \in (\pi, 2\pi)$, avem $\sin\alpha = -\dfrac{\sqrt{5}}{5}$, deci $\cos^2\alpha = \dfrac{4}{5}$. Cum $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{2}$, obținem $\cos\alpha = -\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. Cum $\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$ și $\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$, obținem $\sin(2\alpha) = \dfrac{4}{5}, \cos(2\alpha) = \dfrac{3}{5}$.

640. Construim pătratul $AB'C'D$, unde B' este simetricul lui B față de A și D' este simetricul lui C față de D. Atunci vom avea $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = |\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{BC}|\cdot\cos(\widehat{BAD}) = 0$. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB'} = |\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AB'}|\cdot\cos(\widehat{BAB'}) = -1$. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC'} = |\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC'}|\cdot\cos(\widehat{BAC'}) = 1\cdot\sqrt{2}\cdot -\dfrac{\sqrt{2}}{2} = -1$. Fie C'' simetricul lui C față de B. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC''} = |\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC''}|\cdot\cos(\widehat{BAC''}) = 1\cdot\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 1$. Așadar, afirmația $\boxed{\text{A}}$ este singura afirmație adevărată.

641. Avem $S = b_1(2^{10} - 1) = 1023b_1$, deci $S \,\vdots\, 11$. Cum 1023 nu este pătrat perfect, singura variantă în care S ar putea fi pătrat perfect este atunci când b_1 are forma $1023k^2, k \in \mathbb{Z}$. Așadar, S ar avea forma $(1023k)^2$ și cum $1023 \,\vdots\, 31$, varianta $\boxed{\text{B}}$ este adevărată. Evident, cum 1023 este impar, produsul $1023b_1$ va fi: par, pentru b_1 par; impar, pentru b_1 impar; deci varianta $\boxed{\text{D}}$ este, de asemenea, adevărată.

642. Fie A matricea sistemului. Avem $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & a & 2 \end{vmatrix} = -4+a+3-2+6-a = 3 \neq 0$, deci $\boxed{\text{A}}$ este falsă și $\boxed{\text{B}}$ este adevărată. De aici deducem că sistemul este compatibil determinat, deci are soluție unică. Afirmația $\boxed{\text{C}}$ este, evident, falsă (se înlocuiește a în ultima ecuație din sistem). Soluțiile sistemului se pot determina folosind metoda lui Cramer și avem: $\begin{cases} x = \frac{\Delta x}{\det A} \\ y = \frac{\Delta y}{\det A} \\ z = \frac{\Delta z}{\det A} \end{cases}$, unde $\Delta x = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ a & -2 & 1 \\ -2 & a & 2 \end{vmatrix} = -4 - a^2 - 6 + 4 - 6a - a = -a^2 - 7a - 6$. $\Delta y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & a & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 2a - 2 + 1 + a + 2 + 2 = 3a + 3$ și $\Delta z = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & a \\ 1 & a & -2 \end{vmatrix} = 4 - a + 3a + 2 - 6 - a^2 = -a^2 + 2a$. Cum $\det A = 3$, avem $x + y + 2z = \dfrac{-a^2 - 7a - 6 + 3a + 3 - 2a^2 + 4a}{3} = \dfrac{-3a^2 - 3}{3} = -a^2 - 1 < 0$, care verifică afirmația $\boxed{\text{D}}$.

643. $x = \tau\sigma^{-1}$. Obținem $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Așadar, $x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Avem $x^2 = x \cdot x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. Deci, singura afirmație adevărată este $\boxed{\text{A}}$.

644. Funcția $f + g$ este rezultatul adunării a două funcții continue, deci este o funcție continuă. Putem exprima această funcție astfel: Pentru $x > 0$, $(f + g)(x) = 2x$ și pentru $x \leq 0, (f + g)(x) = 0$. Cum pentru $x \leq 0$ funcția este constantă, aceasta nu este monotonă pe $\mathbb{R}$. Pentru f vom verifica derivabilitatea în $x = 0$. $\lim\limits_{x \nearrow 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x \nearrow 0} \dfrac{-x - 0}{x} = -1$, iar $\lim\limits_{x \searrow 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x \searrow 0} \dfrac{x - 0}{x} = 1$, de unde deducem că f nu este derivabilă în $x = 0$, deci nu este derivabilă pe $\mathbb{R}$. Funcția $f \cdot g$ se poate exprima astfel: $f \cdot g(x) = \begin{cases} -x^2, & \text{dacă } x < 0 \\ x^2, & \text{dacă } x \geq 0. \end{cases}$ Așadar, $\lim\limits_{x \nearrow 0} \frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(0)}{x} = \lim\limits_{x \nearrow 0} \frac{-x^2 - 0}{x} = 0$, iar $\lim\limits_{x \searrow 0} \frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(0)}{x} = \lim\limits_{x \searrow 0} \frac{x^2 - 0}{x} = 0$, de unde deducem că $f \cdot g$ este derivabilă în $x = 0$.

645. Dacă $x = 2$ este asimptotă verticală pentru graficul lui f, avem $f(2) = 0$, deci $4a + 2b + 8 = 0 \iff 2a + b = -4$. De asemenea, dacă $x = -2$ este punct de extrem local, avem $f'(-2) = 0$. $f'(x) = \frac{ax^2 + bx + 8 - 2ax^2 - bx}{ax^2 + bx + 8} = \frac{-ax^2 + 8}{ax^2 + bx + 8}$. $f'(-2) = \frac{-4a + 8}{ax^2 + bx + 8} = 0 \Rightarrow a = 2$. Cum $2a + b = -4$ și $a = 2$, vom avea $a + b = -6$.

646. $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2 + mx}{e^x} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x + m}{e^x} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{2}{e^x} = 0$. Așadar, $y = 0$ este asimptotă orizontală pentru G_f la $+\infty$. Avem $f'(x) = (2x + m)e^{-x} - (x^2 + mx)e^{-x} = e^{-x}(-x^2 + (-m + 2)x + m)$. Deci, $f'(x) = 0 \iff -x^2 + (-m + 2)x + m = 0$. Discriminantul acestei ecuații este $\Delta = m^2 - 4m + 4 + 4m = m^2 + 4 > 0 \forall m \in \mathbb{R}$, deci f va avea exact două puncte de extrem local $\forall m \in \mathbb{R}$.

647. $\vec{u} \perp \vec{v} \iff 4(p + 5) + 2 \cdot 10 = 0 \iff 4p + 20 + 20 = 0 \iff p = -10$.

648. Avem $m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\frac{4\sqrt{3}}{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Cunoaștem faptul că $m_{AB} = \operatorname{tg} \alpha_{AB}$, unde α_{AB} este unghiul format de AB cu axa Ox și cum $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3} = 30°$, deducem că unghiul format de AC cu axa Ox poate fi: **Cazul I:** $\alpha_{AC} = \alpha_{AB} + m(\widehat{A}) = 90°$, deci $AC : x = 1$. **Cazul II:** $\alpha_{AC} = \alpha_{AB} - m(\widehat{A}) = -30°$. $\operatorname{tg}(-30°) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, deci $AC : y - 0 = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x - 1) \iff AC : 3y = -\sqrt{3}x + \sqrt{3} \iff AC : y + \sqrt{3}x = \sqrt{3}$.

649. Avem $A^3 = A \cdot A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ -24 & -21 & -8 \end{pmatrix}$. Avem $\det(A^3) = 8$, deci $\operatorname{Tr}(A^3) + \det(A^3) = -8 + 8 = 0$.

650. Pentru f, avem Relațiile lui Viéte: $\begin{cases} S_1 = x_1 + x_2 + x_3 = -1; \\ S_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 10; \\ S_3 = x_1x_2x_3 = -2. \end{cases}$ Notăm cu

S_0 expresia cerută. Avem: $S_0 = \dfrac{-1-(x_2+x_3)}{x_2+x_3} + \dfrac{-1-(x_1+x_3)}{x_1+x_3} + \dfrac{-1-(x_1+x_2)}{x_1+x_2} = -\Big(\dfrac{1}{x_2+x_3} + \dfrac{1}{x_1+x_3} + \dfrac{1}{x_1+x_2}\Big) - 3 = -\Big(\dfrac{1}{-1-x_1} + \dfrac{1}{-1-x_2} + \dfrac{1}{-1-x_3}\Big) - 3 = \dfrac{1}{1+x_1} + \dfrac{1}{1+x_2} + \dfrac{1}{1+x_3}\Big) - 3$. Aducem la numitor comun și obținem $S_0 = \dfrac{S_2+2S_1+3}{S_3+S_2+S_1+1} - 3 = \dfrac{11}{8} - 3 = -\dfrac{13}{8}$.

651. Aria căutată este $\mathcal{A} = \displaystyle\int_{-1}^{1} |f(x)|\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \frac{x^2}{e^x+1}\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} \frac{x^2}{e^x+1}\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} \frac{x^2}{e^x+1}\mathrm{d}x$. În prima integrală, pe intervalul $[-1,0]$, efectuăm schimbarea de variabilă $x = -x, \mathrm{d}x = -\mathrm{d}x$ și vom avea $\displaystyle\int_{1}^{0} \frac{(-x)^2}{e^{-x}+1}(-\mathrm{d}x)$. Cum x^2 este funcție pară, $(-x)^2 = x^2$ și integrala va deveni $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{x^2}{e^{-x}+1}\mathrm{d}x$. Revenind în calculul ariei, rămânem cu $\mathcal{A} = \displaystyle\int_{0}^{1} \frac{x^2}{e^{-x}+1}\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} \frac{x^2}{e^x+1}\mathrm{d}x = \int_{0}^{1} \frac{x^2(e^x+1)}{e^x+1}\mathrm{d}x = \int_{0}^{1} x^2\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$.

652. Notăm $t = \dfrac{1}{x}$ și limita devine $L = \lim\limits_{t\to 0}(1-\cos t)^{1/-\ln t} = \lim\limits_{t\to 0}(1-\cos t)^{-1/\ln t}$. Folosim identitatea $1 - \cos x = 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$ și obținem $L = \lim\limits_{t\to 0}\left(2\sin^2\left(\dfrac{t}{2}\right)\right)^{-1/\ln t}$. Calculând $\ln L$, avem $\ln L = \lim\limits_{t\to 0} -\dfrac{1}{\ln t} \cdot \ln\left(2\sin^2\left(\dfrac{t}{2}\right)\right) = \ln \lim\limits_{t\to 0} -\dfrac{1}{\ln t} \cdot \left(\ln 2 + 2\ln\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)\right)$. Cum $t \to 0$, avem limita remarcabilă $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t} = 1$ care este valabilă și pentru $\dfrac{t}{2}$ și rămânem cu $\ln L = \ln \lim\limits_{t\to 0} -\dfrac{1}{\ln t} \cdot \left(\ln 2 + 2\ln\left(\dfrac{t}{2}\right)\right) = \lim\limits_{t\to 0} -\dfrac{1}{\ln t} \cdot (2\ln t - \ln 2) = \lim\limits_{t\to 0} -\dfrac{2\ln t}{\ln t} + \dfrac{\ln 2}{\ln t} = -2$. Deci, $L = e^{-2} = \dfrac{1}{e^2}$.

653. $f(\log_2 3) = 4^{\log_2 3} - 2^{\log_2 3+1} = 2^{2\log_2 3} - 2^{\log_2 3+\log_2 2} = 2^{\log_2 9} - 2^{\log_2 6}$. Cum $a^{\log_a x} = x, \forall a \in \mathbb{R}_+^*$, avem $f(\log_2 3) = 9 - 6 = 3$.

654. $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x}\Big(\sqrt{x+3} - \sqrt{x+1}\Big) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x}(\sqrt{x+3}-\sqrt{x+1})(\sqrt{x+3}+\sqrt{x+1})}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x+1}}$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{\sqrt{x}}(x+3-x-1)}{\cancel{\sqrt{x}}\Big(\sqrt{1+\frac{3}{x}} + \sqrt{1+\frac{1}{x}}\Big)} = \frac{2}{2} = 1.$$

655. Avem $AB \parallel CD$ și $AD \parallel BC$, așadar $AB = CD = 1$ și $BC = AD = 2$, de unde rezultă imediat că afirmația $\boxed{\text{A}}$ este falsă, iar afirmația $\boxed{\text{B}}$ adevărată. În $\triangle ABC$, avem $AB = 1, BC = 2$ și $m(\widehat{B}) = \dfrac{\pi}{3}$. Teorema cosinusului $\Rightarrow AC^2 = BC^2 + AB^2 - 2 \cdot BC \cdot AB \cdot \cos B \iff AC^2 = 3$, deci $AC = \sqrt{3}$. Analog, pentru BD, aplicăm Teorema cosinusului în $\triangle BCD$, unde $BC = 2, CD = 1$ și $m(\widehat{C}) = \dfrac{2\pi}{3}$ și obținem $BD = \sqrt{7}$.

656. Numărul submulțimilor lui A cu $(n-2)$ elemente este $C_n^{n-2} = C_n^2 = \dfrac{n(n-1)}{2}$, deci avem $\dfrac{n(n-1)}{2} = 10 \iff n^2 - n - 20 = 0$. Cum $n > 0 \Rightarrow n = 5$, așadar $n \in (2, 6]$.

657. Scriem ecuația ca $2^{2x} - 2^x \cdot 5^x \cdot 5 = 6 \cdot 5^{2x}$. Notăm $2^x = a > 0$ și $5^x = b > 0$ și rămânem cu $a^2 - 5ab - 6b^2 = 0 \iff a^2 + ab - 6ab - 6b^2 = 0 \iff a(a+b) - 6b(a+b) = 0 \iff (a-6b)(a+b) = 0$. Avem, așadar:

Cazul I: $a - 6b = 0 \iff a = 6b$, deci $2^x = 6 \cdot 5^x \iff x = \log_2\left(6 \cdot 5^x\right) \iff x = \log_2 6 + x \cdot \log_2 5 \iff x = 1 + \log_2 3 + x \cdot \log_2 5 \iff x = \frac{1+\log_2 3}{1-\log_2 5}$ (1).

Cazul II: $a + b = 0 \iff 2^x = -5^x$, evident imposibil. (2)

Așadar, (1) și (2) implică afirmațiile $\boxed{\text{B}}$ și $\boxed{\text{D}}$.

658. Fie $E' \in (AB)$ astfel încât E - mijlocul lui AE'. Avem $x_E = \dfrac{x_A + x_{E'}}{2}$ și $y_E = \dfrac{y_A + y_{E'}}{2}$, deci $3 = \dfrac{1 + x_{E'}}{2}, 6 = \dfrac{3 + y_{E'}}{2} \iff E'(5,9)$. De asemenea, observăm că E' este mijlocul lui BE, așadar avem $x_{E'} = \dfrac{x_B + x_E}{2}$ și $y_{E'} = \dfrac{y_B + y_E}{2}$, deci $5 = \dfrac{x_B + 3}{2}, 9 = \dfrac{y_B + 6}{2} \iff B(7,12)$. Fie M mijlocul lui AC. Avem $x_M = \dfrac{x_A + x_C}{2}$ și $y_M = \dfrac{y_A + y_C}{2}$, deci $x_M = \dfrac{x_C + 1}{2}, y_M = \dfrac{y_C + 3}{2}$(1). De asemenea, F este mijlocul lui MC și avem $x_F = \dfrac{x_M + x_C}{2}, y_F = \dfrac{y_M + y_C}{2}$ adică $x_M + x_C = 8, y_M + y_C = 36$. Înlocuind cu rezultatele din (1), obținem $\dfrac{x_C + 1}{2} + x_C = 8, \dfrac{y_C + 3}{2} + y_C = 36$, deci $3x_C + 1 = 16, 3y_C + 3 = 72 \iff C(5,23)$. Cum G este centru de greutate în $\triangle ABC$, $x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3}, y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} \iff x_G = \dfrac{1+7+5}{3}, y_G = \dfrac{3+12+23}{3} \iff G\left(\dfrac{13}{3}, \dfrac{38}{3}\right)$.

659. În $\triangle ABC$ avem $(DE), (DF)$ și (FE) linii mijlocii, deci $\mathcal{A}_{\triangle DEF} = \dfrac{1}{4} \cdot \mathcal{A}_{\triangle ABC}$.

Avem $\mathcal{A}_{\triangle DEF} = \dfrac{1}{2}|\Delta|$, unde $\Delta = \begin{vmatrix} x_D & y_D & 1 \\ x_E & y_E & 1 \\ x_F & y_F & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ -4 & 4 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 8 + 30 - 24 + 20 - 2 = 20$, deci $\mathcal{A}_{\triangle DEF} = 10 \Rightarrow \mathcal{A}_{\triangle ABC} = 40$.

660. Efectuăm schimbarea de variabilă $t = \cos x$, $\mathrm{d}t = -\sin x \mathrm{d}x$. Noile capete de integrare devin $t = 1$, respectiv $t = 0$ și avem $-\displaystyle\int_1^0 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \operatorname{arctg} t\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$.

661. Observăm că $f(0) = 1$, deci $A \in \mathrm{G}f$. Panta dreptei AB este $m_{AB} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{3-1}{-1-0} = -2$. Cum AB este tangentă la $\mathrm{G}f$ în A, avem $f'(0) = m_{AB} = -2$. $f'(x) =$

$1+a\left(xe^{-x^2}\right)' = 1+a\left(e^{-x^2}-2x^2e^{-x^2}\right)$, deci $f'(0)=1+a\left(e^0-2\cdot 0\cdot e^0\right)=-2 \iff 1+a=-2 \Rightarrow a=-3$.

662. Fie $M=AC\cap BD$. Cum $ABCD$ paralelogram, M este mijlocul lui AC, deci avem $x_M=\dfrac{x_A+x_C}{2}, y_M=\dfrac{y_A+y_C}{2} \iff x_M=\dfrac{-2+5}{2}, y_M=\dfrac{1+3}{2} \Rightarrow M\left(\dfrac{3}{2},2\right)$. Evident, cum M este și mijlocul lui BD, înlocuim $x_M=\dfrac{x_B+x_D}{2}, y_M=\dfrac{y_B+y_D}{2}$, de unde obținem $D(1,1)$, deci $BD:\dfrac{x-x_B}{x_B-x_D}=\dfrac{y-y_B}{y_B-y_D} \iff BD: x-2=\dfrac{y-3}{2} \iff BD: 2x-4-y+3=0 \iff BD: 2x-y-1=0$.

663. $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \iff \sin^2\alpha+\dfrac{1}{16}=1 \iff \sin^2\alpha=\dfrac{15}{16}$. Avem $\alpha\in(\pi,2\pi)$, deci $\sin\alpha<0$, de unde deducem $\sin\alpha=-\dfrac{\sqrt{15}}{4} \Rightarrow \boxed{\text{A}}$ este adevărată. Avem $\sin(2\alpha)=2\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{15}}{8}$, de unde $\boxed{\text{B}}$ este falsă. $\cos(2\alpha)=2\cos^2\alpha-1=-\dfrac{7}{8} \Rightarrow \boxed{\text{C}}$ este adevărată, iar $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\sqrt{15}$, deci $\boxed{\text{D}}$ este falsă.

664. $\vec{u}\parallel\vec{v} \iff \dfrac{2}{8}=\dfrac{p-1}{-3} \iff 8p-8=-6 \iff p=\dfrac{1}{4}$.

665. Avem $b_2=3b_1, b_3=9b_1, b_4=27b_1, b_5=81b_1$. Deci $S=b_1(1+3+9+27+81)=121b_1 \Rightarrow S \,\vdots\, 11$. De asemenea, $S=(11\sqrt{b_1})^2$ și cum $b_1\in\mathbb{Z}$, afirmația $\boxed{\text{B}}$ este adevărată. Fie $b_1=2k+1, k\in\mathbb{Z}$. Atunci, $S=121(2k+1)=242k+121$ și cum $242k$ este număr par, iar 121 impar, urmează că afirmația $\boxed{\text{D}}$ este și ea adevărată.

666. Fie A matricea sistemului. Avem $\det A=\begin{vmatrix}1&1&-1\\1&2&-1\\1&a&1\end{vmatrix}=2-a-1+2-1+a=2\neq 0$, deci $\boxed{\text{A}}$ este adevărată. De aici deducem că sistemul este compatibil determinat, deci are soluție unică. Afirmația $\boxed{\text{C}}$ este, evident, adevărată (se înlocuiește a în ultima ecuație din sistem). Soluțiile sistemului se pot determina folosind metoda lui Cramer și avem: $\begin{cases}x=\frac{\Delta x}{\det A}\\ y=\frac{\Delta y}{\det A}\\ z=\frac{\Delta z}{\det A}\end{cases}$, unde $\Delta x=\begin{vmatrix}a&1&-1\\0&2&-1\\1&a&1\end{vmatrix}=a^2+2a+1=(a+1)^2$. $\Delta y=\begin{vmatrix}1&a&-1\\1&0&-1\\1&1&1\end{vmatrix}=-2a$ și $\Delta z=\begin{vmatrix}1&1&a\\1&2&0\\1&a&1\end{vmatrix}=a^2-2a+1=(a-1)^2$. Cum $\det A=2$, avem $x+y+z=$

$\dfrac{(a+1)^2-2a+(a-1)^2}{2}$, care verifică afirmația $\boxed{\text{D}}$ dacă $a^2-a+1=0$, ecuație care nu are soluții reale (discriminantul este -3).

667. Într-un grup inversul unui element este unic. Avem $\sigma x=\tau \iff x=\sigma^{-1}\tau$. Reamintim că inversa unei permutări se determină citind permutarea de pe linia a doua înspre prima linie și obținem $\sigma^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}$, deci avem $x=\sigma^{-1}\tau=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}\cdot$ $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&3&2\end{pmatrix}$. Avem $x^2=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&3&2\end{pmatrix}$ $=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}$, de unde rezultă că afirmația $\boxed{\text{D}}$ este adevărată.

668. f este continuă și derivabilă pe $\mathbb{R}^*$ ca restricție de funcții elementare continue și derivabile. f derivabilă în $x=0 \Rightarrow f$ continuă în $x=0$, adică $f(0)=\lim_{x\searrow 0}f(x)=\lim_{x\nearrow 0}f(x)$. Avem $f(0)=1, \lim\limits_{x\searrow 0}f(x)=\lim\limits_{x\searrow 0}\mathrm{e}^{bx}+2\sin x=1+0=1$. $\lim\limits_{x\nearrow 0}f(x)=\lim\limits_{x\nearrow 0}\dfrac{\sin(ax)}{x}=\lim\limits_{x\nearrow 0}\dfrac{\sin(ax)}{ax}a=a$, de unde deducem $a=1$. De asemenea, f este derivabilă în $x=0 \iff \lim\limits_{x\nearrow 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\searrow 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$. $\lim\limits_{x\nearrow 0}\dfrac{\frac{\sin x}{x}-1}{x}=\lim\limits_{x\nearrow 0}\dfrac{\sin x-x}{x^2}\overset{\text{l'H}}{=}$ $\lim\limits_{x\nearrow 0}\dfrac{\cos x-1}{2x}\overset{\text{l'H}}{=}\lim\limits_{x\nearrow 0}\dfrac{-\sin x}{2}=0$. $\lim\limits_{x\searrow 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\searrow 0}\dfrac{\mathrm{e}^{bx}+2\sin x-1}{x}$ $\overset{\text{l'H}}{=}\lim\limits_{x\searrow 0}\dfrac{\mathrm{e}^{bx}\cdot b+2\cos x}{1}=b+2$, de unde deducem $b+2=0$, adică $b=-2$. Deci, $a+b=-1$.

669. Punctele de extrem local la distanța 1 față de axa Oy pot fi doar $x=1$ sau $x=-1$. Avem $f'(x)=\dfrac{x^3+2x+a}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}\forall x\in\mathbb{R}$. Deci, $f'(1)=0 \iff a=-3, f'(-1)=0 \iff$ $a=3$, de unde rezultă varianta $\boxed{\text{A}}$.

670. Avem $f'(x)=x\sin x$, deci $f'(x)=0 \iff x=-\pi, x=0$ sau $x=\pi$. Cum $f'(x)>0$ pe $(-\pi,0)$, dar și pe $(0,\pi)$, $x=0$ **nu** este punct de extrem local pentru f, iar f este strict crescătoare pe $[-\pi,\pi]$. Avem $f^{''}(x)=\sin x+x\cos x$, deci $f^{''}(x)=0 \iff x=0$. $f^{''}(x)<0$ pe $[-\pi,0]$ și $f^{''}(x)>0$ pe $[0,\pi]$, de unde deducem $x=0$ punct de inflexiune.

671. Putem folosi faptul că toate triunghiurile create de vârfuri și centrul hexagonului (pe care îl vom nota cu O) sunt echilaterale. Avem astfel $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO}=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AO}|\cdot\cos(\widehat{BAO})=1\cdot\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$. Folosind doar laturile hexagonului avem $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AF} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{CD}| \cdot \cos\dfrac{2\pi}{3} = -\dfrac{1}{2}$. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OF} = |\overrightarrow{OC}| \cdot |\overrightarrow{OF}| \cdot \cos\pi = -1$.
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{ED} \cdot \overrightarrow{EF} = |\overrightarrow{ED}| \cdot |\overrightarrow{EF}| \cdot \cos\dfrac{2\pi}{3} = -\dfrac{1}{2}$.

672. Ecuația dreptei AB este $\dfrac{x - x_A}{x_B - x_A} = \dfrac{y - y_A}{y_B - y_A} \iff AB : \dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y}{2} \iff AB : y = \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{2}$. Avem $m_{AB} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow m_{CD} = \dfrac{1}{2}$, deci CD va avea ecuația de forma $y = \dfrac{1}{2}x + n \iff x - 2y + 2n = 0$. Cunoaștem $AB = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} \Rightarrow AD = \sqrt{20}$. De asemenea, AD este distanța de la A la latura CD și avem $AD = \dfrac{|1+2n|}{\sqrt{1+4}} = \dfrac{|2n+1|}{\sqrt{5}} = \sqrt{20} \Rightarrow |2n+1| = \sqrt{100} = 10$, deci $2n+1 = 10$ sau $2n+1 = -10$, adică $n = \frac{9}{2}$ sau $n = -\frac{11}{2}$.
Așadar, ecuația dreptei CD poate fi $CD : x - 2y + 9 = 0$ sau $CD : x - 2y - 11 = 0$.

673. Avem $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 4 & 10 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$, iar $\det(A^2) = 1 \cdot 4 \cdot 9 = 36$ și $\mathrm{Tr}(A^2) = 1 + 4 + 9 = 14$, deci valoarea expresiei cerute este 22.

674. Notăm $S_0 = \dfrac{x_2 + x_3}{x_1} + \dfrac{x_1 + x_3}{x_2} + \dfrac{x_1 + x_2}{x_3}$. Avem:

$$S_0 = \frac{x_2x_3(x_2 + x_3) + x_1x_3(x_1 + x_3) + x_1x_2(x_1 + x_2)}{x_1x_2x_3}$$
$= \dfrac{x_3(x_2^2 + x_1^2) + x_2(x_1^2 + x_3^2) + x_1(x_2^2 + x_3^2)}{x_1x_2x_3}$. Scriind Relațiile lui Viete, avem: $S_1 = x_1 + x_2 + x_3 = -1$, $S_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 6$, $S_3 = x_1x_2x_3 = -2$. Cum $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = S_1^2 - 2S_2 = 1 - 12 = -11$, avem $S_0 = \dfrac{x_3(-11 - x_3^2) + x_2(-11 - x_2^2) + x_1(-11 - x_1^2)}{-2}$
$= \dfrac{-11(x_1 + x_2 + x_3) - (x_1^3 + x_2^3 + x_3^3)}{-2}$. Cum x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile lui f, avem $f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) = 0$, adică $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 6S_1 + 6 = 0$, deci $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 11$. Revenind, rămânem cu $S_0 = \dfrac{-11S_1 - 11}{-2} = \dfrac{11 - 11}{-2} = 0$.

675. Aria căutată este $\mathcal{A} = \displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} |f(x)|\mathrm{d}x = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos x}{e^x + 1}\mathrm{d}x = \int_{-\pi/2}^{0} \frac{\cos x}{e^x + 1}\mathrm{d}x + \int_{0}^{\pi/2} \frac{\cos x}{e^x + 1}\mathrm{d}x$.

În prima integrală, pe intervalul $\left[-\dfrac{\pi}{2}, 0\right]$, efectuăm schimbarea de variabilă $x = -x, \mathrm{d}x = -\mathrm{d}x$ și vom avea $\displaystyle\int_{\pi/2}^{0} \frac{\cos(-x)}{e^{-x} + 1}(-\mathrm{d}x)$. Cum cos este funcție pară, $\cos(-x) = \cos(x)$ și integrala va deveni $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{e^{-x} + 1}\mathrm{d}x$. Revenind în calculul ariei, rămânem cu $\mathcal{A} =$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{e^{-x}+1}\mathrm{d}x + \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{e^x+1}\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x(e^x+1)}{e^x+1}\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \cos x \mathrm{d}x = \sin x\Big|_0^{\pi/2} = 1.$$

676. Reamintim criteriul radicalului pentru un șir (x_n) de numere pozitive, care e o consecință a lemei Stolz-Cesaro: dacă există $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$, atunci există $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}$ și $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$. Calculăm așadar $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+2)\ldots(2n+2)}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{(n+1)\ldots 2n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{4}{e}$.

677. Avem $f(1) = 1+1+1 = 3$ și $g(3) = 6+1 = 7$.

678. Avem $\Delta = m^2 - 4m = m \cdot (m-4)$, deci $\Delta < 0$ dacă și numai dacă $m \in (0,4)$.

679. Avem $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+2n} - n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n}{\sqrt{n^2+2n}+n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1} = 1.$

680. Mijlocul segmentului AC este punctul $D(2,-2)$. Lungimea medianei BD este $\sqrt{3^2+4^2} = 5$.

681. Vectorii sunt coliniari, dacă $\frac{2}{b} = \frac{a}{3} \Leftrightarrow a \cdot b = 6$, deci $\boxed{\text{B}}$ este adevărată. $a = 1, b = 6$ satisfac această relaţie, deci şi $\boxed{\text{A}}$ este adevărată. $\boxed{\text{C}}$ este condiţia perpendicularităţii, deci este falsă.

Din definiţia produsului scalar $\vec{x} \cdot \vec{y} = \sqrt{a^2+4} \cdot \sqrt{b^2+9} \cdot \cos(\widehat{\vec{x},\vec{y}})$. Dacă aceasta ar fi egală cu $\sqrt{a^2+4} \cdot \sqrt{b^2+9}$, atunci $\cos(\widehat{\vec{x},\vec{y}}) = 1 \Leftrightarrow m(\widehat{\vec{x},\vec{y}}) = 0 \Leftrightarrow \vec{x} \parallel \vec{y}$, deci şi $\boxed{\text{D}}$ este adevărată.

682. $a^2 = \left(\sqrt{2+\sqrt{3}} - \sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2 = 2+\sqrt{3} - 2\sqrt{(2+\sqrt{3})\cdot(2-\sqrt{3})} + 2 - \sqrt{3} = 4 - 2\sqrt{4-3} = 2$. a fiind număr pozitiv, răspunsul corect este $\boxed{\textbf{B}}$.

683. Avem $f(-2) = |-2|^3 = 8$ și $f(2) = 2 \cdot 2^2 = 8$. Pe de altă parte, $f(x) \geq 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$ și $\mathrm{Im} f = [0, +\infty)$, deci funcția nu este nici injectivă, nici surjectivă.

684. Observăm că şi punctul O se afă pe dreapta d. Atunci dreapta d coincide cu dreapta ON. Deoarece triunghiul este dreptunghic în N, avem $ON \perp MN$. Rezultă că panta dreptei MN este $m_{MN} = -\frac{1}{m_d} = -2$, astfel ecuaţia dreptei MN este $y-4 = -2(x-3) \Leftrightarrow MN : 2x+y-10 = 0$. Punctul N se află pe dreptele d şi MN, astfel obţinem $N(4,2)$.

685. $f(\pi) = 3 \cdot (-1) + 1 = -2$.

686. $f(x) = 1 \Leftrightarrow 3\cos x + (2\cos^2 x - 1) = 1 \Leftrightarrow 2\cos^2 x - 1 + 3\cos x - 1 = 0$. Folosind notaţia

$\cos x = t$, obţinem ecuaţia: $2t^2 + 3t - 2 = 0$. Rezolvând ecuaţia avem $\Delta = 9 + 16 = 25$, iar $t_1 = -2$ şi $t_2 = \dfrac{1}{2}$. Ecuaţia $\cos x = -2$ nu are soluţii, iar ecuaţia $\cos x = \dfrac{1}{2}$ are două soluţii în domeniul lui f, adică în intervalul $[0, 2\pi]$. Acestea sunt $\{\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3}\}$. Deci avem 2 soluţii.

687. Aplicând de două ori regula lui L'Hôpital, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\ln(\sin x)}{(\pi - 2x)^2} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\operatorname{ctg} x}{-4(\pi - 2x)}$
$= \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{-1}{8\sin^2 x} = -\dfrac{1}{8}$.

688. Fie $w \in S$ și $|w| = |\overline{w}| = \sqrt{w \cdot \overline{w}} = r$. Din ecuația dată rezultă că $r^3 = |2+2i| = \sqrt{2^3}$, deci $r = \sqrt{2}$. Pe de altă parte, $\overline{w}\cdot w^2 = r^2 w = 2w$, de unde avem $2w = 2+2i$, deci singura soluție a ecuației date este $w = 1 + i$.

689. Determinantul sistemului este $(a-1)^2$, deci sistemul este compatibil determinat pentru $a \neq 1$ cu soluția $x = y = z = 0$ și compatibil nedeterminat pentru $a = 1$. Dacă $a = 1$, adunând primele două ecuaţii constatăm că $2z = 0$, deci $z = 0$ indiferent de valoarea lui a.

690. Aplicăm teorema sinusurilor: $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R \Leftrightarrow \dfrac{2}{\sin A} = \dfrac{\sqrt{6}}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2\sqrt{2}$. De aici avem $\sin A = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin B = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Triunghiul fiind ascuţitunghic obţinem că $A = 45°$; $B = 60°$, deci $C = 75°$.

691. Sunt două drepte care satisfac cerinţele problemei: prima este paralelă cu dreapta AB şi trece prin C, a doua trece prin mijlocul segmentului AB şi prin C. Panta dreptei AB este $m_{AB} = \frac{3-1}{2-6} = -\frac{1}{2}$. Deci ecuaţia primei drepte căutate este $y+1 = -\frac{1}{2}(x-3) \Leftrightarrow x + 2y - 1 = 0$. Mijlocul segmentului AB este $M(4, 2)$. Dreapta a doua este dreapta $MC : \dfrac{x-3}{4-3} = \dfrac{y+1}{2+1} \Leftrightarrow x - 3 = \dfrac{y+1}{3} \Leftrightarrow 3x - y - 10 = 0$.

692. Cum AD este bisectoarea unghiului $\widehat{BAC}$, conform teoremei bisectoarei rezultă că $\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{AB}{AC} \Rightarrow BD = \dfrac{6}{5}DC \Rightarrow \overrightarrow{BD} = \dfrac{6}{5}\overrightarrow{DC}$. Atunci $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = \dfrac{6}{5}\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}\right) \Rightarrow \dfrac{11}{5}\overrightarrow{AD} = \dfrac{6}{5}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}$. Deci, $\overrightarrow{AD} = \dfrac{5}{11}\overrightarrow{AB} + \dfrac{6}{11}\overrightarrow{AC}$.

693. Cu schimbarea de variabilă $\cos x = t$, se obţine $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \sin x \cdot \ln(\cos x)\,\mathrm{d}x = \int_{1/2}^{1} \ln t\,\mathrm{d}t = (t\ln t - t)\Big|_{1/2}^{1} = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}$, deci răspunsul corect este $\boxed{\text{A}}$.

694. Primul număr cu patru cifre este 1000 și ultimul 9999, deci în total sunt 9999 −

$1000+1 = 9000$ astfel de numere. Deoarece dintre trei numere consecutive exact unul este divizibil cu 3, rezultă că sunt exact $\dfrac{9000}{3}$ de numere din mulțimea S care sunt divizibile cu 3.

695. Operația este comutativă deoarece $x + y + |x - y| = y + x + |y - x|$. Pe de altă parte $(1 * 2) * 3 = 1 + 2 + |1 - 2| + 3 + |1 + 2 + |1 - 2| - 3| = 7 + 1 = 8$ și $1 * (2 * 3) = 1 + 2 + 3 + |2 - 3| + |1 - (2 + 3 + |2 - 3|)| = 7 + |1 - 6| = 12$. Pentru $x = y = \dfrac{1}{4}$ avem $x * y = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} + 0 < 1$, deci $\boxed{\text{C}}$ este falsă. Deoarece $x * y > x$ pentru orice $x, y \in G$, operația nu admite element neutru.

696. Deoarece $\lim\limits_{x\searrow 0} f(x) = \lim\limits_{x\searrow 0} \dfrac{-\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\searrow 0} \dfrac{-\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0$, rezultă că afirmaţia $\boxed{\text{A}}$ este adevărată.

Deoarece $f'(x) = -1 - \ln x$ oricare ar fi $x \in (0, \infty)$, rezultă că afirmaţia $\boxed{\text{B}}$ este falsă, iar afirmaţia $\boxed{\text{C}}$ este adevărată.

Deoarece $f''(x) = -\dfrac{1}{x} < 0$ oricare ar fi $x \in (0, \infty)$, rezultă că afirmaţia $\boxed{\text{D}}$ este adevărată.

697. Tabelul de mai jos rezumă variaţia funcţiei f.

x	0			$1/\mathrm{e}$			∞
$f'(x)$	$\vert$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	
$f(x)$	$\vert_0$	$\nearrow$	$\nearrow$	$1/\mathrm{e}$	$\searrow$	$\searrow$	$-\infty$.

Deoarece $0 < \dfrac{1}{3} < \dfrac{1}{\mathrm{e}}$, rezultă că numărul soluţiilor ecuaţiei $f(x) = \dfrac{1}{3}$ este 2.

698. Ecuaţia tangentei la graficul lui f în punctul $(a, -a\ln a)$, $a \in (0, \infty)$ este $y + a\ln a = (-1 - \ln a)(x - a)$. Punând condiţia ca tangenta să treacă prin punctul $(0, 1)$, obţinem $a = 1$. Prin urmare, dreapta d are ecuaţia $d:\ y = -x + 1$. Rezultă de aici că afirmaţiile $\boxed{\text{A}}$ şi $\boxed{\text{C}}$ sunt adevărate, iar afirmaţiile $\boxed{\text{B}}$ şi $\boxed{\text{D}}$ sunt false.

699. Funcţia f este concavă, iar dreapta $d:\ y = 1 - x$ este tangentă la graficul lui f în punctul $(1, 0)$. Ţinând seama că graficul unei funcţii concave se găseşte sub tangenta la grafic în orice punct, rezultă că numărul real minim a pentru care $f(x) \leq a - x$ oricare ar fi $x \in (0, \infty)$ este $a = 1$.

Alternativ, studiind variaţia funcţiei $g(x) := x - x\ln x - a$ pe $(0, \infty)$, se arată că inegalitatea $g(x) \leq 0$ oricare ar fi $x \in (0, \infty)$ are loc dacă şi numai dacă $a \geq 1$.

700. Notând $a := \int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t$, avem $2f(-x)-f(x) = 6-3ax^2$ oricare ar fi $x \in [-1,1]$.(1) Punând $-x$ în locul lui x în relaţia (1), obţinem $2f(x)-f(-x) = 6-3ax^2$ oricare ar fi $x \in [-1,1]$.(2) Scăzând membru cu membru relaţiile (1) şi (2), găsim $f(-x) = f(x)$ oricare ar fi $x \in [-1,1]$. Această egalitate împreună cu (1) implică $f(x) = 6-3ax^2$ oricare ar fi $x \in [-1,1]$. Înlocuind în relaţia din enunţ, deducem că $6+6-3ax^2 = 12-6ax^2+3x^2(12-2a)$ oricare ar fi $x \in [-1,1]$, de unde $9a = 36$, deci $a = 4$. Drept urmare, avem $f(x) = 6-12x^2$ oricare ar fi $x \in [-1,1]$. Rezultă de aici că afirmaţia $\boxed{\text{A}}$ este falsă, iar afirmaţiile $\boxed{\text{B}}$, $\boxed{\text{C}}$ şi $\boxed{\text{D}}$ sunt adevărate.

701. Avem $f(1) = 1+3-2 = 2$ și $f(2) = 4+6-2 = 8$.

702. Avem $\Delta = (m+1)^2 - 4m = m^2+2m+1-4m = (m-1)^2$, deci $\Delta = 0$ dacă și numai dacă $m = 1$.

703. Panta dreptei căutate este egală cu panta dreptei d, adică cu $m_d = \frac{1}{3}$.

704. Vectorii sunt perpendiculari, dacă $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \Leftrightarrow a\cdot b + 1\cdot(-3) = 0 \Leftrightarrow a\cdot b - 3 = 0$, deci $\boxed{\text{A}}$, $\boxed{\text{B}}$ sunt adevărate. $\boxed{\text{C}}$ este falsă pentru că dacă $b = -3a$, atunci $\vec{v} = -3\vec{u}$, deci vectorii sunt paraleli. $\boxed{\text{D}}$ este tot falsă, pentru că din nou obţinem că $\vec{v} = -3\vec{u}$, adică vectorii sunt paraleli.

705. $a^2 = \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2 = 2+\sqrt{3}+2\sqrt{(2+\sqrt{3})\cdot(2-\sqrt{3})}+2-\sqrt{3} = 4+2\sqrt{4-3} = 6$. Cum $a > 0$, răspunsul corect este $\boxed{\textbf{A}}$.

706. Limita este o nedeterminare de tipul 1^∞, deci avem

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{2n-1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{2n-1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{2n-1}\right)^{\frac{2n-1}{2}}\right]^{\frac{2n}{2n-1}} = e.$$

707. Avem $f(-1) = (-1)^3 = -1$ și $f(1) = -1^2 = -1$. Pe de altă parte, $f(x) \le 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$ și $\mathrm{Im}f = (-\infty, 0]$, deci funcția nu este nici injectivă, nici surjectivă.

708. Coordonatele punctului P sunt de forma $(x,0)$ deoarece P este pe axa Ox. Astfel

$\mathcal{A}(MNP) = \dfrac{1}{2}|\Delta| = 10$, unde $\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ x & 0 & 1 \end{vmatrix} = |-4x - 12| = 2|2x+6|$. Deci $|2x+6| = 10$, de unde coordonatele punctului P pot fi $P_1(-8,0)$, $P_2(2,0)$.

709. $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + 0$.

710. $f(x) = 1 \Leftrightarrow \sin x + (1 - 2\sin^2 x) = 1 \Leftrightarrow \sin x(1 - 2\sin x) = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0$ sau $\sin x = \dfrac{1}{2}$. Ambele ecuaţii au câte două soluţii în domeniul lui f, adică în intervalul $[0, \pi]$. Acestea sunt $\left\{0, \pi, \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}\right\}$. Deci avem 4 soluţii.

711. Deoarece $\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{arctg} = \dfrac{\pi}{2}$, limita este o nedeterminare de tipul $\infty \cdot 0$. Putem scrie $L = \lim\limits_{x\to\infty} x \cdot \left(\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x}{\frac{1}{x}}$ şi aplicând regula lui l'Hospital obţinem $L = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = 1$.

712. Ecuația are sens dacă și numai dacă $x > 0$ și $x \neq \dfrac{1}{4}$. În acest caz, prin logaritmare putem transforma ecuația în una echivalentă: $\left(\dfrac{1}{1 + \log_4 x}\right) \log_4 x = \log_4 4 + 4\log_4 x$. Introducând notația $y = \log_4 x$, putem transcrie ecuația de mai sus în ecuația echivalentă $\dfrac{y}{1+y} = 1 + 4y$, de unde obținem ecuația de gradul doi $4y^2 + 4y + 1 = 0$, deci $y = -\dfrac{1}{2}$. Prin urmare, singura soluție a ecuației date este $x = 4^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}$.

713. Înmulțind ecuația a doua cu $\hat{2}$ și adunând rezultatul la prima ecuație, rezultă că $\hat{5}X = \begin{pmatrix} \hat{5} & \hat{5} \\ \hat{1} & \hat{6} \end{pmatrix}$. Observăm că $(\hat{5})^{-1} = \hat{3}$, prin urmare $X = \hat{3} \cdot \hat{5}X = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{1} \\ \hat{3} & \hat{4} \end{pmatrix}$ și $\det X = \hat{1}$. Pe de altă parte avem $Y = \hat{2}X - \begin{pmatrix} \hat{5} & \hat{1} \\ \hat{2} & \hat{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{2} \\ \hat{6} & \hat{1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \hat{5} & \hat{1} \\ \hat{2} & \hat{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{4} & \hat{1} \\ \hat{4} & \hat{2} \end{pmatrix}$, deci $\det Y = \hat{4}$. Prin urmare, $\det X \cdot \det Y = \hat{4}$.

714. Avem că $\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AD} = m\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = m(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) - \overrightarrow{AD} = m\overrightarrow{AB} + (m-1)\overrightarrow{AD}$ şi $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AD} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$. Punctele D, N şi M sunt coliniare dacă există $k \in \mathbb{R}^*$ astfel încât $\overrightarrow{DN} = k\overrightarrow{DM} \Leftrightarrow (m - \dfrac{3}{2}k)\overrightarrow{AB} = (1 - m - k)\overrightarrow{AD} \Leftrightarrow m = \dfrac{3}{2}k$ şi $1 - m - k = 0$. De aici obţinem $k = \dfrac{2}{5}$, iar $m = \dfrac{3}{5}$.

715. Observăm că $r_t = MA = MB = \sqrt{(t-1)^2 + 1}$.

Pentru $t = 0$, avem că $r_t = \sqrt{2}$, deci $\boxed{\text{A}}$ este adevărată.

Pentru $t = 1$, $r_t = 1 \notin (\sqrt{2}, \sqrt{10})$, deci $\boxed{\text{B}}$ este falsă.

Minimul razei r_t se realizează pentru $t = 1$, şi această valoare este 1. Deci $\boxed{\text{C}}$ este falsă.

Pentru $t = 2$, $r_t = MB = MA = \sqrt{2}$, iar $AB = 2$. Astfel din reciproca teoremei lui Pitagora rezultă că $\boxed{\text{D}}$ este adevărată.

716. Aplicăm teorema sinusurilor: $\dfrac{a}{\sin 45^\circ} = \dfrac{\frac{2\sqrt{2}\,c}{3}}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$. De aici obţinem că $\sin B = \dfrac{2c}{3a}$, adică $\boxed{\text{A}}$ este adevărată, şi $\sin C = \dfrac{\sqrt{2}c}{2a}$. Pe de altă parte $\sin C = \sin(180^\circ - (45^\circ + B)) = \sin(45^\circ + B) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\cos B + \sin B)$. Înlocuim în relaţia precedentă valorile obţinute din teorema sinusurilor pentru $\sin B$ şi $\sin C$, obţinem că $\dfrac{\sqrt{2}c}{2a} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos B + \dfrac{2c}{3a}\right)$, de unde $\cos B = \dfrac{c}{a} - \dfrac{2c}{3a} = \dfrac{c}{3a}$. Atfel, $\text{tg}B = \dfrac{\sin B}{\cos B} = 2$, deci $\boxed{\text{C}}$ este adevărată.

Altă soluţie pentru a calcula $\cos B$: aplicăm teorema cosinusului odată pentru unghiul A, adică $a^2 = c^2 + \left(\dfrac{2\sqrt{2}\,c}{3}\right)^2 - 2 \cdot c \cdot \dfrac{2\sqrt{2}\,c}{3}\cos 45^\circ \Leftrightarrow a^2 = c^2\left(1 + \dfrac{8}{9} - 2 \cdot \dfrac{2\sqrt{2}\,c}{3} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \Leftrightarrow a^2 = \dfrac{5}{9}c^2$. Pe urmă aplicăm aceeaşi teoremă pentru unghiul B, şi obţinem că $\left(\dfrac{2\sqrt{2}\,c}{3}\right)^2 = a^2 + c^2 - 2a \cdot c \cdot \cos B \Leftrightarrow \dfrac{8}{9}c^2 = \dfrac{5}{9}c^2 + c^2 - 2a \cdot c \cdot \cos B \Leftrightarrow -\dfrac{6}{9}c^2 = -2a \cdot c \cdot \cos B \Leftrightarrow \cos B = \dfrac{c}{3a}$.

717. Avem $\displaystyle\int_1^4 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{5-x}} = -2\sqrt{5-x}\Big|_1^4 = \boxed{2}$.

718. Primul număr cu patru cifre este 1000 și ultimul 9999, deci în total sunt $9999 - 1000 + 1 = 9000$ astfel de numere. Prin urmare S este format din $\frac{9000}{2} = 4500$ de perechi disjuncte de forma $(2k, 2k+1)$ şi din fiecare astfel de pereche exact un element este par, deci numărul elementelor pare din S este 4500.

719. Operația este comutativă deoarece $|x-y| = |y-x|$ şi $x+y = y+x$. Pe de altă parte $(1*2)*3 = \dfrac{\left|\frac{|1-2|}{1+2} - 3\right|}{\left|\frac{|1-2|}{1+2} + 3\right|} = \dfrac{\frac{8}{3}}{\frac{10}{3}} = \dfrac{8}{10} = \dfrac{4}{5}$ și $1*(2*3) = \dfrac{\left|1 - \frac{|2-3|}{2+3}\right|}{\left|1 + \frac{|2-3|}{2+3}\right|} = \dfrac{\frac{4}{5}}{\frac{6}{5}} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$. Pentru orice $x > y > 0$ avem $x - y < x + y$ și pentru orice $0 < x < y$ avem $y - x < x + y$, deci $|x-y| < x+y$ pentru orice $x, y \in (0, +\infty)$. De aici $\frac{|x-y|}{x+y} < 1$ pentru orice $x, y \in (0, +\infty)$. Din această inegalitate rezultă că operația nu poate să admită element neutru.

720. Deoarece $\lim\limits_{x \searrow 0} x \ln x = \lim\limits_{x \searrow 0} \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x \searrow 0} \dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0$, rezultă că $\lim\limits_{x \searrow 0} f(x) = 0 = f(0)$, deci afirmaţia $\boxed{\text{A}}$ este adevărată şi afirmaţia $\boxed{\text{B}}$ este falsă.

Deoarece $f'(x) = 2x \ln x(1 + \ln x)$ oricare ar fi $x \in (0, \infty)$, rezultă că $f'(x) > 0$ oricare ar fi $x \in \left(0, \frac{1}{\mathrm{e}}\right)$, deci afirmaţia $\boxed{\text{C}}$ este falsă. De asemenea, avem $f'(x) > 0$ oricare ar fi $x \in (1, \infty)$, deci afirmaţia $\boxed{\text{D}}$ este adevărată.

721. Tabelul de mai jos rezumă variaţia funcţiei f.

x	0			1/e			1			∞
$f'(x)$	0	+	+	0	−	−	0	+	+	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\nearrow$	1/e	$\searrow$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\nearrow$	$+\infty$.

Din tabel rezultă că numărul punctelor de extrem local ale lui f este 3 (punctele $0, 1/\mathrm{e}$ şi 1 sunt puncte de extrem local).

722. Pentru orice $x \in (0, \infty)$ avem $f''(x) = 2\left(\ln^2 x + 3\ln x + 1\right)$. Ecuaţia $t^2 + 3t + 1 = 0$ are două rădăcini reale distincte t_1 şi t_2. Drept urmare, ecuaţia $f''(x) = 0$ are rădăcinile $x_1 = \mathrm{e}^{t_1}$ şi $x_2 = \mathrm{e}^{t_2}$, ambele în $(0, \infty)$. Cum f'' îşi schimbă semnul în x_1 şi x_2, rezultă că numărul punctelor de inflexiune ale graficului lui f este $\boxed{2}$.

723. Ecuaţia dreptei d este $d: \; y - \mathrm{e}^2 = 4\mathrm{e}(x - \mathrm{e}) \quad \Leftrightarrow \quad y = 4\mathrm{e}x - 3\mathrm{e}^2$. Rezultă de aici că afirmaţiile $\boxed{\text{A}}$ şi $\boxed{\text{B}}$ sunt adevărate, iar afirmaţiile $\boxed{\text{C}}$ şi $\boxed{\text{D}}$ sunt false.

724. Avem $\displaystyle\int_{-\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)} \mathrm{d}x = \int_{-\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos\left(x + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)} \mathrm{d}x = \int_{-\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\cos\frac{\pi}{6}}{\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)} +$ $\displaystyle\frac{\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\sin\frac{\pi}{6}}{\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)} \mathrm{d}x = \cos\frac{\pi}{6} \cdot \ln\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\Big|_{-\pi/6}^{\pi/2} + \sin\frac{\pi}{6} \cdot x\Big|_{-\pi/6}^{\pi/2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \ln\frac{\sin\frac{5\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{6}} +$ $\displaystyle\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{3}$.

725. Avem $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2 - 3n + 1}{n^2 + 3n + 2}\right)^{n/3} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1 + \frac{-6n - 1}{n^2 + 3n + 2}\right)^{\frac{n^2+3n+2}{-6n-1}}\right]^{\frac{-6n-1}{n^2+3n+2}\cdot\frac{n}{3}} =$ $\displaystyle\mathrm{e}^{-2} = \frac{1}{\mathrm{e}^2}$.

726. Aplicând de două ori regula lui L'Hôpital, obţinem $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x - 1 - \operatorname{arctg} x}{x^2} =$ $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x - \frac{1}{x^2+1}}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x + \frac{2x}{(x^2+1)^2}}{2} = \frac{1}{2}$.

727. Tangenta la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x = 0$ are ecuaţia $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$. Avem $f'(x) = 3\mathrm{e}^{3x} + 2$, $f(0) = 2$ şi $f'(0) = 5$. Prin înlocuire obţinem

$y-2=5x$, adică $5x-y+2=0$.

728. Prin înlocuire directă în formulă obţinem: $y+1=3(x-1)$. Un calcul simplu ne conduce la ecuaţia dreptei, anume: $3x-y-4=0$.

729. Din ipoteză se deduce imediat că unghiul $A/2$ se află în cadranul 4, ceea ce înseamnă că sinusul este negativ şi cosinusul este pozitiv. Prin urmare, avem $\sin\frac{A}{2}=-\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}=-\frac{4}{5}$, în timp ce $\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}=\frac{3}{5}$, ceea ce înseamnă că afirmaţiile A şi B sunt adevărate, iar celelalte două sunt false.

730. Condiţia de paralelism a celor doi vectori se rescrie astfel: $\frac{1}{a}=\frac{-(a+2)}{-3}$. După prelucrare vom obţine: $a(a+2)=3$ sau $a^2+2a-3=0$. Această ecuaţie de gradul al II-lea, admite soluţiile $a=1$, respectiv $a=-3$.

731. Pentru $k\in\{0,1,\dots,1011\}$, coeficientul lui x^k din dezvoltarea binomului $(1+x)^{1011}$ este C_{1011}^k, deci suma coeficienților puterilor impare este $S=C_{1011}^1+C_{1011}^3+\cdots+C_{1011}^{1011}$. Din relația $C_n^k=C_n^{n-k}$ avem $S=\frac{1}{2}\left(C_{1011}^1+C_{1011}^{1010}+C_{1011}^3+C_{1011}^{1008}+\cdots+C_{1011}^{1011}+C_{1011}^0\right)$ $=\frac{1}{2}\left(C_{1011}^0+C_{1011}^1+\cdots+C_{1011}^{1011}\right)=\frac{1}{2}2^{1011}=2^{1010}$, unde am folosit $\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k=2^n$.

732. Termenii din sumă sunt în progresie aritmetică (a_n), cu primul termen $a_1=1$, raţia $r=4$ şi $x=a_n=a_1+(n-1)r$, unde $n\in\mathbb{N}^*$ este numărul de termeni din sumă. Fie S_n suma primilor n termeni ai progresiei aritmetice. Atunci $S_n=\frac{2a_1+(n-1)r}{2}\cdot n=2n^2-n$. Valoarea lui n se determină din ecuaţia $2n^2-2n=496$. Se obţine $n=16$, cealaltă rădăcină nefiind număr natural. Deci $x=a_{16}=1+(16-1)\cdot 4=61$.

733. *Soluţia 1.*: Din $(1-i)=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4})$ și $2022=8\cdot 252+6$ avem

$$(1-i)^{2022}=\sqrt{2}^{2022}\left(\cos\frac{2022\pi}{4}-i\sin\frac{2022\pi}{4}\right)=2^{1011}\left(\cos\frac{6\pi}{4}-i\sin\frac{6\pi}{4}\right)=2^{1011}i,$$

Soluţia 2.: Avem $(1-i)^{2022}=[(1-i)^2]^{1011}=(-2i)^{1011}=-2^{1011}i^{1011}$. Deoarece $1011=4\cdot 252+3$ avem $i^{1011}=(i^4)^{252}\cdot i^3=1^{252}\cdot(-i)=-i$ şi rezultă $(1-i)^{2022}=2^{1011}i$.

734. Cu schimbarea de variabilă $t=\sin x$, $\mathrm{d}t=\cos x\,\mathrm{d}x$ şi $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sqrt{\sin^2 x+1}}\,\mathrm{d}x=$ $\int_0^1\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\,\mathrm{d}t=\ln\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)\Big|_0^1=\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$.

735. Deoarece $m = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 2$ şi $n = \lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - 2x) = \lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2x} - x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+2x}+x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1} = 1$, rezultă că răspunsul corect este $\boxed{\mathbf{B}}$.

736. Sumă Riemann: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2}\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} + 2\mathrm{e}^{\frac{2}{n}} + \ldots + n\mathrm{e}^{\frac{n}{n}}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}(\frac{1}{n}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} + \frac{2}{n}\,\mathrm{e}^{\frac{2}{n}} + \ldots + \frac{n}{n}\,\mathrm{e}^{\frac{n}{n}}) = \displaystyle\int_0^1 x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$. Integrala se calculează cu formula integrării prin părţi: $\displaystyle\int_0^1 x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = x\mathrm{e}^x\Big|_0^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = (x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x)\Big|_0^1 = (x-1)\mathrm{e}^x\Big|_0^1 = 1$.

737. Conform proprietăţilor vectorilor avem $\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AE} = -3\,\overrightarrow{AD} + \dfrac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AE} = -(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) + \dfrac{3}{2}\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AD} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, deci $\overrightarrow{FE} = 3\,\overrightarrow{CE}$ sau echivalent, $\overrightarrow{FC} = 2\,\overrightarrow{CE}$, deoarece $\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{CE}$.

738. Avem $\sin(A-B) = \sin A\cos B - \sin B\cos A = \dfrac{a}{2R}\cdot\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca} - \dfrac{b}{2R}\cdot\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \dfrac{1}{4Rc}(2a^2-2b^2) = \dfrac{1}{2Rc}(a^2-b^2)$ și $\sin(A+B) = \sin C = \dfrac{c}{2R}$. Rezultă $\dfrac{\sin(A-B)}{\sin(A+B)} = \dfrac{a^2-b^2}{c^2}$. Ţinând cont de condiţia $a > b > c$ rezultă că variantele $\boxed{\text{A}}$, $\boxed{\text{B}}$ şi $\boxed{\text{D}}$ nu pot fi adevărate.

739. Din ipotezele problemei, deducem sistemul de ecuaţii $\begin{cases} \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ, \\ \widehat{A} + \widehat{C} = 2\widehat{B}. \end{cases}$. Din acest sistem rezultă imediat că $\widehat{B} = 60^\circ$.

Pe de altă parte, din teorema sinusurilor obţinem că $\dfrac{b}{\sin 60^\circ} = \dfrac{a}{\sin A}$, de unde $\sqrt{3}a = 2b\sin A$. Ridicând la pătrat, obţinem $3a^2 = 4b^2\sin^2 A$. Dar, conform ipotezei, $3a^2 = 2b^2$, deci din relaţia de mai sus deducem că $\sin A = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, deci $\widehat{A} = 45^\circ$, de unde rezultă că $\widehat{C} = 75^\circ$. Astfel, afirmaţiile A şi B sunt adevărate, în timp ce afirmaţiile C şi D sunt false.

Observaţie. Din condiţia $3a^2 = 2b^2$ rezultă $a < b$. Astfel după ce am obţinut $\widehat{B} = 60^\circ$, putem elimina C şi D deoarece $\widehat{A} < 60^\circ < \widehat{C}$. Cum A şi B sunt echivalente datorită egalităţii $\widehat{B} = 60^\circ$ şi există cel puţin un răspuns corect, A şi B sunt adevărate.

740. Notând $y = \sqrt[3]{x^2+a}$, ecuaţia devine $2y^2 - 3y - 2 = 0$. Aceasta are soluţiile $y_1 = 2$ şi $y_2 = -\dfrac{1}{2}$. Pentru $y_1 = 2$, avem $\sqrt[3]{x^2+a} = 2$, de unde $x^2 = 8 - a$, care are soluţie dacă şi numai dacă $a \leq 8$. Pentru $y_2 = -\dfrac{1}{2}$, avem $\sqrt[3]{x^2+a} = -\dfrac{1}{2}$, de unde $x^2 = -\frac{1}{8} - a$, care are soluţie dacă şi numai dacă $a \leq -\dfrac{1}{8}$.

741. Determinantul sistemului este $\Delta = -12 - 4a$. Sistemul este compatibil determinat dacă şi numai dacă $\Delta \neq 0$, adică $a \neq -3$. Deci

742. Dintre 11 copii arbitrul poate fi ales în $C_{11}^1 = 11$ moduri. Din cei 10 copii rămaşi echipa X de 5 jucători poate fi formată în $C_{10}^5 = 252$ moduri. După formarea echipei X rămân 5 copii care formează echipa Y. Deci 11 copii pot forma echipele X, Y şi arbitrul în $11 \cdot C_{10}^5 = 11 \cdot 252 = 2772$ moduri.

743. Din faptul că $f'(x) = \dfrac{2(x^2-1)}{x}$, oricare ar fi $x \in (0,\infty)$, se obţine că funcţia f este strict descrescătoare pe intervalul $(0,1]$ şi strict crescătoare pe intervalul $[1,\infty)$. De asemenea, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, de unde rezultă, în particular, că afirmaţia $\boxed{\mathbf{A}}$ este falsă. Punctul 1 este singurul punct de minim global al funcţiei f, iar $f(1) = 1 + m$ este valoarea minimă a funcţiei f. Dacă $m + 1 < 0$, atunci ecuaţia $f(x) = 0$ are exact două soluţii reale, deci afirmaţia $\boxed{\mathbf{B}}$ este adevărată. Funcţia f nu este injectivă pentru nicio valoare a lui m, prin urmare afirmaţia $\boxed{\mathbf{C}}$ este falsă. Avem $f(x) \geq 0$ oricare ar fi $x \in (0,\infty)$ dacă şi numai dacă $m + 1 \geq 0$, adică dacă şi numai dacă $m \geq -1$. Prin urmare, afirmaţia $\boxed{\mathbf{D}}$ este adevărată.

744. Din tabelul de variaţie al lui f rezultă că $f'(-1) = f'(1) = 0$. Cum $f'(x) = 3ax^2 + b$, avem $3a + b = 0$. Pe de altă parte, avem şi $f(-1) = -a - b + c = 10$, $f(1) = a + b + c = 2$. Rezolvând sistemul 3a+b=0-a-b+c=10a+b+c=2, se obţine $a = 2$, $b = -6$, $c = 6$, deci $|a| + |b| + |c| = 14$.

745. Din regula lui l'Hôpital: $\lim\limits_{x\searrow 0} \dfrac{\int_0^{x^2} \ln\left(1-\sqrt{t}\right) \mathrm{d}t}{x^3} = \lim\limits_{x\searrow 0} \dfrac{2x\ln(1-x)}{3x^2} = -\dfrac{2}{3}$.

746. Fie O centrul hexagonului. $\overrightarrow{AD} = 2 \cdot \overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{BE} = 2 \cdot \overrightarrow{OE}$, $\overrightarrow{CF} = 2 \cdot \overrightarrow{OF}$, $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OF}$. Rezultă $a = 1$, $b = -1$, deci $b - 2a = -3$. Răspuns corect $\boxed{\text{A}}$

747. Se calculează coordonatele punctului D prin $x_D = \dfrac{x_B + 2x_C}{1+2} = \dfrac{-1+2\cdot 2}{3} = 1$ şi $y_D = \dfrac{y_B + 2y_C}{2+1} = \dfrac{-5+2\cdot 1}{3} = -1$, deci obţinem $D(1,-1)$. Înălţimea din vârful B este perpendiculară pe dreapta AC cu pantă $m_{AC} = \dfrac{3-1}{1-2} = -2$, de unde panta înălţimii $m = -\dfrac{1}{m_{AC}} = \dfrac{1}{2}$. Înălţimea trece prin punctul $B(-1,-5)$, de aceea are ecuaţia $y+5 = \dfrac{1}{2}(x+1) \iff x-2y-9=0$. Distanţa de la punctul $D(1,-1)$ la dreapta $x-2y-9=0$ este $d = \dfrac{|1-2\cdot(-1)-9|}{\sqrt{1+(-2)^2}} = \dfrac{6}{\sqrt{5}} = \dfrac{6\sqrt{5}}{5}$.

748. După calcularea determinantului ecuaţia se poate scrie în forma $x^3-14x+20 = x^3-4x-10x+20 = (x-2)(x+2)x-10(x-2) = (x-2)(x^2+2x-10) = 0$, ceea ce ne conduce la $x=2$ sau $x^2+2x-10=0$, adică $x=-1+\sqrt{11}$ sau $x=-1-\sqrt{11}$.

749. Se observă uşor că $x=4k-1$, unde $k\in\mathbb{Z}$. Ecuaţia devine $\left[\dfrac{x+2}{3}\right] = \dfrac{x+1}{4} \iff \left[\dfrac{4k+1}{3}\right] = k$. Ultima identitate este echivalentă cu $k \le \dfrac{4k+1}{3} < k+1$, aşadar $-1 \le k < 2$. În acest caz $k\in\{-1,0,1\}$, deci $S=\{-5,-1,3\}$.

750. Avem $1*2=1$ şi $1*4=1$. Operaţia $*$ fiind comutativă, numărul $e\in\mathbb{Z}$ este element neutru dacă şi numai dacă pentru orice $x\in\mathbb{Z}$ avem $x*e = xe-x-e+2 = x$, adică $x(e-2)=e-2$. De aici rezultă că $e=2$ este element neutru. Un număr întreg x este simetrizabil în $(\mathbb{Z},*)$ dacă şi numai dacă există $x'\in\mathbb{Z}$ astfel încât $xx'-x-x'+2=2$, adică $x'(x-1)=x$. De aici rezultă că numai $x=0$ şi $x=2$ sunt simetrizabile în $\mathbb{Z}$.

751. Avem $f(x+y) = a(x+y)+b$ şi $f(x)\perp f(y) = ax+b+ay+b-1$, de unde obţinem $b=1$. Mai departe, avem $f(xy) = axy+1$ şi $f(x)*f(y) = (ax+1)+(ay+1)-(ax+1)(ay+1) = 1-a^2xy$, de unde obţinem $a^2+a=0$. Deoarece f este bijectivă, avem $a\neq 0$, deci $a=-1$.

752. Pentru orice $n\in\mathbb{N}$ avem $x^n \ge x^{n+1}\ \forall\, x\in[0,1]$, deci $I_n \ge I_{n+1}$. Aşadar, şirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este monoton descrescător.

Pentru orice $n\in\mathbb{N}$ avem $\mathrm{e}^{-x}\le 1\ \forall\, x\in[0,1] \implies 0\le I_n \le \displaystyle\int_0^1 x^n\mathrm{d}x = \dfrac{1}{n+1} \implies \lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$. Integrând prin părţi, $(n+1)I_n = x^{n+1}\mathrm{e}^{-x}\Big|_0^1 + \displaystyle\int_0^1 x^{n+1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-1} + I_{n+1}\forall\, n\in\mathbb{N}$. Ţinând cont de limita anterioară, $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n = \mathrm{e}^{-1}$. Relaţia anterioară poate fi rescrisă $\dfrac{I_n}{I_{n+1}} = \dfrac{\mathrm{e}^{-1}}{(n+1)I_{n+1}} + \dfrac{1}{n+1}\forall\, n\in\mathbb{N}$. Ţinând cont de limita anterioară, avem $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{I_n}{I_{n+1}} = 1$.

753. În paralelogramul $ABCD$ fie $AB=a$, $AD=b, (a>b)$, $BD=d_1$, $AC=d_2$,

$m\left(\widehat{BAD}\right) = \alpha$. Utilizând teorema cosinusului avem $d_1^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha, d_2^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha, \Rightarrow d_1^2 = 34 - 30\cos\alpha, d_2^2 = 34 + 30\cos\alpha$, de unde rezultă relatia $d_1^2 + d_2^2 = 2\left(a^2 + b^2\right) = 68$. Pe de altă parte $d_1^2 \cdot d_2^2 = 34^2 - 30^2 \cdot \cos^2\alpha$, deci $\cos^2\alpha = \dfrac{34^2 - 32^2}{30^2} = \dfrac{2 \cdot 66}{4 \cdot 15^2} = \dfrac{33}{15^2}$. Cum α este unghi ascuţit deducem $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{33}}{15}$.

754. Într-adevăr coordonatele (x, y) al punctului de intersecţie al dreptei d cu axa Ox reprezintă soluţia sistemului liniar $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} ax + c = 0 \\ y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -\dfrac{c}{a} \\ y = 0, \end{cases}$ iar coordonatele mijlocului M al segmentului $[M_1M_2]$ sunt $x_M = \dfrac{x_{M_1} + x_{M_2}}{2} = \dfrac{\frac{b-c}{a} - \frac{b+c}{a}}{2} = \dfrac{-\frac{2c}{a}}{2} = -\dfrac{c}{a}$ şi $y_M = \dfrac{y_{M_1} + y_{M_2}}{2} = \dfrac{0+0}{2} = 0$. Astfel $\boxed{\textbf{A}}$ este adevărată.

Panta dreptei d este $-\dfrac{a}{b} \neq 0$, deci d nu poate fi paralelă cu axa Ox, adică afirmaţia $\boxed{\textbf{B}}$ este falsă.

Coordonatele punctului de intersecţie al dreptei d cu axa Oy reprezintă soluţia sistemului liniar $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = -\dfrac{c}{b}, \end{cases}$ deci $\boxed{\textbf{C}}$ este adevărată.

$\mathcal{A}_{\Delta M_1M_2N} = |\Delta|$, unde $\Delta = \dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} \frac{b-c}{a} & 0 & 1 \\ -\frac{b+c}{a} & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{c}{b} & 1 \end{vmatrix}$. Dar $|\Delta| = \dfrac{1}{2} \cdot \left|\dfrac{c}{b}\right| \cdot \left|\left(\dfrac{b-c}{a} + \dfrac{b+c}{a}\right)\right| = \left|\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{c}{b} \cdot \dfrac{2b}{a}\right| = \left|\dfrac{c}{a}\right|$, deci $\boxed{\textbf{D}}$ este adevărată.

755. Avem $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\left(1 + \dfrac{-2n-3}{2n^2+3n+1}\right)^{\frac{2n^2+3n+1}{-2n-3}}\right]^{\frac{-2n-3}{2n^2+3n+1}(n+2)} = \mathrm{e}^{-1} = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

756. Aplicând regula lui L'Hôpital, obţinem $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^{x^2} - \cos x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x\mathrm{e}^{x^2} + \sin x}{2x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\mathrm{e}^{x^2} + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\sin x}{x}\right) = \dfrac{3}{2}$.

757. Avem $f(0) = 1$ şi $f'(x) = (x+2)e^x$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Ecuaţia tangentei în P la graficul lui f este $y - f(0) = f'(0)x$ adică $y = 2x + 1$. Prin urmare $Q \in d$ şi $S \notin d$.

758. Produsul scalar a doi vectori nenuli perpendiculari este 0. Deoarece trapezul este dreptunghic, avem $AB \perp AD$, $AD \perp DC$ şi de asemenea $AC \perp BD$, din condiţia dată.

759. Prin înlocuire directă în formulă obţinem: $y - 1 = 2(x - 1)$. Un calcul simplu ne conduce la ecuaţia dreptei, anume: $2x - y - 1 = 0$.

760. Din ipoteză se deduce imediat că unghiul $A/2$ se află în cadranul 3, ceea ce înseamnă că atât sinusul cât şi cosinusul este negativ. Prin urmare, avem $\sin\dfrac{A}{2} = -\sqrt{\dfrac{1-\cos A}{2}} = -\dfrac{4}{5}$, în timp ce $\cos\dfrac{A}{2} = -\sqrt{\dfrac{1+\cos A}{2}} = -\dfrac{3}{5}$, ceea ce înseamnă că afirmaţiile $\boxed{\mathbf{A}}$ şi $\boxed{\mathbf{B}}$ sunt adevărate, iar celelalte două sunt false.

761. Din $(1+i) = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$ și $2022 = 8\cdot 252 + 6$ avem $(1+i)^{2022} = \sqrt{2}^{2022}\left(\cos\dfrac{2022\pi}{4} + i\sin\dfrac{2022\pi}{4}\right) = 2^{1011}\left(\cos\dfrac{6\pi}{4} + i\sin\dfrac{6\pi}{4}\right) = -2^{1011}i$, deci partea imaginară este egală cu -2^{1011}.

Soluţia 2.: Avem $(1+i)^{2022} = ((1+i)^2)^{1011} = (2i)^{1011} = 2^{1011}(i^3)^{337} = 2^{1011}(-i)(-i)^{336} = 2^{1011}(-i)$, deci partea imaginară este egală cu -2^{1011}.

762. Inecuaţia $\log_9(5x+3) > \frac{1}{2}\log_3(x-1)$ este definită pe domeniul maxim $D = (1, +\infty)$, pe care putem efectua transformările echivalente

$$\frac{1}{2}\log_3(5x+3) > \frac{1}{2}\log_3(x-1) \overset{3>1}{\iff} 5x+3 > x-1 \iff 4x > -4 \iff x > -1,$$

adică $x \in (-1, +\infty) \cap D = (1, +\infty)$, arătând că răspunsul corect este doar cel de la punctul $\boxed{\mathrm{C}}$.

763.

Fie a_1 primul termen şi r raţia. Din cele două condiţii obţinem sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} 2a_1 + 7r = 16 \\ 19a_1 + 171r = 361. \end{cases}$$

Sistemul are soluţia $a_1 = 1$, $r = 2$, deci răspunsurile corecte sunt $\boxed{\text{A}}$ şi $\boxed{\text{B}}$.

764. Efectuăm schimbarea de variabilă $t = \cos^2 x$. Atunci $\mathrm{d}t = -2\cos x \sin x \,\mathrm{d}x$ şi $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t = \ln(1+t)\Big|_0^1 = \ln 2.$

765. Avem $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-(x^2+2x)}{x+\sqrt{x^2+2x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{-2x}{x+\sqrt{x^2+2x}} = -1.$

766. Calculăm limita şirului folosind integrala Riemann. Avem $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}\Big(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} + 2^2\mathrm{e}^{\frac{2}{n}} + \ldots + n^2\mathrm{e}^{\frac{n}{n}}\Big) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\Big(\Big(\frac{1}{n}\Big)^2\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} + \Big(\frac{2}{n}\Big)^2\mathrm{e}^{\frac{2}{n}} + \ldots + \Big(\frac{n}{n}\Big)^2\mathrm{e}^{\frac{n}{n}}\Big) = \int_0^1 x^2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$. Integrala se calculează cu formula integrării prin părţi: $\displaystyle\int_0^1 x^2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = x^2\mathrm{e}^x\Big|_0^1 - 2\int_0^1 x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = (x^2\mathrm{e}^x - 2x\mathrm{e}^x)\Big|_0^1 + 2\int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = (x^2\mathrm{e}^x - 2x\mathrm{e}^x + 2\mathrm{e}^x)\Big|_0^1 == (x^2-2x+2)\mathrm{e}^x\Big|_0^1 = \mathrm{e} - 2.$

767. Condiţia de paralelism a celor doi vectori se rescrie astfel: $\dfrac{a}{2} = \dfrac{1}{a+1}$. După prelucrare vom obţine: $a(a+1) = 2$ sau Această ecuaţie de gradul al II-lea, admite soluţiile $a = 1$, respectiv $a = -2$.

768. $\displaystyle\frac{1}{\sin^2 15^\circ} + \frac{1}{\cos^2 15^\circ} = \frac{1}{\sin^2 15^\circ \cos^2 15^\circ} = \frac{4}{\sin^2 30^\circ} = 16$. Deci $\boxed{\textbf{A}}$ este falsă iar $\boxed{\textbf{C}}$ este adevărată.

$\displaystyle\frac{1}{\sin^2 15^\circ} - \frac{1}{\cos^2 15^\circ} = \frac{\cos 30^\circ}{\sin^2 15^\circ \cos^2 15^\circ} = 8\sqrt{3}$. Deci $\boxed{\textbf{B}}$ este adevărată iar $\boxed{\textbf{D}}$ este falsă.

769. Din teorema sinusurilor avem $\dfrac{BC}{\sin A} = \dfrac{AC}{\sin B}$. Înlocuind, obţinem $\sin A = 2\sin B \sin\dfrac{A}{2}$. Aplicăm formula lui sin pentru argument dublu şi scoatem factorul comun. Astfel obţinem $2\sin\dfrac{A}{2}\left(\cos\dfrac{A}{2} - \sin B\right) = 0$. Cum $\hat{A}$ este unghi într-un triunghi, $\sin\dfrac{A}{2} \neq 0$, de unde $\cos\dfrac{A}{2} = \sin B$. Ţinând cont de $\cos\dfrac{A}{2} = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{A}{2}\right)$ şi de faptul că triunghiul este ascuţitunghic obţinem $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{A}{2} = B$, adică $A + 2B = \pi$. Dar cum $A + B + C = \pi$, obţinem $\hat{B} = \hat{C}$, deci $AB = AC$.

770. Notând $x^2 + x - 1 = y$, din condiţiile de existenţă pentru radicali avem $y \geq 0$, şi putem scrie ecuaţia dată în forma $\sqrt{y+4} + \sqrt{y} = 2$. De aici rezultă că $\sqrt{y+4} = 2 - \sqrt{y}$, de unde prin ridicare la pătrat obţinem ecuaţia $y+4=4-4\sqrt{y}+y$, adică $y=0$. Prin urmare, $x^2+x-1=0$, de unde rezultă că ambele soluţii sunt reale şi suma soluţiilor ecuaţiei din enunţ este -1.

Soluţia 2.: Putem scrie următoarele implicaţii: $\sqrt{x^2+x+3}+\sqrt{x^2+x-1}=2 \implies \frac{4}{\sqrt{x^2+x+3}-\sqrt{x^2+x-1}}=2 \implies \begin{cases} \sqrt{x^2+x+3}+\sqrt{x^2+x-1}=2 \\ \sqrt{x^2+x+3}-\sqrt{x^2+x-1}=2 \end{cases} \implies \begin{cases} \sqrt{x^2+x+3}=2 \\ \sqrt{x^2+x-1}=0 \end{cases}$ $\implies x^2+x=1 \implies$ suma soluțiilor este -1.

771. Determinantul sistemului este $\Delta=4-a$. Sistemul este compatibil determinat dacă şi numai dacă $\Delta\neq 0$, adică $a\neq 4$. Deci $\boxed{\text{A}}$ este adevărată. Sistemul Cramer are soluţia

$$\begin{cases} x=\Delta_1/\Delta=\frac{20-5a}{4-a}=5 \\ y=\Delta_2/\Delta=\frac{6a-24}{4-a}=-6 \\ z=\Delta_3/\Delta=\frac{0}{4-a}=0, \end{cases}$$

deci $\boxed{\text{B}}$ este falsă. Adunând cele 3 ecuaţii ale sistemului avem $(a-4)z=0$. Dacă $a\neq 4$, atunci sistemul este compatibil determinat. Dacă $a=4$, atunci doar 2 ecuaţii sunt independente şi se obţine imediat soluţia $x=5+z$, $y=-6+z$, $z\in\mathbb{R}$. Deci $\boxed{\text{C}}$ este adevărată, iar $\boxed{\text{D}}$ este falsă.

Alternativ, pentru a obţine răspunsurile $\boxed{\text{C}}$ şi $\boxed{\text{D}}$, se aplică Teorema Kronecker-Capelli pentru a arăta că sistemul este compatibil pentru orice $a\in\mathbb{R}$.

772. La volan poate fi aşezatâu a numai o persoană care deţine permis de conducere, deci una dintre cele 3 persoane. Pe cele 6 locuri rămase trebuie aşezate celelalte 4 persoane. Ele se pot aranja în $A_6^4=6\cdot 5\cdot 4\cdot 3=360$ moduri. În total persoanele pot fi aşezate în $3\cdot A_6^4=3\cdot 360=1080$ moduri.

773. Funcţia f este derivabilă în 0 deoarece $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=0\in\mathbb{R}$. Se observă uşor că f este strict crescătoare, deci este şi injectivă. Cum f este continuă, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ şi $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$, rezultă că f este surjectivă.

774. Din tabelul de variaţie al lui f rezultă că $f'(0)=f'(2)=0$. Cum $f'(x)=a-$

$\dfrac{c}{(x-1)^2}$, avem $a-c=0$. Pe de altă parte, avem şi $f(0)=b-c=-5$, $f(2)=2a+b+c=7$. Rezolvând sistemul

$$a-c=0 \qquad b-c=-5 \qquad 2a+b+c=7,$$

se obţine $a=c=3$, $b=-2$, deci $|a|+|b|+|c|=8$.

775. Se aplică regula lui l'Hôpital şi teorema fundamentală a calculului integral:

$$\lim_{x\searrow 0}\frac{\int_0^{x^2}\sin\sqrt{t}\,dt}{x^3}=\lim_{x\searrow 0}\frac{2x\sin x}{3x^2}=\frac{2}{3}.$$

776. Din teorema bisectoarei avem $k=\dfrac{CD}{BD}=\dfrac{AC}{AB}$. Deoarece $AC=\sqrt{25+144}=13$, $AB=\sqrt{9+16}=5$, obţinem $x_D=\dfrac{x_C+\frac{13}{5}x_B}{1+\frac{13}{5}}=\dfrac{43}{9}$ şi $y_D=\dfrac{y_C+\frac{13}{5}y_B}{1+\frac{13}{5}}=-\dfrac{20}{9}$.

$x_D+y_D=\dfrac{23}{9}$, deci răspunsul corect este $\boxed{\text{C}}$.

777. Cu notaţiile din enunţ, utilizândteorema cosinusului avem $d_1^2=a^2+b^2-2ab\cos\alpha, d_2^2=a^2+b^2+2ab\cos\alpha$, de unde rezultă relatia $d_1^2+d_2^2=2\left(a^2+b^2\right)$. Astfel sunt adevărate relaţiile de la punctul $\boxed{\text{A}}$ şi $\boxed{\text{D}}$.

778. $\boxed{\text{A}}$ Observăm că $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\cos\left(\dfrac{\pi}{2^{n+2}}\right)<1$ şi $x_n>0$ pentru fiecare $n\in\mathbb{N}, n\geq 2$. Aşadar $x_{n+1}<x_n$ pentru fiecare $n\in\mathbb{N}, n\geq 2$. $\boxed{\text{B}}$ $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ şi $x_2=\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\cdot\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. $\boxed{\text{C}}$ Calculăm $x_2=\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\cdot\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\dfrac{1}{2}(1+\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right))}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\dfrac{1}{2}(1+\dfrac{\sqrt{2}}{2})}=\dfrac{1}{2}\sqrt{1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$. Sau putem observa că $\sqrt{1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}}>1>x_2$. $\boxed{\text{D}}$ Fie

$n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Scriem succesiv

$$2^n x_n = 2\cos\left(\frac{\pi}{2^{1+1}}\right) \cdot 2\cos\left(\frac{\pi}{2^{2+1}}\right) \cdot \ldots \cdot 2\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right),$$

$$2^n x_n \sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) = 2\cos\left(\frac{\pi}{2^{1+1}}\right) \cdot 2\cos\left(\frac{\pi}{2^{2+1}}\right) \cdot \ldots \cdot \underbrace{2\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)},$$

$$2^n x_n \sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) = 2\cos\left(\frac{\pi}{2^{1+1}}\right) \cdot 2\cos\left(\frac{\pi}{2^{2+1}}\right) \cdot \ldots \cdot \underbrace{2\cos\left(\frac{\pi}{2^{n}}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2^{n}}\right)},$$

$$\ldots$$

$$2^n x_n \sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) = \underbrace{2\cos\left(\frac{\pi}{2^{1+1}}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2^{1+1}}\right)},$$

$$2^n x_n \sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Obţinem $2^n x_n \sin\left(\dfrac{\pi}{2^{n+1}}\right) = 1$ pentru fiecare $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

779. După calcularea determinantului putem scrie ecuaţia $f(x) = 0$ în forma $x^3 - 8x - 8 = x^3 - 4x - 4x - 8 = (x-2)(x+2)x - 4(x+2) = (x+2)(x^2 - 2x - 4) = 0$, ceea ce ne conduce la $x = -2$ sau $x^2 - 2x - 4 = 0$, adică $x = 1 + \sqrt{5}$ sau $x = 1 - \sqrt{5}$. Astfel, răspunsurile corecte sunt $\boxed{\text{A}}$ şi $\boxed{\text{B}}$.

780. Se observă uşor că $x = 3k - 1$, unde $k \in \mathbb{Z}$. Ecuaţia devine $\left[\dfrac{x+1}{2}\right] = \dfrac{x+1}{3} \Longleftrightarrow \left[\dfrac{3k}{2}\right] = k$. Ultima identitate este echivalentă cu $k \leq \dfrac{3k}{2} < k + 1$, aşadar $0 \leq k < 2$. În acest caz $k \in \{0, 1\}$, deci $S = \{-1, 2\}$ şi varianta $\boxed{\text{B}}$ este adevărată.

781. Avem $2 * 3 = 2$ şi $1 * 2 = 2$, deci $\boxed{\text{A}}$ este adevărată. Operaţia $*$ este comutativă, asociativă, $e = 3$ este element neutru, dar $2 * x = 2$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, deci 2 nu este simetrizabil. Prin urmare $\boxed{\text{C}}$ este adevărată, iar $\boxed{\text{D}}$ falsă. Submulţimea $[0, +\infty)$ nu este parte stabilă, deoarece, de exemplu, $1 * 5 = -1 \notin [0, +\infty)$, deci $\boxed{\text{B}}$ este falsă.

782. Fie $0 \neq a + bi\sqrt{2} \in R$, deci $a, b \in \mathbb{Z}$. Elementul $a + bi\sqrt{2} \in R$ este inversabil dacă şi numai dacă există $x + yi\sqrt{2} \in R$ astfel ca $(a + bi\sqrt{2})(x + yi\sqrt{2}) = 1$. Egalitatea este echivalentă cu $(ax - 2by) + (ay + bx)i\sqrt{2} = 1$ şi apoi cu sistemul $\begin{cases} ax - 2by = 1 \\ bx + \ \ ay = 0. \end{cases}$

Determinantul sistemului cu necunoscutele $x, y \in \mathbb{Z}$ este $a^2 + 2b^2 > 0$, deci este un sistem Cramer. Acesta are soluţii întregi dacă şi numai dacă $a^2 + 2b^2 = 1$, adică $a = \pm 1$ şi $b = 0$. Deci singurele elemente inversabile ale lui $(R, +, \cdot)$ sunt 1 şi -1, de unde rezultă valorile de adevăr de la răspuns.

Soluţia 2.: Elementul $z = a + bi\sqrt{2} \in R \setminus \{0\}$ este inversabil în corpul $(\mathbb{C}, +, \cdot)$, avînd inversul $z^{-1} = \dfrac{1}{a + bi\sqrt{2}} = \dfrac{a - bi\sqrt{2}}{a^2 + 2b^2} = \dfrac{a}{a^2 + 2b^2} - i \cdot \dfrac{b\sqrt{2}}{a^2 + 2b^2}$. Prin urmare, z este inversabil în R dacă şi numai dacă pentru $a, b \in \mathbb{Z}$, numerele $\dfrac{a}{a^2 + 2b^2}$ şi $\dfrac{b\sqrt{2}}{a^2 + 2b^2}$ sunt şi ele întregi, deci dacă şi numai dacă $b = 0$ şi $a = \pm 1$.

783. Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Din faptul că $0 \leq x^n \mathrm{e}^x \leq x^n \cdot \mathrm{e}$, oricare ar fi $x \in [0, 1]$, rezultă $0 \leq I_n \leq \displaystyle\int_0^1 x^n \cdot \mathrm{e}\, \mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{e}}{n+1}$. Aşadar $0 \leq I_n \leq \dfrac{\mathrm{e}}{n+1}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, de unde se obţine că $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$. Afirmaţia $\boxed{\mathbf{A}}$ este deci falsă şi $\boxed{\mathbf{B}}$ adevărată.

Folosind formula de integrare prin părţi, se obţine, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, egalitatea $I_{n+1} = \mathrm{e} - (n+1)I_n$, deci $nI_n = \mathrm{e} - I_n - I_{n+1}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$. Ţinând cont de faptul că $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$, prin trecere la limită cu $n \to \infty$ în egalitatea de mai sus, rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n = \mathrm{e}$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n > 2$. Afirmaţia $\boxed{\mathbf{C}}$ este deci falsă şi $\boxed{\mathbf{D}}$ adevărată.

784. $\boxed{\text{A}}$ **Fals.** $a \cdot (-1) + b \cdot 0 + c = c - a > 0$ şi $a \cdot 1 + b \cdot 0 + c > 0$, deoarece a este catetă iar c este ipotenuza unui triunghi dreptunghic.

$\boxed{\text{B}}$ **Adevărat.** Avem: $\operatorname{dist}(M, d) = \dfrac{\left| a \cdot \dfrac{b-c}{a} + b \cdot 0 + c \right|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \dfrac{|b - c + c|}{\sqrt{c^2}} = \dfrac{b}{c}$.

$\boxed{\text{C}}$ **Fals.** $a \cdot \dfrac{b-c}{a} + b \cdot 0 + c = b - c + c = b > 0$.

$\boxed{\text{D}}$ **Adevărat.** Avem: $\operatorname{dist}(E, d) \cdot \operatorname{dist}(F, d) = \dfrac{|a \cdot (-1) + b \cdot 0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \dfrac{|a \cdot 1 + b \cdot 0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

$= \dfrac{|c - a| \cdot |c + a|}{\sqrt{c^2} \cdot \sqrt{c^2}} = \dfrac{|c^2 - a^2|}{c^2} = \dfrac{b^2}{c^2}$.

785. $x_1^2, x_2, 1$ sunt în progresie geometrică $\iff x_2 = \sqrt{x_1^2 \cdot 1}$. Cum x_1 este pozitiv $\Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow a^2 = 12$ Cum x_1 și x_2 sunt pozitive suma lor va fi una pozitivă deci $a < 0 \Rightarrow a = -2\sqrt{3}$.

786. $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \dfrac{2n+1}{2n+2} < 1 \Rightarrow x_n$ este strict descrescător. Cum şirul este strict descrescător şi $x_n > 0 \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow x_n$ este mărginit. x_n este monoton si mărginit, deci convergent.

787. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}\right)^{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{-2\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}\right)^{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{-2\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}\right)^{\frac{x+\sqrt{x}}{-2\sqrt{x}}}\right]^{\frac{-2x}{x+\sqrt{x}}} =$

$\lim\limits_{x\to\infty} e^{\frac{-2x}{x+\sqrt{x}}} = e^{\lim_{x\to\infty}\frac{-2x}{x+\sqrt{x}}} = e^{-2}$.

788. Cum $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sin x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}-2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x\left(\frac{\sin x}{x}\right)x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}-2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}-2}$

$\overset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}} \overset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}} = 1$

789. Pentru ca doi vectori să fie coliniari, $\vec{u} = \alpha\vec{v}$. Cum $\vec{u} = -\vec{i}+3\vec{j}$ și $\vec{v} = 2\vec{i}-6\vec{j}$, $\vec{u} = -\frac{1}{2}\vec{v} \Rightarrow$ coliniari. $\boxed{\text{B}}$ este fals deoarece pentru $a=-2$ și $b=3$ cei doi vectori au aceeași lungime. $|\vec{u}| = \sqrt{a^2+3^2} = \sqrt{2^2+b^2} = |\vec{v}| \Rightarrow a = \sqrt{b^2-5}$, $b^2 > 5$. Astfel, pentru orice $b^2 > 5$ există un a astfel încât lungimea celor doi vectori este egală. Folosind condiția de perpendicularitate a doi vectori: $a\cdot 2 + 3\cdot b = 0 \Rightarrow 2a = -3b$.

790. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{u}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{u}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{ED}) = \overrightarrow{u}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}) = \frac{3}{2}\overrightarrow{u}+\frac{1}{2}\overrightarrow{v}$.

791. Prima condiție este ca logaritmii să fie corect definiți și $\lg(5x+11) \neq 0 \Rightarrow x \in \left(-\frac{11}{5},\infty\right) - \{-2\}$. Atunci, $\frac{2\lg(x+3)}{\lg(5x+11)} = 1 \iff 2\lg(x+3) = \lg(5x+11) \iff (x+3)^2 = 5x+11 \iff x^2+x-2=0 \iff x=1$.

792. $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 1 = \sqrt{(\sqrt{x-1}-2)^2}+\sqrt{(\sqrt{x-1}-3)^2} =$ $|\sqrt{x-1}-2)|+|\sqrt{x-1}-3|$ Dacă $\sqrt{x-1} \geq 3 \implies (\sqrt{x-1}-2)+(\sqrt{x-1}-3) = 1 \implies 2\sqrt{x-1}-5 = 1 \implies \sqrt{x-1} = 3 \implies x = 10$. Dacă $2 < \sqrt{x-1} < 3 \implies (\sqrt{x-1}-2)+(3-\sqrt{x-1}) = 1$ (adevărat) $\implies x \in (5,10)$. Dacă $\sqrt{x-1} < 2 \implies (2-\sqrt{x-1})+(3-\sqrt{x-1}) = 1 \implies 5-2\sqrt{x-1} = 1 \implies \sqrt{x-1} = 2 \implies x = 5$. Prin urmare, soluția finală este $[5,10]$.

793. Pentru a afla numărul de moduri în care putem alege două puncte distincte din $\mathcal{M}$, folosim $C_n^2 = \frac{n!}{2!\cdot(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$.

794. Determinantul sistemului este egal cu: $d = 2(a-2)^2 \Rightarrow$ pentru $a=2$, determinantul este egal cu 0. Pentru $a=2$, sistemul este compatibil nedeterminat, de unde rezultă faptul că admite mai multe soluții.

795. Cum x este în cadranul IV $\Longrightarrow$ $\sin x < 0$ și $\cos x > 0$ $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Longrightarrow \cos^2 x = 1 - a^2 \Longrightarrow \cos x = \sqrt{1-a^2}$; $\sin 2x = 2\sin x \cos x = 2a\sqrt{1-a^2}$; $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = (1-a^2) - a^2 = 1 - 2a^2$

796. $AB = \sqrt{20}$, $BC = \sqrt{10}$, $AC = \sqrt{10}$. Deci, triunghiul ABC este dreptunghic isoscel.

797. Drepte sunt paralele $\iff m_{d_1} = m_{d_2}; m_{d_1} = \dfrac{1-m}{3m-7}; m_{d_2} = \dfrac{2-m}{2m-5}$.

798. $m_{AH} = \dfrac{2-1}{3-0} = \dfrac{1}{3} \Longrightarrow m_{BC} = -3$.

799. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+2}{x} \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = 1$ $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - x) = \lim\limits_{x\to\infty} \left((x+2)\mathrm{e}^{1/x} - x\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \left(x(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - 1) + 2 \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)$. Luăm separat limita: $\lim\limits_{x\to\infty} x(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - 1) = \lim\limits_{x\to\infty} x \cdot \left(\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}}\right) \cdot \dfrac{1}{x} = \ln(\mathrm{e}) = 1$ Deci limita finală este $1 + 2 = 3$. $\Rightarrow y = x + 3$ este asimptotă.

800. Derivata lui $f(x)$ este: $f'(x) = \dfrac{\sqrt{1-x^2} + (x+a) \cdot \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}$ Ecuația tangentei în punctul de abscisă $x_0 = 0$ este: $y - f(0) = f'(0)[x - 0] \Longrightarrow y - f(0) = f'(0)x$ Dacă $f(0) = a$ și $f'(0) = 1$, atunci ecuația tangentei devine: $y - a = x \Longrightarrow y = x + a$ Cum punctul $(-2, 5)$ aparține dreptei, avem: $5 = -2 + a \Longrightarrow a = 7$ Deci, ecuația tangentei este: $y = x + 7$.

801. Notăm $3 - \cos 2x = t \Rightarrow 2\sin 2x\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \Rightarrow \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{3 - \cos 2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_2^4 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln 2$.

802. $I = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}^2} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ Notăm $\sqrt{x} = t$, de unde $\frac{1}{2}\sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$. Atunci, integrala devine: $I = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \ln(t^2) \cdot 2\,\mathrm{d}t = 4\int_1^{\mathrm{e}} \ln t\,\mathrm{d}t$ Folosim integrarea prin părți: $\displaystyle\int \ln t\,\mathrm{d}t = t\ln t - t$. Așadar: $I = 4\left[t\ln t - t\right]_1^{\mathrm{e}}$ Calculăm la limite: $I = 4\left[\mathrm{e}\ln\mathrm{e} - \mathrm{e} - (1\ln 1 - 1)\right] = 4\left[\mathrm{e} - \mathrm{e} + 1\right] = 4$ Prin urmare, valoarea integralei este $I = 4$.

803. Observăm că dacă înmulțim prima ecuație cu $\hat{2}$ rezultă cea de-a doua ecuație cu un rezultat diferit $(\hat{2}x + \hat{4}y = \hat{6} = \hat{1} \neq \hat{2})$. Sistemul nu are soluții.

804. Cum $x - [x]$ reprezintă partea fracționară a lui x, care aparține intervalului $[0, 1) \Rightarrow f(x)$ aparține intervalului $[-0.5, 0.5)$. Funcția este periodică, cu perioada 1, deoarece adăugând 1 la x, $x - [x]$ rămâne neschimbat. Totodată, funcția intersectează axa Ox atunci când $x - [x] = 0.5 \Rightarrow$ singurul răspuns corect este $\boxed{\text{C}}$.

805. Fie $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ în $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}) \Rightarrow X^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix}$. Rezolvând sistemul in $\mathbb{Z}$, obținem două soluții: $a = b = c = d = 1$ și $a = b = c = d = -1$.

806. $\dfrac{x_A + x_B + x_D}{3} = 2 \implies x_D = 4$; $\dfrac{y_A + y_B + y_D}{3} = 0 \implies y_D = -3$; Așadar, $D(4,-3)$. Ecuația dreptei AB este: $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y-2}{-1} \implies x + 2y - 4 = 0$ Distanța de la punctul $D(4,-3)$ la dreapta AB este: $d = \dfrac{|4 + 2(-3) - 4|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \dfrac{|4-6-4|}{\sqrt{5}} = \dfrac{6}{\sqrt{5}}$. Aria triunghiului ABD este: Aria $= \dfrac{d \cdot AB}{2} = 3$; Aria paralelogramului este $3 \cdot 2 = 6$.

807. Prin calcul obținem $(\cos\ a + \cos\ b)^2 + (\sin\ a + \sin\ b)^2 = \cos^2 x + \sin^2 x + \cos^2 y +$

$\sin^2 y + 2(\cos x \cos y + \sin x \sin y) = 2 + 2\cos(a-b)$.

Cum $2\cos^2 \dfrac{x}{2} = 1 + \cos x \Rightarrow 2\cos^2 \dfrac{a-b}{2} = 1 + \cos(a-b)$. Egalând cele două relații obținem: $2 + 2\cos(a-b) = 1 + \cos(a-b) \Leftrightarrow \cos(a-b) = 1 \Leftrightarrow a - b = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. (multiplii impari de π)

808. Aplicând Teorema sinusurilor în $\triangle ABC$, avem: $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$, deci $\dfrac{5}{\sin 45^\circ} = \dfrac{7}{\sin C} \Rightarrow \sin C = \dfrac{7\sqrt{2}}{10}$. Există 2 valori posibile pentru unghiul C: $\arcsin \dfrac{7\sqrt{2}}{10}$ și $180^\circ - \arcsin \dfrac{7\sqrt{2}}{10}$. Fie $\theta = \arcsin \dfrac{7\sqrt{2}}{10}$. Pentru primul triunghi, avem $B = 45^\circ, C = \theta, A = 135^\circ - \theta$, iar pentru cel de-al doilea triunghi, $B = 45^\circ, C = 180^\circ - \theta, A = -45^\circ + \theta$. Evident, având $\sin\theta = \dfrac{7\sqrt{2}}{10}, \theta > 45^\circ$ și $\theta < 135^\circ$, de unde deducem că afirmația $\boxed{\text{A}}$ este falsă, iar afirmația $\boxed{\text{B}}$ este adevărată. Având $\sin\theta = \dfrac{7\sqrt{2}}{10}$, deducem imediat $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{10}$.
Pentru primul triunghi, $\sin A = \sin(135^\circ - \theta) = \sin 135^\circ \cos\theta - \sin\theta\cos 135^\circ = \Big(\dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{10}\Big) - \Big(-\dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{7\sqrt{2}}{10}\Big) = \dfrac{1}{10} + \dfrac{7}{10} = \dfrac{4}{5}$. Pentru cel de-al doilea triunghi, $\sin A = \sin(\theta - 45^\circ) = \sin\theta\cos 45^\circ - \sin 45^\circ \cos\theta = \Big(\dfrac{7\sqrt{2}}{10} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2}\Big) - \Big(\dfrac{\sqrt{2}}{10} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2}\Big) = \dfrac{7}{10} - \dfrac{1}{10} = \dfrac{3}{5}$.
Așadar, $\sin A \in \left\{\dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{5}\right\}$. Revenind în Teorema sinusurilor, $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$ și vom calcula latura a pentru fiecare dintre cele două triunghiuri. Mai întâi, $\sin A = \dfrac{4}{5}$, deci $a = \dfrac{\frac{4}{5} \cdot 5}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{8\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$. Apoi, $\sin A = \dfrac{3}{5}$, deci $a = \dfrac{\frac{3}{5} \cdot 5}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$, de unde rezultă că afirmația $\boxed{\text{D}}$ este și ea adevărată.

809. $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1} - m$ f este crescătoare $\Leftrightarrow f'(x) \geq 0\,\forall x;$ Notăm: $g(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$

Știm că:$-1 \leq g'(x) \leq 1$ Astfel: $-1-m \leq f'(x) \leq 1-m$. Pentru ca $f'(x) \geq 0$, trebuie ca: $-1-m \geq 0 \Rightarrow m \leq -1$.

810. $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 14 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$ Demonstrarea prin inducție că $A^n = \begin{pmatrix} 1 & x_n \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\operatorname{tr}(A^n) = 1 + 2^n$ și $\det(A^n) = 2^n$; Așadar, limita $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\operatorname{tr}(A^n)}{\det(A^n)} = 1$

811. $x * y = (x+a)(y+a) + 1 - a^2$, deci este comutativă. Dacă $*$ admite element neutru, atunci: $x * e = xe + ax + ae + 1 = x \Rightarrow e + a = 1, ae + 1 = 0 \Rightarrow a(1-a) + 1 = 0 \Rightarrow a^2 - a - 1 = 0; \Delta > 0 \Rightarrow$ a poate lua doua valori; $e = -\dfrac{1}{a}$;

812. Calculând derivatele de ordin unu, doi și trei: $f'(x) = e^x - e^{-x} - 2x$, $f''(x) = e^x + e^{-x} - 2$, $f'''(x) = e^x - e^{-x}$. Astfel, $f'(0) = f''(0) = 0 \Rightarrow \boxed{\text{A}}$ adevărată.

Pentru a verifica dacă $x = 0$ este punct de extem analizăm derivata a doua $f''(0) = 0$. Fiind zero, analizăm derivatele superioare: $f'''(x) = e^x - e^{-x}$, $f'''(0) = 0$ $f''''(x) = e^x + e^{-x}$, $f''''(0) = 2 > 0$ ceea ce indică un minim local la $x = 0 \Rightarrow \boxed{\text{B}}$ falsă.

Pentru a studia monotonia funcției f', observăm că $f''(x) = e^x + e^{-x} - 2$. Cum $e^x + e^{-x} \geq 2 \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f''(x) \geq \Rightarrow f'$ strict crescătoare $\Rightarrow \boxed{\text{C}}$ adevărată.

Cum $f''(x) = e^x + e^{-x} - 2 \geq \forall x$ și $\lim\limits_{x\to\infty} f''(x) = +\infty \Rightarrow \boxed{\text{D}}$ adevărată.

813. $I_{n+1} = \displaystyle\int_1^e (\ln x)^{n+1}\,\mathrm{d}x = \Big[x\,(\ln x)^{n+1}\Big]_1^e - (n+1)\int_1^e (\ln x)^n\,\mathrm{d}x = e - (n+1)I_n \Rightarrow I_{n+1} + (n+1)I_n = e$.Pentru $x \in [1, e]$, avem: $\ln(x) \in [0,1] \implies (\ln(x))^{n+1} < (\ln(x))^n \implies I_{n+1} < I_n;$ Din relația $I_{n+1} + (n+1)I_n = e$ obținem $I_n > \dfrac{e}{n+2}$ și $I_{n+1} < \dfrac{e}{n+2} \Rightarrow I_n < \dfrac{e}{n+1} \Rightarrow \dfrac{e}{n+2} < I_n < \dfrac{e}{n+1} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$ înmulțim cu n și obținem $\dfrac{ne}{n+2} < nI_n < \dfrac{ne}{n+1} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} nI_n =$ e;

814. Diagonalele pătratului se află pe axele de coordonate $\Rightarrow$ pătratul este rotit cu 45° față de axele x și y. Astfel, coordonatele varfurilor patratului se afla la $\left(\pm\dfrac{\alpha}{\sqrt{2}}, 0\right)$ și $\left(0, \pm\dfrac{\alpha}{\sqrt{2}}\right)$. Punctele cu coordonate întregi care se află în interiorul pătratului satisfac astfel: $|x| + |y| < \dfrac{\alpha}{\sqrt{2}}$. Pentru fiecare $k \in [1, \infty)$, există $4k$ puncte care satisfac $|x| + |y| = k$, datorită simetriei pătratului. Astfel numărul de puncte interioare pătratului este:

$\sum_{k=1}^{n} 4k = 2n(n+1)$, unde $n = \left[\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right] \Rightarrow N_\alpha = 2n(n+1)+1$ (datorită punctului din origine).
Pentru $\alpha = 3 \Rightarrow n = \left[\frac{3}{\sqrt{2}}\right] = 2 \Rightarrow N_3 = 4 \cdot 3 + 1 = 13$. Pentru a verifica existența unui α pentru care $N_\alpha = 41$ sau $N_\alpha = 67$, rezolvăm $1 + 2n(n+1) = 41 \Rightarrow n(n+1) = 20, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow n = 4 \Rightarrow \alpha \in \{4\sqrt{2}, 5\sqrt{2}\}$, respectiv $1 + 2n(n+1) = 67 \Rightarrow n(n+1) = 33, n \in \mathbb{Z}$ deci nu avem soluții întregi.

815. Centrul de greutate G are coordonatele $(1, 2)$, iar ecuaţia dreptei OG este $y = 2x$, deci $\boxed{\text{C}}$ este adevărată.

816. Avem $\vec{v}(2, 4) \perp \vec{a}(-1, \frac{1}{2})$, dacă produsul scalar al celor doi vectori este zero: $\vec{v} \cdot \vec{a} = -2 + 4 \cdot \frac{1}{2} = 0$, deci $\boxed{\text{A}}$ este adevărată.

Vectorul $\vec{v}$ este paralel cu $\vec{b}(17, 19)$ sau $\vec{c}(-1, -1)$ dacă componentele lor sunt proporţionale: $\frac{t}{17} = \frac{t^2}{19} \Leftrightarrow t = \frac{19}{17}$ şi $\frac{t}{-1} = \frac{t^2}{-1} \Leftrightarrow t = 1$. Astfel $\boxed{\text{B}}$, $\boxed{\text{C}}$ sunt adevărate.
Vectorul $\vec{v}$ nu poate fi un multiplu de $\vec{d}(0, 1)$ deoarece $\lambda(t, t^2) = (0, 1)$ implică $t = 0$, deci $\boxed{\text{D}}$ este falsă.

817. Fie $C(x, y)$ cel de-al treilea vârf. Din formula pentru aria triunghiului obţinem $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -4 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \pm 4$ sau $x + 5y + 4 = \pm 8$. Dacă alegem semnul $+$ obţinem că cel de-al treilea vârf este pe dreapta $x + 5y - 4 = 0$, în timp ce, dacă alegem semnul $-$, el se află pe dreapta $x + 5y + 12 = 0$. Astfel, afirmaţiile $\boxed{\text{C}}$ şi $\boxed{\text{D}}$ sunt adevărate, în timp ce afirmaţiile $\boxed{\text{A}}$ şi $\boxed{\text{B}}$ sunt false.

818. Dreapta se intersectează cu axa Ox în $\left(\frac{2b}{a}, 0\right)$ şi cu axa Oy în punctul $\left(0, \frac{2b}{c}\right)$.
Triunghiul fiind dreptunghic, aria sa este egală cu semiprodusul catetelor, adică avem: $2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2b}{a} \cdot \frac{2b}{c} = \frac{2b^2}{ac}$, de unde obţinem $b^2 = ac$, adică numerele a, b, c sunt în progresie geometrică. La fel sunt şi numerele $a, -b, c$ (desigur, nu cu aceeaşi raţie!). Astfel, afirmaţiile $\boxed{\text{A}}$ şi $\boxed{\text{B}}$ sunt adevărate, în timp ce afirmaţiile $\boxed{\text{C}}$ şi $\boxed{\text{D}}$ sunt false.

819. Cum $\frac{1}{2}x - 3 < 0$ pentru orice $x \leq -2$, legea de corespondenţă a funcţiei f se rescrie

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}x+3, & \text{dacă } x \in (-\infty,-2] \\ x+3, & \text{dacă } x \in (-2,1) \\ 3-2x, & \text{dacă } x \in [1,\infty). \end{cases}$$

Faptul că singura afirmaţie adevărată este $\boxed{\text{B}}$ rezultă imediat din analiza graficului funcţiei f.

Chiar şi în lipsa graficului, folosind proprietăţile funcţiei de gradul I se deduce cu uşurinţă că $f((-\infty,-2]) = [4,\infty)$, $f((-2,1)) = (1,4)$, $f([1,\infty)) = (-\infty,1]$. Funcţia f este bijectivă deoarece pentru orice element b al codomeniului $\mathbb{R}$ există un unic $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x) = b$. Pentru $b \in (-\infty,1]$, acest unic x este $x = \dfrac{3-b}{2} \in [1,\infty)$, pentru $b \in (1,4)$, $x = b-3 \in (-2,1)$, iar pentru $b \in [4,\infty)$, $x = 6-2b \in (-\infty,-2]$.

820. Vârful parabolei asociate unei funcţii $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = ax^2+bx+c$ ($a,b,c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$) este punctul $V\left(-\dfrac{b}{2a}, -\dfrac{\Delta}{4a}\right)$.

Fie $m \in \mathbb{R}^*$. Pentru funcţia f_m avem $\Delta = (2m+1)^2 - 4m(m+1) = 4m^2+4m+1-4m^2-4m = 1$. Abscisa vârfului parabolei asociate este $x_V = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{2m+1}{2m}$, iar ordonata este $y_V = -\dfrac{\Delta}{4a} = -\dfrac{1}{4m}$. Condiţia necesară şi suficientă pentru ca vârful parabolei asociate funcţiei f_m să se găsescă pe dreapta de ecuaţie $2x+3y+6=0$ este: $2\cdot x_V + 3\cdot y_V + 6 = 0 \Leftrightarrow 2\cdot\dfrac{2m+1}{2m} + 3\cdot\left(-\dfrac{1}{4m}\right) + 6 = 0 \Leftrightarrow m = -\dfrac{1}{32}$. Aşadar, răspunsul corect este $\boxed{\text{B}}$.

821. Determinantul sistemului este $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-1)^2$, deci sistemul este compatibil determinat dacă şi numai dacă $a \neq 1$. Pentru $a = 1$, scăzând prima ecuaţie din a doua, ajungem la concluzia $0 = 1$, deci sistemul este incompatibil în acest caz.

Alternativ, pentru $a = 1$, avem doi determinanţi caracteristici: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 3$, deci sistemul este incompatibil. În concluzie, $\boxed{\text{B}}$ şi $\boxed{\text{D}}$ sunt adevărate, iar celelalte afirmaţii sunt false.

822. Avem $A^2 = \begin{pmatrix} a^2+1 & 2a \\ 2a & a^2+1 \end{pmatrix}$. Din $A^2 = O_2$ obținem sistemul $a^2+1 = 0$ şi

$2a = 0$, care nu are soluţii în $\mathbb{R}$. Pentru $a = 0$ avem $A^2 = A = I_2$, iar pentru $a = 1$ avem $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, deci afirmaţiile adevărate sunt $\boxed{\text{B}}$, $\boxed{\text{C}}$ şi $\boxed{\text{D}}$.

823. $\boxed{\text{A}}$ Această afirmaţie este adevărată, deoarece $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \dfrac{\frac{3^{n+1}}{(n+2)!}}{\frac{3^n}{(n+1)!}} = \dfrac{3}{n+2} \leq 1$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. De asemenea $x_n > 0$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, ceea ce implică $x_n \geq x_{n+1}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este descrescător.

$\boxed{\text{B}}$ Această afirmaţie este falsă, deoarece $x_1 = \dfrac{3}{2} > 1$ (de asemenea $x_2 = \dfrac{9}{6} > 1$, $x_3 = \dfrac{27}{24} > 1$).

$\boxed{\text{C}}$ Această afirmaţie este adevărată, deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3}{n+2} = 0$.

$\boxed{\text{D}}$ Această afirmaţie este adevărată, deoarece pentru $n \geq 3$, $n \in \mathbb{N}^*$ are loc $0 < x_n = \dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{3}{3}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{3}{5}\cdot\ldots\cdot\dfrac{3}{n+1} \leq \dfrac{3}{2}\cdot 1\cdot \left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-2}$, pentru că $\dfrac{3}{n+1} \leq \dfrac{3}{4}$, pentru orice $n \geq 3$, $n \in \mathbb{N}^*$. Folosind $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-2} = 0$, obţinem $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

824. Avem $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x = \lim\limits_{x\to\infty} \left[\left(1 + \dfrac{2a}{x-a}\right)^{\frac{x-a}{2a}}\right]^{\frac{2a}{x-a}\cdot x} = \mathrm{e}^{2a}$.

825. Deoarece $\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{arctg} = \dfrac{\pi}{2}$, limita este o nedeterminare de tipul $\infty \cdot 0$. Putem scrie $L = \lim\limits_{x\to\infty} x \cdot \left(\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x}{\frac{1}{x}}$ şi aplicând regula lui l'Hospital obţinem $L = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = 1$.

826. Funcţia f este continuă în 1 dacă şi numai dacă $a + 2 = b$. În ipoteza că $a + 2 = b$, funcţia f este derivabilă în 1 dacă şi numai dacă $4 + a = 1$. Prin urmare, f este derivabilă în 1 (deci pe $\mathbb{R}$) dacă şi numai dacă $a = -3$ şi $b = -1$.

827. Triunghiul este dreptunghic, astfel aria este semiprodusul catetelor, adică $\mathcal{A} = 6$. (Dacă nu se observă că triunghiul este dreptunghic, atunci aria se poate calcula după formula lui Heron.) Semiperimetrul fiind $p = \dfrac{3+4+5}{2} = 6$, obţinem $r = \dfrac{\mathcal{A}}{p} = 1$. Raza R este jumătatea ipotenuzei sau se calculează din relaţia $R = \dfrac{abc}{4\mathcal{A}} = \dfrac{3\cdot4\cdot5}{4\cdot6} = \dfrac{5}{2}$. Astfel raportul este $\dfrac{2}{5}$, adică $\boxed{\text{A}}$ este adevărată, iar $\boxed{\text{B}}$, $\boxed{\text{C}}$ şi $\boxed{\text{D}}$ sunt false.

828. Punctul M fiind mijlocul laturii AB avem $\overrightarrow{MB} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Din relaţia $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{AC}$ rezultă că $\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{AC}$. Astfel obţinem: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BN} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{MP} =$

$\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}$. Relaţia $\overrightarrow{MP}=3\overrightarrow{MN}$ ne dă $3k=2\Leftrightarrow k=\frac{2}{3}$. Deci $\boxed{\text{D}}$ este adevărată, iar celelalte sunt false.

829. Funcţiile logaritmice sunt definite pe mulţimea numerelor pozitive, de aceea este necesar să fie $3+x>0$ şi $3-x>0$, adică $x\in(-3,3)$. Rezolvăm ecuaţia folosind proprietăţile logaritmilor: $\log_3\sqrt{3+x}+\log_9(3-x)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\log_3(3+x)^{\frac{1}{2}}+\frac{\log_3(3-x)}{\log_3 9}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{2}\log_3(3+x)+\frac{\log_3(3-x)}{2}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\log_3(3+x)+\log_3(3-x)=1\Leftrightarrow\log_3[(3+x)(3-x)]=1\Leftrightarrow(3+x)(3-x)=3^1\Leftrightarrow 9-x^2=3\Leftrightarrow x^2=6\Leftrightarrow=\pm\sqrt{6}$. Mulţimea soluţiilor ecuaţiei este $S=\{-\sqrt{6},\sqrt{6}\}$, fiindcă $\pm\sqrt{6}\in(-3,3)$.

830. Condiţia de existenţă a radicalului este $x^2+x+7\geq 0$, sau echivalent $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{27}{4}\geq 0$, deci $x\in\mathbb{R}$. Înlocuind $y=x^2+x+4$ în ecuaţia originală, obţinem $y=2\sqrt{y+3}$. Prin urmare, $y^2=4y+12$, de unde $y\in\{6,-2\}$. Pe de altă parte, $y=x^2+x+4=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{15}{4}\geq\frac{15}{4}$, deci numai soluţia $y_1=6$ convine. Pentru această valoare obţinem ecuaţia $x^2+x-2=0$, care admite soluţiile $x_1=1$ şi $x_2=-2$. Din explicaţiile de mai sus rezultă că ecuaţia originală admite exact aceste două soluţii, deci produsul soluţiilor este -2.

Alternativ, după stabilirea faptului că soluţiile ecuaţiei date sunt soluţiile ecuaţiei de gradul doi $x^2+x+4=y_1$, putem ajunge la concluzia finală fără rezolvarea acestei ecuaţii, cu ajutorul formulelor lui Viète: $x_1x_2=-2$.

831. Pentru orice $x<0$ avem $|x^3-x^2|=x^2|x-1|=-x^3+x^2$ şi $\max\{x^3,x^4\}=x^4$, deci $f(x)=x^4-x^3+x^2+x$. Pentru orice $x\in[0,1]$ avem $|x^3-x^2|=x^2|x-1|=-x^3+x^2$ şi $\max\{x^3,x^4\}=x^3$, deci $f(x)=x^2+x$. Funcţia este continuă în $x_0=0$ deoarece $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}f(x)=f(0)=0$. De asemenea, funcţia este derivabilă în $x_0=0$ deoarece $f'_s(0)=f'_d(0)=1$. Ecuaţia tangentei în $O(0,0)$ este $y=x$ (prima bisectoare).

832. Fie $g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x^4-10x^2+2021$. Atunci $g'(x)=4x(x^2-5)$. Rezultă că funcţia g este strict descrescătoare pe $(-\infty,-\sqrt{5}]$, strict crescătoare pe $[-\sqrt{5},0]$, strict descrescătoare pe $[0,\sqrt{5}]$ şi strict crescătoare pe $[\sqrt{5},\infty)$. Rezultă că $A=[\sqrt{5},\infty)$.

833. Considerăm funcţia $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, definită prin $f(x)=x^2(1-\ln x)=x^2-x^2\ln x$. Evident, f este derivabilă pe $(0,\infty)$ şi $f'(x)=x(1-2\ln x)$. Tabelul care sintetizează variaţia lui f este prezentat mai jos.

x	0			$\sqrt{e}$		e			$+\infty$
$f'(x)$	$\vert$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
$f(x)$	$\vert_0$	$\nearrow$	$\nearrow$	$e/2$	$\searrow$	0	$\searrow$	$\searrow$	$-\infty$

Din tabel rezultă că ecuaţia $f(x) = a$ are două soluţii distincte $x_1 \in (0, \sqrt{e})$ şi respectiv $x_2 \in (\sqrt{e}, e)$, dacă şi numai dacă $a \in (0, e/2)$.

834. Avem, înainte de toate, $\left|\cos\frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} = \frac{3}{5}$. Întrucât $x \in \left(\frac{5\pi}{2}, 3\pi\right)$, deducem că $\frac{x}{2} \in \left(\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right)$, adică $\frac{x}{2}$ este în cadranul trei, unde funcţia cos ia valori negative. Aşadar, afirmaţia $\boxed{\text{C}}$ este adevărată, celelalte trei sunt false.

835. Din teorema cosinusului avem $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C = 170 - 26 \cdot \cos C$, unde $\cos C = \frac{1-\text{tg}^2\frac{C}{2}}{1+\text{tg}^2\frac{C}{2}} = \frac{1-\frac{4}{9}}{1+\frac{4}{9}} = \frac{5}{13}$, deci $c^2 = 170 - 26 \cdot \frac{5}{13} = 160 \Rightarrow c = 4\sqrt{10}$, deci $\boxed{\text{A}}$ este adevărată şi $\boxed{\text{B}}$ este falsă. $\sin C = \frac{2\text{tg}\frac{C}{2}}{1+\text{tg}^2\frac{C}{2}} = \frac{12}{13}$, astfel $\boxed{\text{C}}$ este adevărată. $\mathcal{A}ria\,(ABC) = \frac{ab\sin C}{2} = \frac{1}{2} \cdot 13 \cdot 1 \cdot \frac{12}{13} = 6$, deci $\boxed{\text{D}}$ este adevărată.

836. Ecuaţia este echivalentă cu ecuaţia $1 - 2\sin^2 x + a\sin x - 2a + 7 = 0$ sau $2\sin^2 x - a\sin x + 2a - 8 = 0$. Fie $t = \sin x$. Suntem conduşi la ecuaţia de gradul al doilea în t: $2t^2 - at + 2a - 8 = 0$.. Discriminantul ecuaţiei este $\Delta = a^2 - 4 \cdot 2 \cdot (2a - 8) = a^2 - 16a + 64 = (a - 8)^2$.. Soluţiile ecuaţiei sunt, după cum ne putem convinge imediat, $t_1 = 2$ şi $t_2 = \frac{a-4}{2}$. Cum sinusul este mai mic sau egal cu 1, în modul, prima soluţie nu convine, prin urmare, pentru a ecuaţia originală să aibă soluţii, este necesar şi suficient să avem $|t_2| \leq 1$, adică $|a - 4| \leq 2$ sau $2 \leq a \leq 6$, ceea ce înseamnă că afirmaţia $\boxed{\text{A}}$ este falsă, în timp ce $\boxed{\text{B}}$ este adevărată. Dacă $a = 5$, atunci obţinem $\sin x = \frac{1}{2}$, iar soluţia generală a acestei ecuaţii este $x \in \left\{(-1)^k\frac{\pi}{6} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\}$, aşadar afirmaţia $\boxed{\text{C}}$ este adevărată, iar $\boxed{\text{D}}$ este falsă.

837. Ecuaţia se scrie $(z-1)(z^2+z+1) = 0$, deci $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$ (rădăcină cubică a unităţii). $\alpha^3 = 1 \Rightarrow |\alpha|^3 = 1 \Rightarrow |\alpha| = 1$; $1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} = \frac{\alpha^2+\alpha+1}{\alpha^2} = 0 \in \mathbb{R}$, deci $\boxed{\text{A}}$ este adevărată şi $\boxed{\text{B}}$ este falsă. Pe de altă parte $\alpha^{2021} = (\alpha^3)^{673} \cdot \alpha^2 = \alpha^2 = -\alpha - 1$, deci $\boxed{\text{C}}$

este adevărată. $(-\alpha)$ este rădăcină pentru ecuaţia $z^3 = -1$, deci $(z+1)(z^2 - z + 1) = 0$ şi astfel $(-\alpha)^2 - (-\alpha) + 1 = 0$. În consecinţă $\boxed{\text{D}}$ este adevărată.

838. Ecuaţia dată este echivalentă cu $(x+\widehat{1})(x+\widehat{3}) = \widehat{0}$. Observăm că $\widehat{a}$ este o soluţie a acestei ecuaţii dacă şi numai dacă a este număr impar şi $(a+1)$ sau $(a+3)$ este divizibil cu 3. În concluzie, soluţiile distincte ale ecuaţiei date sunt $\widehat{3}$, $\widehat{5}$, $\widehat{9}$ şi $\widehat{11}$.

Alternativ, se poate ajunge la concluzia de mai sus şi prin înlocuirea celor 12 elemente ale inelului în ecuaţie.

839. Pentru $x = y = 2$ numitorul se anulează, deci $\boxed{\text{A}}$ este fals. Fie $x, y > 2$; avem $x + y - 4 > 0$; în plus, se calculează că $x * y > 2 \Leftrightarrow (x-2)(y-2) + 2 > 0$, deci $\boxed{\text{B}}$ este adevărat. Avem $3*(3*3) = 3*\dfrac{7}{2} = \dfrac{17}{5}$, deci $\boxed{\text{C}}$ este fals. Avem $4*x = x \Leftrightarrow 4x - 2 = x^2$, ceea ce evident nu are loc pentru orice $x > 3$, deci $\boxed{\text{D}}$ este fals.

840. Cum funcţia de integrat este pară obţinem $I = 2\sqrt{2}\displaystyle\int_0^{\pi/3} \sqrt{1-\cos x}\sin x\,\mathrm{d}x$,

deci $I = \frac{4\sqrt{2}}{3}(1-\cos x)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\pi/3} = \dfrac{2}{3}$.

841. Se studiază semnul derivatei $f'(x) = \mathrm{e}^x - \dfrac{1}{x+1}$ cu ajutorul funcţiei $h\colon (-1,\infty) \to \mathbb{R}$, definite prin $h(x) = x + \ln(1+x)$. Din $h'(x) = 1 + \dfrac{1}{1+x} > 0$, $\forall x \in (-1,\infty)$, rezultă că funcţia h este strict crescătoare. De asemenea, $h(0) = 0$. Prin urmare, $h(x) < 0$, $\forall x \in (-1,0)$, şi $h(x) > 0$, $\forall x \in (0,\infty)$, sau, echivalent, $x < \ln\dfrac{1}{1+x}$, $\forall x \in (-1,0)$, şi $x > \ln\dfrac{1}{1+x}$, $\forall x \in (0,\infty)$. Ţinând cont de faptul că funcţia exponenţială este strict crescătoare, rezultă $\mathrm{e}^x < \dfrac{1}{1+x}$, $\forall x \in (-1,0)$, şi $\mathrm{e}^x > \dfrac{1}{1+x}$, $\forall x \in (0,\infty)$. Prin urmare, $f'(x) < 0$, $\forall x \in (-1,0)$, $f'(0) = 0$ şi $f'(x) > 0$, $\forall x \in (0,\infty)$. Concluzionăm că funcţia f este strict descrescătoare pe $(-1,0]$ şi strict crescătoare pe $[0,\infty)$, de unde rezultă că funcţia f nu este injectivă, nu are puncte de maxim global şi că punctul 0 este singurul ei punct de minim global. Cum $f(0) = 0$, se obţine că $1 + \ln(1+x) < \mathrm{e}^x$, $\forall x \in (-1,\infty) \setminus \{0\}$, ceea ce arată că afirmaţia $\boxed{\text{C}}$ este adevărată.

842. Distanţa $AM + MB$ este minimă, dacă şi numai dacă M se află pe segmentul AB. Dar M fiind şi pe axa Ox rezultă $\{M\} = Ox \cap AB$. Ecuaţia dreptei AB este $x+2y+2 = 0$, de unde $\alpha = -2$. Analog, din $\{N\} = Oy \cap AB$ se obţine $\beta = -1$, iar $MN = \sqrt{5}$, adică doar $\boxed{\text{D}}$ este adevărată.

843. Știm că $1 + \ldots + 100 = 5050$, deci ca să obţinem 5044 trebuie să scădem o sumă egală cu 6. Dar suma 6 poate fi obţinută în 4 feluri: $6, 1 + 5, 2 + 4, 1 + 2 + 3$.

844. Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ avem $I_n + I_{n+1} = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2n} + x^{2n+2}}{1 + x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^{2n}\mathrm{d}x = \frac{1}{2n+1}$.

Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ avem $0 < I_n < \displaystyle\int_0^1 x^{2n}\mathrm{d}x = \frac{1}{2n+1}$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$.

Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ avem $I_{n+1} < I_n$, deci $2I_n > I_n + I_{n+1} = \dfrac{1}{2n+1} \Rightarrow I_n > \dfrac{1}{4n+2}$ şi $2I_{n+1} < I_n + I_{n+1} = \dfrac{1}{2n+1} \Rightarrow I_{n+1} < \dfrac{1}{4n+2} \Rightarrow I_n < \dfrac{1}{4n-2}$. Drept urmare, avem $\dfrac{1}{4n+2} < I_n < \dfrac{1}{4n-2} \Rightarrow \dfrac{n}{4n+2} < nI_n < \dfrac{n}{4n-2} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} nI_n = \dfrac{1}{4}$.

845. Avem $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}| \cdot \cos 120^\circ = 1 \cdot 2 \cdot -\dfrac{1}{2} = -1$. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cdot \cos 60^\circ = 2 \cdot 1 \cdot \dfrac{1}{2} = 1$. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cdot \cos 60^\circ = 1 \cdot 2 \cdot \dfrac{1}{2}$. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BA} = |\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BA}| \cdot \cos 0^\circ = 1$.

846. $m_{AB} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{4}{3}$. Cum $ABCD$ dreptunghi, $AD \perp AB \Rightarrow m_{AB} \cdot m_{AD} = -1 \Rightarrow m_{AD} = -\dfrac{3}{4}$. Așadar, $AD : y - y_A = m_{AD}(x - x_A) \iff AD : y - 2 = -\dfrac{3}{4}(x - 1) \iff AD : 3x + 4y - 11 = 0$.

847. $\vec{u} \perp \vec{v} \iff 2(b + 4) + 2b = 0 \iff 4b = -8 \iff b = -2$.

848. Ecuația se poate rezolva clasic, calculând inversa primei matrici. Însă, în acest caz, fie $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$, cu $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$. Avem $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ 2x_1 + 4x_3 & 2x_2 + 4x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, deci obținem $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, deci suma elementelor lui X este 2.

849. Notăm cu A matricea sistemului. Avem $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & a \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 4a + 20$, deci pentru $a = -5$, sistemul poate fi compatibil nedeterminat sau incompatbil. Pentru $a = -5$, găsim minorul principal $m_p = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$. Atunci, $m_{\text{caracteristic}} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & a \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 4a = -20 \neq 0$, deci sistemul este incompatibil. Dacă $\det A = 16$, atunci avem $a = -1$. Sistemul este compatibil determinat și se poate rezolva folosind Metoda lui Cramer: $\begin{cases} x = \dfrac{\Delta x}{\det A} \\ y = \dfrac{\Delta y}{\det A} \\ z = \dfrac{\Delta z}{\det A} \end{cases}$.

Avem $\Delta x = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & -2 & a \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 4$, $\Delta y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & a & a \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 12$ și $\Delta z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & a \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -4$. Așadar, soluția sistemului este $\left(x = \frac{1}{4}, y = \frac{3}{4}, z = -\frac{1}{4}\right)$.

850. $\lim\limits_{x\to 0}(1 + x^2\mathrm{e}^x)^{\frac{1}{1-\cos x}} = \lim\limits_{x\to 0}\left[(1 + x^2\mathrm{e}^x)^{\frac{1}{x^2e^x}}\right]^{x^2e^x\cdot\frac{1}{1-\cos x}} = \lim\limits_{x\to 0} e^{x^2e^x\cdot\frac{1}{1-\cos x}} = e^2$.

Observație: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2e^x}{1-\cos x} \overset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2xe^x + x^2e^x}{\sin x} \overset{\text{L'Hôpital}}{=}$
$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2(e^x + xe^x) + 2xe^x + x^2e^x}{\cos x} = 2.$

851. f este continuă pe $\mathbb{R} - \{0, 1\}$ ca restricție de funcții elementare continue. f este continuă în $x = 0 \iff \lim\limits_{x\nearrow 0} f(x) = \lim\limits_{x\searrow 0} f(x) = f(0)$. Avem $\lim\limits_{x\nearrow 0} f(x) = 1, f(0) = 1$ și $\lim\limits_{x\searrow 0} f(x) = \lim\limits_{x\searrow 0} a\mathrm{e}^{-x} + b\mathrm{e}^x + cx\left(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}\right) = a + b$, de unde deducem că $a + b = 1$. Analog, f este continuă în $x = 1 \iff \lim\limits_{x\nearrow 1} f(x) = \lim\limits_{x\searrow 1} f(x) = f(1)$. Avem $f(1) = e$, $\lim\limits_{x\nearrow 1} f(x) = \lim\limits_{x\nearrow 1} a\mathrm{e}^{-x} + b\mathrm{e}^x + cx\left(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}\right) = ae^{-1} + be + c(e - e^{-1}) = \dfrac{a}{e} + be + \dfrac{ce^2 - c}{e} = \dfrac{a + be^2 + ce^2 - c}{e}$ și $\lim\limits_{x\searrow 1} f(x) = e$, de unde deducem că $a + be^2 + ce^2 - c = e^2$, deci $b + c = 1$. Așadar, suma $a + 2b + c = 1 + 1 = 2$.

852. $\sin x = \dfrac{1}{3}$, deci $\cos^2 x = \dfrac{8}{9}$. Cum $x \in \left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right)$, $\cos x < 0$ și obținem $\cos x = -\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.
$\sin(2x) = 2\sin x\cos x = 2\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{-2\sqrt{2}}{3} = -\dfrac{4\sqrt{2}}{9}$. $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \dfrac{8}{9} - \dfrac{1}{9} = \dfrac{7}{9}$.
$\mathrm{tg}\, x = \dfrac{\sin x}{\cos x} = -\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

853. Fie M mijlocul lui AE și N mijlocul lui BD. Avem $x_M = \dfrac{x_A + x_E}{2}, y_M = \dfrac{y_A + y_E}{2} \iff M(-2, 4)$. De asemenea, E este mijlocul lui MC, deci $x_E = \dfrac{x_M + x_C}{2}, y_E = \dfrac{y_M + y_C}{2} \iff C(-6, 0)$. D este mijlocul lui AN, deci $x_D = \dfrac{x_A + x_N}{2}, y_D = \dfrac{y_A + y_N}{2}$, $N(8, 2)$. Totodată, N este mijlocul lui BD, deci $x_N = \dfrac{x_B + x_D}{2}, y_N = \dfrac{y_B + y_D}{2}$, $B(12, 0)$. Coordonatele centrului de greutate G sunt $\left(\dfrac{x_A + x_B + x_C}{3}, \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$, $G(2, 2)$.

854. Suma primilor n termeni ai progresiei este $\sum\limits_{n=1}^{100} a_n = \sum\limits_{n=1}^{100}(a_1 + (n-1)d) = 100a_1 +$

$4950d$. Totodată, suma termenilor pari este $\sum_{n=1}^{50} a_{2n} = \sum_{n=1}^{50}(a_1+(n-1)d) = 50a_1+2500d$.

Așadar, avem sistemul: $\begin{cases} 100a_1 + 4950d = 200 \\ 50a_1 + 2500d = 200 \end{cases} \Rightarrow 100a_1 + 4950d - 2(50a_1 + 2500d) =$ $-200 \iff -50d = -200 \Rightarrow d = 4 \Rightarrow a_1 = -196$, de unde rezultă că afirmațiile $\boxed{\text{A}}$ și $\boxed{\text{C}}$ sunt adevărate.

855. Al treilea termen al dezvoltării este $T_3 = (-1)^2 \cdot C_5^2 \cdot (x^{-1})^3 \cdot (x^{\frac{1+\lg x}{2}})^2 = 10 \cdot x^{-3} \cdot x^{1+\lg x} = 10 \cdot x^{-3+1+\lg x} = 10000 \Rightarrow x^{-2+\lg x} = 1000 \iff (-2+\lg x)\cdot \lg x = 3$. Notăm $t = \lg x$ și avem $t^2 - 2t - 3 = 0 \iff t = 3$ sau $t = -1$, deci $x \in \left\{\frac{1}{10}, 1000\right\}$.

856. Efectuăm substituția $t = \sqrt{x+1} \Rightarrow x = t^2 - 1$ și ecuația devine $\sqrt{t^2-1-6t+10} + \sqrt{t^2-1+6t+10} = 6 \iff \sqrt{(t-3)^2} + \sqrt{(t+3)^2} = 6 \iff |t-3| + |t+3| = 6$. Observăm că $|t-3| + |-t-3| = |t-3| + |t+3| = 6 = |t-3-t-3| = 6$, deci avem egalitate în inegalitatea triunghiului. Deducem că $t-3$ și $-t-3$ au același semn sau unul dintre ele e zero, deci $\boxed{\text{A}}$ și $\boxed{\text{D}}$ sunt adevărate.

857. $f'(x) = 3+4\cdot\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{3\sqrt{1-x^2}-4x}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \iff 3\sqrt{1-x^2} = 4x \iff x^2 = \dfrac{25}{9}$, deci $x = \pm\dfrac{3}{5}$. Cum f continuă, f crescătoare pe $[-1, \frac{3}{5}]$, f descrescătoare pe $\left[\frac{3}{5}, 1\right]$, $f(-1) = -3, f\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{7}{5}, f\left(\frac{3}{5}\right) = 5$ și $f(1) = 0$, obținem că valoarea maximă a lui f este 5, iar cea minimă -3, de unde $b - a = 8$.

858. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^3+x^2+x+1} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x^2+1)}$. Folosim descompunerea în fracții simple: $\dfrac{1}{(x+1)(x^2+1)} = \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{Bx+C}{x^2+1}, A, B, C \in \mathbb{R} \Rightarrow A(x^2+1) + (Bx+C)(x+1) = 1 \iff x^2(A+B) + x(B+C) + A + C = 1 \Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ B+C=0 \\ A+C=1 \end{cases}$, de unde obținem $A = C = \dfrac{1}{2}, B = -\dfrac{1}{2}$, deci integrala devine $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^3+x^2+x+1} = \int_0^1 \frac{1}{2(x+1)} - \frac{x-1}{2(x^2+1)}\mathrm{d}x =$ $\displaystyle\frac{1}{2}\ln(x+1)\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{4}\ln(x^2+1)\Big|_0^1 + \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\, x\Big|_0^1 =$ $\dfrac{1}{2}\ln 2 - \dfrac{1}{4}\ln 2 + \dfrac{\pi}{8} = \dfrac{\ln 2}{4} + \dfrac{\pi}{8}$.

859. D este mijlocul lui $BC \Rightarrow x_D = \dfrac{x_B + x_C}{2}, y_D = \dfrac{y_B + y_C}{2} \Rightarrow C(-2, 3)$. Atunci avem $\mathcal{A}_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot |\Delta|$, unde $\Delta = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 6 - 8 + 2 - 8 - 9 =$ $-14 \Rightarrow \mathcal{A}_{\triangle ABC} = 7$.

860. $f(1) = 0, f(0) = 0$, deci $1 \in S$. $f(-1) = 2, f(2) = 2$, deci $-1 \notin S$. $f(x^2 - x) = x^4 - 2x^3 + x$, polinom ce are rădăcinile $x_1 = 0, x_2 = 1, x_{3,4} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$, deci exact 2 numere iraționale există în S.

861. Notăm $z = a + bi, a, b \in \mathbb{R}$. $z^2 = a^2 - b^2 + 2abi = i \iff 2ab = 1$ și $a^2 - b^2 = 0$. Dacă $a = b$, atunci $a^2 = \dfrac{1}{2} \Rightarrow a = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Dacă $a = -b$, $a^2 = -\dfrac{1}{2} \notin \mathbb{R}$. Așadar, avem două numere care respectă condiția dată: $z_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}, z_2 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. $(z_1^3 + \overline{z}_1) = \dfrac{i\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{i\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 0$. $(z_2^3 + \overline{z}_2) = -\dfrac{i\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{i\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 0$.

862. Limita de rescrie $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{(n+k)^2} = \lim\limits_{n\to\infty} n \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{n^2 + 2nk + k^2} = \lim\limits_{n\to\infty} n \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{n^2\Big(1 + 2\frac{k}{n} + (\frac{k}{n})^2\Big)} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{1 + 2\frac{k}{n} + (\frac{k}{n})^2}$. Fie funcția $f : [0,1] \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 2x + 1}$, f continuă și integrabilă pe $\mathbb{R}$. Pentru fiecare n se consideră diviziunea $\Delta_n = (0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1)$ a intervalului $[0,1]$ și $\xi_n = (\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1)$ sistemul de puncte intermediare asociat diviziunii Δ_n. Pentru fiecare n, termenul x_n este suma Riemann asociată funcției f, diviziunii Δ_n şi sistemului de puncte intermediare ξ_n, adică $x_n = \sigma_{\Delta_n}(f, \xi_n)$. Avem $\lim\limits_{n\to\infty} ||\Delta_n|| = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ și, cum f este integrabilă, $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_{\Delta_n}(f, \xi_n) = \displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 2x + 1}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{(x+1)^2}\mathrm{d}x = \int_0^1 (x+1)^{-2}\mathrm{d}x = \dfrac{(x+1)^{-1}}{-1}\Big|_0^1 = -\dfrac{1}{2} + 1 = \dfrac{1}{2}$.

863. Aria mulțimii plane cuprinse între graficul lui f, axa Ox și dreptele de ecuații $x = -1$ și $x = 1$ este $\displaystyle\int_{-1}^{1} |f(x)|\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \sqrt{x^2+1}\mathrm{d}x - \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x = \Big(\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2}\ln(x + \sqrt{x^2+1})\Big)\Big|_{-1}^{1} - \ln(\sqrt{x^2+1} + x)\Big|_{-1}^{1} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2}) + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\ln(\sqrt{2}+1) - \ln(1+\sqrt{2}) + \ln(\sqrt{2}+1) = \sqrt{2} - \ln\Big(1 + \sqrt{2}\Big)$.

864. Din regula triunghiului, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$, deci afirmația $\boxed{\text{A}}$ este adevărată. Cum $ABCD$ este romb, obținem $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$ și cum, din ipoteză, $BE = 2 \cdot EC, FD =$

$3 \cdot FC$, rezultă imediat că afirmația $\boxed{\text{B}}$ este adevărată, iar $\boxed{\text{C}}$ este falsă. Din regula triunghiului, mai rezultă și $\overrightarrow{CE} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{CF} \Rightarrow \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EC} - \overrightarrow{FC} \Leftrightarrow \overrightarrow{EF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$.

865. Vom calcula lungimile laturilor triunghiului folosind formula

$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$ și obținem $AB = 15, AC = 13$ și $BC = 14$. Cum AD este bisectoare în $\triangle ABC$, aplicăm Teorema Bisectoarei și avem $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{15}{13}$. Notăm $BD = x \Rightarrow DC = 14 - x$. Avem: $\frac{x}{14-x} = \frac{15}{13} \iff 13x = 15(14 - x) \iff 13x = 210 - 15x \iff x = \frac{210}{28} = \frac{15}{2}$.

866. Cum $f\colon (\mathbb{Z}_8, +) \to (\mathbb{Z}_{12}, +)$, trebuie să avem $f(\hat{8}) \equiv 0 \pmod{12} \iff 8f(\hat{1}) \equiv 0 \pmod{12} \iff 2f(\hat{1}) \equiv 0 \pmod{3} \iff f(\hat{1}) \equiv 0 \pmod{3}$, deci obținem $f(\hat{1}) \in \{\hat{0}, \hat{3}, \hat{6}, \hat{9}\}$. Cum $f(\hat{5}) = \hat{9} \Rightarrow 5f(\hat{1}) = \hat{9}$. Pentru $f(\hat{1}) = \hat{0}, 5f(\hat{1}) = 0 \not\equiv 9 \pmod{12}$. Pentru $f(\hat{1}) = \hat{3}, 5f(\hat{1}) = 15 \not\equiv 9 \pmod{12}$. Pentru $f(\hat{1}) = \hat{6}, 5f(\hat{1}) = 30 \not\equiv 9 \pmod{12}$. Pentru $f(\hat{1}) = \hat{9}, 5f(\hat{1}) = 45 \equiv 9 \pmod{12}$, deci varianta $\boxed{\text{B}}$ este adevărată.

867. Aplicăm ln expresiei și obținem $\ln x - \ln 2024^x = \ln y - \ln 2024^y \iff \ln x - x\ln 2024 = \ln y - y \ln 2024$. Notăm $a = \ln 2024$, iar expresia este $\ln x - ax = \ln y - ay$. Fie $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \ln x - ax$. Ecuația noastră implică, deci, $f(x) = f(y)$, cu $x < y$. Avem $f'(x) = \frac{1}{x} - a$. $f'(x) = 0 \iff \frac{1 - ax}{x} = 0 \iff ax = 1 \iff x = \frac{1}{a}$. Cum f este continuă și $f\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a - 1$, obținem că f este crescătoare pe $(0, \frac{1}{a}]$ și descrescătoare pe $\left[\frac{1}{a}, +\infty\right)$. Așadar, o ecuație $f(x) = c$ va avea mereu cel puțin două soluții, una în intervalul $(0, \frac{1}{a}]$ și cealaltă în $\left[\frac{1}{a}, +\infty\right)$. Cum $x, y \in \mathbb{R}$, iar c poate lua o infinitate de valori, că ecuația $f(x) = f(y)$ are o infinitate de soluții, deci afirmația $\boxed{\text{C}}$ este adevărată. Dacă $y = 1$, atunci vom avea $\ln x = a(x - 1)$, ecuație care o soluție în intervalul $(0, 1]$, deoarece $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$ și $f(1) = 0$, iar f este crescătoare pe acest interval.

868. Observăm că pentru $a > 0$, șirul este crescător și nemărginit superior, deci este divergent. De asemenea, pentru $a < -1$, $x_1 = x_0(1 + x_0)$, ambele numere negative, deci $x_1 > 0$, iar astfel șirul va deveni crescător și nemărginit superior, deci divergent. Pentru $a = 0, (x_n) = 0$, deci limita sa este 0. Pentru $a = -1, x_1 = 0 \Rightarrow (x_n) = 0$, deci limita sa este 0. În final, pentru $a \in (-1, 0)$, observăm că șirul este crescător, dar mărginit superior de 0, deci va fi convergent (conform Criteriului lui Weierstrass). În final, soluția este $\{-1\} \cup \{0\} \cup (-1, 0) = [-1, 0]$.

869. Pentru coordonatele centrului de greutate avem $-2 = x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} = \dfrac{2 - 3 + x_C}{3}$, respectiv $5 = y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} = \dfrac{2 + 7 + y_C}{3}$. De aici se obţine $C(-5, 6)$.

870. Panta dreptei AG este $m_{AG} = \dfrac{y_G - y_A}{x_G - x_A} = \dfrac{5 - 2}{-2 - 2} = -\dfrac{3}{4}$. Panta dreptei perpendiculare pe AG este $m = \dfrac{-1}{m_{AG}} = \dfrac{4}{3}$.

871. Aplicând regula lui L'Hôpital, $\Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x - \sin x - \cos x}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x - \cos x + \sin x}{2x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x + \sin x + \cos x}{2} = 1$.

872. Aria triunghiului ABC este: $6 = \mathcal{A}_{ABC} = \dfrac{AB \cdot AC \cdot \sin A}{2} = \dfrac{8 \cdot 3 \cdot \sin A}{2} \Rightarrow \sin A = \dfrac{1}{2}$, deci $m(\widehat{BAC}) \in \{30°, 150°\}$.

873. Aria mulţimii din enunţ este egală cu $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} |f(x)|\,\mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{e}} \left(\frac{x^3}{3}\right)' \ln x\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} \ln x \Big|_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^3}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_1^{\mathrm{e}} = \frac{1 + 2\mathrm{e}^3}{9}$.

874. Observăm uşor că $x = 1$ nu este soluţie. Deoarece $\log_{2^k} x^k = k \cdot \log_{2^k} x = k \cdot \dfrac{1}{\log_x 2^k} = \dfrac{1}{\log_x 2} = \log_2 x$ pentru orice $x \in (0, +\infty) \setminus \{1\}$, ecuaţia dată este echivalentă cu ecuaţia $4 \log_2 x = 2$, care admite soluţia unică $x = \sqrt{2} \in (1, 2]$.

875. Avem $m \in S$ dacă şi numai dacă $4(m^2 + 1)^2 - 4(m + 1)^4 \leq 0$. Inegalitatea este echivalentă cu inegalitatea $m^3 + m^2 + m \geq 0$, ori $m(m^2 + m + 1) \geq 0$. Ultima inegalitate este îndeplinită dacă şi numai dacă $m \geq 0$.

876. Schiţând graficul funcţiei, putem observa că 1) f este crescătoare; 2) $f(0) = f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 1$, deci f nu este injectivă; 3) nu există $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x) = \frac{1}{2}$, deci f nu este surjectivă.

877. Laturile BA şi BC ale dreptunghiului fiind perpendiculare, avem $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$. Folosind teorema lui Pitagora în triunghiul ABD obţinem că $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{16 \cdot 3 + 16} = \sqrt{64} = 8$. Astfel $\cos(\widehat{ABD}) = \dfrac{AB}{BD} = \dfrac{4\sqrt{3}}{8} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Atunci $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD} = BA \cdot BD \cdot \cos(\widehat{ABD}) = 4\sqrt{3} \cdot 8 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 48$.

878. Dreptele d_1 şi d_2 sunt paralele, dacă coeficienţii lui x şi y în ecuaţiile dreptelor d_1 şi

d_2 sunt proporţionali, adică $\dfrac{1}{m+1} = \dfrac{-3}{-(2m-3)} \Leftrightarrow 2m-3 = 3m+3 \Leftrightarrow m = -6$. (Altfel, dreptele d_1 şi d_2 sunt paralele, dacă pantele lor sunt egale, adică $\dfrac{1}{3} = \dfrac{m+1}{2m-3} \Leftrightarrow m = -6$).

Dreptele d_2 şi d_3 sunt paralele, dacă coeficienţii lui x şi y în ecuaţiile dreptelor d_2 şi d_3 sunt proporţionali, adică $\dfrac{m+1}{m} = \dfrac{-(2m-3)}{1} \Leftrightarrow m+1 = -2m^2+3m \Leftrightarrow 2m^2-2m+1 = 0$. Discriminantul acestei ecuaţii fiind $\Delta = 4-8 = -4 < 0$, ecuaţia nu are soluţii reale, deci nu există m pentru care dreptele d_2 şi d_3 să fie paralele.

Toate cele trei drepte sunt concurente dacă sistemul de ecuaţii format din ecuaţiile dreptelor admite o singură soluţie. Pentru aceasta, mai întâi determinantul caracteristic al sistemului trebuie să fie 0: $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ m+1 & -2m+3 & 4 \\ m & 1 & m+1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 5m^2-9m+4 = 0$.

Discrimantul acestei ecuaţii este $\Delta = 1 > 0$, deci obţinem două valori reale pentru m, respectiv $m \in \{1, 4/5\}$. Conform $\boxed{\text{A}}$ şi $\boxed{\text{B}}$ pentru aceste valori ale lui m dreptele nu pot să coincidă, deci dreptele sunt concurente pentru două valori ale lui m.

879. T fiind mijlocul segmentului SR este imediată relaţia din $\boxed{\text{B}}$, iar $\boxed{\text{A}}$ este falsă. Afirmaţia $\boxed{\text{C}}$ nu este adevărată deoarece vectorii nenuli $\overrightarrow{PS}$ şi $\overrightarrow{QP}$ au sens opus.

Pentru vectorul $\overrightarrow{RT}$ avem $\overrightarrow{RT} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{RS} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{RP} + \overrightarrow{PS}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{RP} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{PQ}\right) = \dfrac{1}{2}\left[\overrightarrow{RP} + \dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RQ}\right)\right] = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{3}\overrightarrow{RP} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{RQ}\right)$, deci $\boxed{\text{D}}$ este adevărată.

880. Egalitatea dată este echivalentă cu $\dfrac{1}{(x-1)!} = \dfrac{30}{(x+1)!}$, deci $x(x+1) = 30$, de unde rezultă că $x = 5$, deci $\boxed{\textbf{A}}$ şi $\boxed{\textbf{C}}$ sunt adevărate şi $\boxed{\textbf{D}}$ falsă. Numerele C_{6+y}^{y+1} şi C_{6+y}^{6} sunt corect definite pentru orice y şi este adevărată egalitatea $(y+1)C_{6+y}^{y+1} = 6C_{6+y}^{6}$, deci $\boxed{\textbf{B}}$ este falsă.

881. $\cos(3\pi x) = 0 \Leftrightarrow 3\pi x \in \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\} \Leftrightarrow x \in \{\dfrac{1}{6} + \dfrac{k}{3} | k \in \mathbb{Z}\}$. Dar ne interesează doar numărul soluţiilor din intervalul $(0, 2023)$, astfel căutăm numărul soluţiilor întregi al inecuaţiei $0 < \dfrac{1}{6} + \dfrac{k}{3} < 2023 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2} < k < 6069 - \dfrac{1}{2}$. Numărul acelor $k \in \mathbb{Z}$, care satisfac inecuaţiile precedente este 6069, deci $\boxed{\text{D}}$ este adevărată.

882. Determinantul sistemului este $6a$, deci dacă $a \neq 0$, atunci sistemul admite o singură soluţie. În acest caz, scăzând prima ecuaţie din ultima obţinem $ay = a$, deci $y = 1$.

Dacă $a = 0$, atunci prima şi ultima ecuaţie coincid şi sistemul este compatibil nedeterminat.

883. Folosind inducţie matematică, putem arăta uşor că $A^n = \begin{pmatrix} i^n & 2ni^{n-1} \\ 0 & i^n \end{pmatrix}$. Afirmaţia $\boxed{\text{D}}$ nu este adevărată pentru că două puteri consecutive ale lui i nu pot fi reale.

884. Avem $\lim\limits_{n\to\infty} \ln(1+\mathrm{e}^n)\sin\frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln(1+\mathrm{e}^n)}{n} = 1$, deoarece, în baza regulii lui L'Hôpital, avem $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln(1+\mathrm{e}^x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x} = 1$.

885. Cu schimbarea de variabilă $\sqrt{x+1} = t$, $I(a) = \int_1^{\sqrt{a+1}} \frac{2t\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)t} = 2\mathrm{arctg}\, t\Big|_1^{\sqrt{a+1}} = 2\mathrm{arctg}\,\sqrt{a+1} - \frac{\pi}{2}$. Rezultă că $I(2) = 2\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6}$ şi că $\lim\limits_{a\to\infty} I(a) = \frac{\pi}{2}$.

886. Avem $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$, $\lim\limits_{x\to\infty} \big(f(x) - x\big) = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+ax+5}{\sqrt{x^2+1}} - x\right)$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}} - x + a\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{4}{\sqrt{x^2+1}}\right) = a$, deoarece $\lim\limits_{x\to\infty} \big(\sqrt{x^2+1} - x\big) = 0$.

887. Prin calcul se obţine imediat $f'(x) = \frac{x^3-3x+a}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$. Drept urmare, panta dreptei d este $m_d = f'(0) = a$. Rezultă de aici că afirmaţiile $\boxed{\text{A}}$, $\boxed{\text{C}}$ şi $\boxed{\text{D}}$ sunt adevărate, iar afirmaţia $\boxed{\text{B}}$ este falsă.

888. Considerăm funcţia definită prin $g(x) = x^3 - 3x + a$. Atunci f are trei puncte de extrem local dacă şi numai dacă ecuaţia $g(x) = 0$ are trei rădăcini reale. Tabelul de mai jos rezumă variaţia funcţiei g.

x	$-\infty$			-1			1			∞
$g'(x)$		$+$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\nearrow$	$a+2$	$\searrow$	$\searrow$	$a-2$	$\nearrow$	$\nearrow$	∞

Din tabel reiese că ecuaţia $g(x) = 0$ are trei rădăcini reale dacă şi numai dacă $a + 2 > 0$ şi $a - 2 < 0$, adică dacă şi numai dacă $a \in (-2, 2)$.

889. Condiţia $(x*y)*z = x*(y*z)$ este echivalentă cu egalitatea $(a-2023)(z-2023)+a = (a-2023)(x-2023)+a$, care este îndeplinită pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$ dacă şi numai dacă $a = 2023$. Astfel $\boxed{\textbf{A}}$ este adevărată şi $\boxed{\textbf{D}}$ falsă. Pentru $a = 2023$ observăm uşor că 2024 este element neutru ¸ deci $\boxed{\textbf{B}}$ este adevărată. Pe de altă parte, $(\mathbb{R}, *)$ nu poate fi grup deoarece 2023 nu este inversabil, deci $\boxed{\textbf{C}}$ este falsă.

890. Deoarece $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$, rezultă că graficele $\boxed{\text{A}}$ şi $\boxed{\text{C}}$ nu sunt ale funcţiei f. Pe de altă parte, ecuaţia $f(x) = 0$ are doar soluţia $x = -1$, deci graficul lui f nu poate fi decât $\boxed{\text{D}}$.

891. Folosind notaţiile obişnuite pentru un triunghi ABC putem presupune că $a > b > c$. Atunci $m(\widehat{A}) = 2m(\widehat{C})$ şi $b = c+1$, $a = c+2$, $c \in \mathbb{N}^*$. Din teorema sinusului avem:

$$\frac{c+2}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \Leftrightarrow \frac{c+2}{\sin 2C} = \frac{c}{\sin C} \Leftrightarrow \frac{c+2}{2\sin C\cos C} = \frac{c}{\sin C} \Leftrightarrow \cos C = \frac{c+2}{2c}. \quad (1)$$

Pe de altă parte din teorema cosinusului obţinem

$$\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{(c+2)^2+(c+1)^2-c^2}{2(c+2)(c+1)} = \frac{c^2+6c+5}{2(c^2+3c+2)} \qquad (2)$$

Din relaţiile (1) şi (2) rezultă ecuaţia:

$$\frac{c+2}{c} = \frac{c^2+6c+5}{c^2+3c+2} \Leftrightarrow c^3+5c^2+8c+4 = c^3+6c^2+5c \Leftrightarrow c^2-3c-4 = 0.$$

De aici avem $\Delta = 9+16 = 25$ şi $c_{1,2} = \frac{3\pm5}{2}$. Deci $c_1 = 4$ şi $c_2 = -1 < 0$. Astfel laturile tringhiului sunt $c = 4$, $b = 5$ şi $a = 6$. Perimetrul triunghiului este 15.

892. Folosind condiţiile date, putem scrie $a = b-r, c = b+r$ şi $a-1 = \dfrac{b}{r}$, respectiv $c+4 = b\cdot r$. Astfel ajungem la sistemul de ecuaţii $\begin{cases} br - r^2 - r & = b \\ b + r + 4 & = br. \end{cases}$ Adunând ecuaţiile de mai sus, obţinem ecuația $r^2-4 = 0$, de unde $r \in \{-2, 2\}$. Pentru pentru $r = -2$ obţinem $b = -\dfrac{2}{3}$ iar pentru $r = 2$ obţinem $b = 6$. Progresiile date a, b, c sunt $4, 6, 8$, respectiv $\dfrac{4}{3}, -\dfrac{2}{3}, -\dfrac{8}{3}$.

893. $\dfrac{12133}{6} = 2022 + \dfrac{1}{6}$ deci $\dfrac{12133}{6}\pi = 2022\pi + \dfrac{\pi}{6}$. $\sin\left(2022\pi + \dfrac{\pi}{6}\right) = \sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$.

894. Coordonatele centrului de greutate sunt: $G\left(\dfrac{2+(-1)+(-3)}{3}, \dfrac{3+1+4}{3}\right) = G\left(-\dfrac{2}{3}, \dfrac{8}{3}\right)$. Mijlocul segmentului AG are coordonatele: $F\left(\dfrac{2+(-2/3)}{2}, \dfrac{3+8/3}{2}\right) =$

$F\left(\frac{2}{3}, \frac{17}{6}\right)$.

895. Mulţimea soluţiilor este: $\{\arcsin\frac{2}{3}, \pi - \arcsin\frac{2}{3}\}$, mulţime cu două elemente.

896. Din condiția de existență a radicalului avem $x^2 - 3 \geq 0$ şi $x^2 - 5 \geq 0$, deci $x \in (-\infty, -\sqrt{5}] \cup [\sqrt{5}, +\infty)$. Prin ridicare la pătrat obţinem $x^2 - 3 = (x^2-5)^2 \iff x^2 - 3 = x^4 - 10x^2 + 25 \iff x^4 - 11x^2 + 28 = 0$. Prin introducerea notaţiei $y = x^2$ ecuaţia anterioră se poate scrie în formă $y^2 - 11y + 28 = 0$. Această ecuaţie are soluţii $y_1 = 4$ şi $y_2 = 7$. De aceea soluţiile ecuaţiei $x^4 - 11x^2 + 28 = 0$ sunt $x_1 = -2$, $x_2 = 2$, $x_3 = -\sqrt{7}$ şi $x_4 = \sqrt{7}$. Dintre aceste soluţii numai x_3 şi x_4 satisfac condiţia $x^2 - 5 \geq 0$, deci ecuaţia $\sqrt{x^2-3} = x^2 - 5$ are două soluţii şi $\boxed{\text{A}}$, $\boxed{\text{C}}$ sunt false, iar $\boxed{\text{B}}$ adevărată. O soluţie este negativă, deci $\boxed{\text{D}}$ este falsă.

897. $T_{k+1} = C_{300}^{k} 2^{150-\frac{k}{2}} \cdot 5^{\frac{k}{3}}$, $0 \leq k \leq 300$.

Pentru ca termenii să fie raţionali este necesar k să fie divizibil atât cu 2 cât şi cu 3, deci k divizibil cu 6. Aşadar $k \in \{0, 6, 12, \ldots, 300\}$. Sunt 51 de termeni raţionali.

898. Observăm că $A^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$, unde $(F_n)_{n\geq 0}$ este șirul lui Fibonacci definit prin $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ și $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, $\forall n \geq 1$. Suma elementelor în A^n este $S_n = (F_{n+1} + F_n) + (F_n + F_{n-1}) = F_{n+2} + F_{n+1} = F_{n+3}$. Prin urmare $S_5 = F_8 = 21$. Rezultatul poate fi obținut și prin calcularea matricelor A^2, A^4 şi $A^5 = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$.

899. Avem $x_1 > 2x_2 > 3x_3 > ... > nx_n \quad \Rightarrow \quad 0 < x_n < \frac{x_1}{n} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

900. Funcţia f este continuă pe intervalele $(-\infty, 0)$ şi $(0, \infty)$, deci trebuie studiată continuitatea în punctul $x = 0$. Avem $\lim_{x\nearrow 0} f(x) = \lim_{x\nearrow 0} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} = 0$, $\lim_{x\searrow 0} f(x) = \lim_{x\searrow 0}(x^3 + x + \alpha) = \alpha = f(0)$. Folosind definiţia continuităţii cu ajutorul limitelor laterale, deducem că $\alpha = 0$.

901. Ţinând cont de faptul că $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}$, obţinem ecuaţia tangentei $y - f(9) = f'(9)(x-9) \Leftrightarrow y - 2 = \frac{1}{12}(x-9) \Leftrightarrow 12y - x - 15 = 0$.

902. $4 \cdot \sin x \cdot \cos^3 x - 4 \cdot \sin^3 x \cdot \cos x = 1 \Leftrightarrow 4 \cdot \sin x \cdot \cos x \cdot (\cos^2 x - \sin^2 x) = 1 \Leftrightarrow 2 \cdot \sin 2x \cdot \cos 2x = 1 \Leftrightarrow \sin 4x = 1 \Leftrightarrow 4x \in \{\frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \Leftrightarrow x \in \{\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Deci afirmaţia $\boxed{\text{B}}$ este adevărată iar $\boxed{\text{A}}$, $\boxed{\text{C}}$ şi $\boxed{\text{D}}$ sunt false.

903. Punctul C este simetricul lui A faţă de O, deci avem $x_O = \dfrac{x_A + x_C}{2} \Leftrightarrow 3 = \dfrac{0 + x_C}{2} \Leftrightarrow x_C = 6$ şi $y_O = \dfrac{y_A + y_C}{2} \Leftrightarrow 4 = \dfrac{-4 + y_C}{2} \Leftrightarrow y_C = 12$. Panta dreptei CD este egală cu panta dreptei AB, adică este 3. Deci ecuaţia dreptei CD este $y - 12 = 3(x - 6) \Leftrightarrow 3x - y - 6 = 0$.

904. Funcţia f are perioada $\dfrac{1}{2}$, deoarece pentru orice $x \in \mathbb{R}$ avem $f\left(x + \dfrac{1}{2}\right) = 2\left(x + \dfrac{1}{2}\right) - \left[2\left(x + \dfrac{1}{2}\right)\right] = 2x + 1 - [2x + 1] = 2x - [2x] = f(x)$. Aceasta arată şi că f nu este injectivă şi nici surjectivă, deoarece imaginea funcţiei f coincide cu imaginea restricţiei lui f pe intervalul $[0, \frac{1}{2}]$, deci $2 \notin \operatorname{Im} f$. Cum $f(\dfrac{1}{8}) = \dfrac{1}{4}$ şi $f(-\frac{1}{8}) = \frac{3}{4}$, funcţia f nu este pară.

905. Se ştie că $i^{4k} = 1, i^{4k+1} = i, i^{4k+2} = -1, i^{4k+3} = -i$ pentru orice $k \in \mathbb{N}$. Considerăm sumele intermediare:

$s_1 = i + 2i^2 + 3i^3 + 4i^4 = 2 - 2i\,,$

$s_2 = 5i^5 + 6i^6 + 7i^7 + 8i^8 = 2 - 2i\,,$

$\ldots$

$s_{505} = 2017i^{2017} + 2018i^{2018} + 2019i^{2019} + 2020i^{2020} = 2 - 2i.$

Avem $S_{2020} = s_1 + s_2 + \ldots + s_{505} = 505(2 - 2i) = 1010(1 - i)$, deci S_{2020} nu este un număr real, iar $|S_{2020}| = 1010\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, adică $|S_{2020}|$ este un număr iraţional.

Scriem $S_{2022} = S_{2020} + 2021i^{2021} + 2022i^{2022} = 1010(1-i) + 2021i - 2022 = -1012 + 1011i$, deci partea imaginară a lui S_{2022} este egală cu 1011, iar $|S_{2022}| = \sqrt{(-1012)^2 + 1011^2} \neq 1011$.

906. Fie $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ o soluţie pentru acest sistem. Dacă notăm cu $A = \log_{225} x$ şi $B = \log_{64} y$, atunci din prima ecuaţie deducem $A + B = 0 \Rightarrow B = -A$. Folosind a doua ecuaţie deducem $\dfrac{1}{A} - \dfrac{1}{B} = \dfrac{1}{A} + \dfrac{1}{A} = 1$, deci $A = 2$ şi $B = -2$. Aşadar, $\log_{225} x = 2$, deci $x = 225^2 = 15^4$. Similar, $\log_{64} y = -2$, deci $y = 64^{-2} = 2^{-12}$.

Obţinem atunci că expresia cerută $\log_{30}\left(x^3\right) - \log_{30} y = \log_{30}(15^{12} \cdot 2^{12}) = 12$, deci răspunsul corect este $\boxed{B}$.

907. Putem transcrie ecuaţia în $6 \cdot \left(\dfrac{3}{2}\right)^x - 1 = \left(\dfrac{3}{2}\right)^{2x}$. Notând $t = \left(\frac{3}{2}\right)^x$, obţinem ecuaţia de gradul doi $t^2 - 6t + 1 = 0$, cu soluţiile $t_{1,2} = 3 \pm 2\sqrt{2}$. Dacă $t_1 = \left(\frac{3}{2}\right)^{x_1}$ şi $t_2 = \left(\frac{3}{2}\right)^{x_2}$, atunci $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{x_1+x_2} = t_1 \cdot t_2 = 9 - 8 = 1$, deci $x_1 + x_2 = 0$.

908. Distanţa de la A la dreapta dată este $d = \dfrac{|1-3|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \sqrt{2}$. Diagonala a doua a pătratului trece prin punctul A şi este perpendiculară pe diagonala dată. Prin urmare $d_2 : y - 1 = (-1)(x-3)$, deci $d_2 : x + y - 4 = 0$. Aria pătratului este egală cu jumătate din pătratul lungimii diagonalei, deci $\dfrac{(2\sqrt{2})^2}{2} = 4$. Punctul $C(1,3)$ este simetricul lui A în raport cu diagonala dată.

909. Din teorema medianei deducem că $AM^2 = \frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$. Folosind ipoteza $AM = c$ deducem $a^2 + 2c^2 = 2b^2$. Deci răspunsul $\boxed{\mathbf{A}}$ este fals şi răspunsul $\boxed{\mathbf{B}}$ este adevărat. Utilizând în relaţia anterioară, teorema cosinusului pentru latura AB obţinem $3a = 4b\cos C$. Deci afirmaţia $\boxed{\mathbf{D}}$ este adevărată şi afirmaţia $\boxed{\mathbf{C}}$ falsă.

910. Prin calcul: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{\sin^2 x}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x - x^2}{x^2\sin^2 x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x}{x^2 \sin x}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x + x}{\sin x} =$ $2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x}{x^2\sin x} = 2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\sin x}{2\sin x + 4x\cos x - x^2\sin x} = 2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\cos x}{6\cos x - 6x\sin x - x^2\cos x} =$ $-\dfrac{1}{3}$.

911. Din faptul că $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} - \dfrac{1}{1+x^2} = 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, rezultă că funcţia f este constantă pe $\mathbb{R}$. Prin urmare, $f(x) = f(0) = \dfrac{\pi}{2}$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, de unde rezultă imediat că doar afirmaţiile $\boxed{\mathbf{B}}$ şi $\boxed{\mathbf{D}}$ sunt adevărate.

912. Considerăm funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = xe^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Avem $f'(x) = (x+1)\mathrm{e}^x$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Tabelul următor rezumă variaţia lui f.

x	$-\infty$			-1			∞
$f'(x)$		$-$	$-$	0	$+$	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$\searrow$	$-\frac{1}{\mathrm{e}}$	$\nearrow$	$\nearrow$	∞

Cum $-\dfrac{1}{\mathrm{e}} < -\dfrac{1}{3} < 0$, din tabel reiese că ecuaţia $xe^x = -\dfrac{1}{3}$ are exact două soluţii.

913. $\dfrac{BA'}{BC} = \dfrac{CB'}{CA} = \dfrac{AC'}{AB} = \alpha \in [0,1]$. Din formula ariei cu sinus, ariile triunghiurilor $AB'C'$, $A'BC'$ şi $A'B'C$ sunt egale cu $\alpha(1-\alpha)\mathcal{A}_{ABC}$. Rezultă $\mathcal{A}_{A'B'C'} = \mathcal{A}_{ABC} - 3\alpha(1-\alpha)\mathcal{A}_{ABC}$, deci $\dfrac{\mathcal{A}_{A'B'C'}}{\mathcal{A}_{ABC}} = 1 - 3\alpha(1-\alpha) = 3\alpha^2 - 3\alpha + 1 = 3\left(\alpha - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{4} \in \left[\dfrac{1}{4}, 1\right]$.

914. Funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definită prin $f(t)=\mathrm{e}^{t^2}$, este continuă, deci admite primitive. Fie F o primitiva a lui f. Avem $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\int_1^{\operatorname{tg}x}\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t}{\int_1^{\operatorname{ctg}x}\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{F(\operatorname{tg}x)-F(1)}{F(\operatorname{ctg}x)-F(1)}=$ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{f(\operatorname{tg}x)(1+\operatorname{tg}^2x)}{f(\operatorname{ctg}x)(-1-\operatorname{ctg}^2x)}=-1.$

915. Rescriem relaţia dată astfel: $\sin(B)-\sin(C)=\cos(C)-\cos(B)$. Transformăm diferenţele în produse şi obţinem: $2\sin\dfrac{B-C}{2}\cos\dfrac{B+C}{2}=2\sin\dfrac{B-C}{2}\sin\dfrac{B+C}{2}$ sau $\sin\dfrac{B-C}{2}\left(\cos\dfrac{B+C}{2}-\sin\dfrac{B+C}{2}\right)=0$. Din $\sin\dfrac{B-C}{2}=0$ se obţine $B-C=0$, deci triunghiul este isoscel. Relaţia $\cos\dfrac{B+C}{2}-\sin\dfrac{B+C}{2}=0$ poate fi rescrisă $\cos\dfrac{B+C}{2}=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{B+C}{2}\right)$ de unde $B+C=\dfrac{\pi}{2}$, deci în acest caz triunghiul este dreptunghic.

916. Se observă că $a_n=\dfrac{1}{n}\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+\sqrt{1+\dfrac{2}{n}}+\cdots+\sqrt{1+\dfrac{n}{n}}\right)$ pentru fiecare $n\in\mathbb{N}^*$. Fie $f\colon[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{1+x}$. Pentru fiecare $n\in\mathbb{N}^*$ se consideră diviziunea $\Delta_n=(0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},\ldots,\frac{n-1}{n},1)$ a intervalului $[0,1]$ şi $\xi_n=(\frac{1}{n},\frac{2}{n},\ldots,\frac{n-1}{n},1)$ sistemul de puncte intermediare asociat diviziunii Δ_n. Pentru fiecare $n\in\mathbb{N}^*$ termenul a_n este suma Riemann asociată funcţiei f, diviziunii Δ_n şi sistemului de puncte intermediare ξ_n, adică $a_n=\sigma_{\Delta_n}(f,\xi_n)$. Întrucât $\lim\limits_{n\to\infty}||\Delta_n||=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$, integrabilitatea funcţiei f implică

$$\ell=\lim_{n\to\infty}\sigma_{\Delta_n}(f,\xi_n)=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\sqrt{1+x}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1=\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1).$$

Rezultă că doar afirmaţia $\boxed{\mathbf{C}}$ este adevărată.

917. Se observă că dreptele d_1 si d_2 sunt perpendiculare având pantele $m_1=\dfrac{2}{3}$ şi $m_2=-\dfrac{3}{2}$ şi nu trec prin punctul A. Astfel celelalte laturi ale dreptunghiului trec prin A şi sunt paralele cu d_1, respectiv d_2. Dreapta paralelă dusă prin A la d_1 are ecuaţia: $2x-3y-13=0$ sau $y+3=\dfrac{2}{3}(x-2)$. Dreapta paralelă dusă prin A la d_2 are ecuaţia: $y+3=-\dfrac{3}{2}(x-2)$ sau $3x+2y=0$.

918. Matricea sistemului şi matricea extinsă a sistemului sunt $A=\begin{pmatrix}2&\alpha&2\\4&-1&5\\2&10&1\end{pmatrix}$,

respectiv $\overline{A} = \begin{pmatrix} 2 & \alpha & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 5 & 1 \\ 2 & 10 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Avem $\det(A) = 6\alpha - 18 = 0$ dacă şi numai dacă $\alpha = 3$, deci sistemul este compatibil dacă $\alpha \neq 3$. În cazul când $\alpha = 3$ avem $\operatorname{rang}(A) = 2$ şi $\operatorname{rang}(\overline{A}) = 3$, deci din teorema Kronecker-Capelli urmează că sistemul este incompatibil pentru $\alpha = 3$.

919. Pentru $x = \dfrac{1}{4}$ şi $y = \dfrac{3}{2}$ expresia din numitor este 0, deci $\boxed{\textbf{A}}$ este fals. Dacă $0 < x, y < 1$, atunci $xy > 0$ şi $(1-x)(1-y) > 0$; adunând, obţinem $2xy - x - y + 1 > 0$; de aici rezultă uşor că $0 < x * y < 1$, deci $\boxed{\textbf{B}}$ este adevărat. Din condiţia $x * e = x$ pentru orice $x \in (0,1)$ obţinem că elementul neutru este $e = \dfrac{1}{2}$, deci $\boxed{\textbf{C}}$ este adevărat. Din $x * x' = \dfrac{1}{2}$ obţinem $x' = 1 - x$, deci $\boxed{\textbf{D}}$ este adevărat.

920. Facem schimbarea de variabilă $x = \dfrac{1}{t}$. Atunci $\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ şi $\displaystyle\int_{\frac{1}{2022}}^{2022} \frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x =$

$$\int_{2022}^{\frac{1}{2022}} \frac{\ln \frac{1}{t}}{1+\frac{1}{t^2}} \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t = \int_{\frac{1}{2022}}^{2022} \frac{\ln \frac{1}{t}}{t^2+1}\mathrm{d}t = \int_{\frac{1}{2022}}^{2022} \frac{-\ln t}{t^2+1}\mathrm{d}t = -\int_{\frac{1}{2022}}^{2022} \frac{\ln t}{t^2+1}\mathrm{d}t = -\int_{\frac{1}{2022}}^{2022} \frac{\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x.$$

În consecinţă, avem $\displaystyle\int_{\frac{1}{2022}}^{2022} \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx = 0.$

921. Fie q raţia progresiei geometrice. Rezulă că $qxy = yz$ şi $qyz = zx$, adică $q^2xy = zx$. Prin urmare, $z = q^2y$, deci $\boxed{\textbf{A}}$ şi $\boxed{\textbf{B}}$ sunt adevărate. Pentru $y = 1$, $x = 2$ şi $z = 4$ condiţiile cerute sunt satisfăcute, y şi z sunt pătrate perfecte iar x nu este, deci răspunsurile $\boxed{\text{C}}$ şi $\boxed{\text{D}}$ sunt false.

922. Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Atunci $x_n = \displaystyle\int_0^2 \left(\frac{2-x}{2+x}\right)^{2n-1} \cdot \frac{1}{(2+x)^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{4}\int_0^2 \left(\frac{2-x}{2+x}\right)^{2n-1} \cdot$ $\displaystyle\left(\frac{2-x}{2+x}\right)'\mathrm{d}x = -\frac{1}{8n}\left(\frac{2-x}{2+x}\right)^{2n}\Bigg|_0^2 = \frac{1}{8n}$. Întrucât $184 = 8 \cdot 23$, rezultă că doar afirmaţiile $\boxed{\textbf{A}}$ şi $\boxed{\textbf{C}}$ sunt adevărate.

923. Din proprietăţile de bază ale progresiilor geometrice avem $E = 4r^2 + 4r + 1 = (2r+1)^2$. Rezultă că $r = -\dfrac{1}{2}$, ceea ce invalidează afirmaţia $\boxed{\text{A}}$. Avem mai departe: $\left|\dfrac{a_{12}}{a_9}\right| = |r^3| = \dfrac{1}{8}$, deci $\boxed{\text{B}}$ este adevărată. $a_5a_2 + 2a_1a_5 + a_0a_5 = a_5(a_2 + 2a_1 + a_0) =$

$a_0r^5(a_0r^2+2a_0r+a_0) = a_0^2r^5(r^2+2r+1) = a_0^2 \cdot \frac{-1}{32} \cdot \frac{1}{4} < 0$, ceea ce contrazice $\boxed{\text{C}}$.
$a_na_{n+1} = a_n^2 \cdot r = -\frac{1}{2}a_n^2 < 0$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, ceea ce înseamnă că $\boxed{\text{D}}$ este adevărată.

924. Distanţa de la punctul $P(0,a)$ la dreapta d_1 este dată de: $d(P,d_1) = \frac{|-3a+1|}{\sqrt{10}}$,

Distanţa de la punctul $P(0,a)$ la dreapta d_2 este dată de: $d(P,d_2) = \frac{|a+2|}{\sqrt{10}}$. Condiţia ca cele două distanţe să fie egale este îndeplinită pentru $a \in \{-\frac{1}{4}, \frac{3}{2}\}$.

925. Înlocuind şi simplificând obţinem ecuaţia de gradul doi $x^2 - 10x + 9 = 0$, cu rădăcinile 1 şi 9. Convine doar soluţia $x = 9$, din cauza condiţiilor asupra aranjamentelor şi combinărilor, $x \in \mathbb{N}, x \geq 6$.

926. $T_{k+1} = C_{2021}^k \left(\sqrt{x}\right)^{2021-k} (-1)^k \left(\frac{1}{\sqrt[5]{x}}\right)^k = (-1)^k C_{2021}^k x^{\frac{2021-k}{2} - \frac{k}{5}}$.

Din ecuaţia $\frac{2021-k}{2} - \frac{k}{5} = 6$ rezultă $7k = 5 \cdot 2009$, deci $k = 1435$. Astfel coeficientul binomial este C_{2021}^{1435} care este egal cu C_{2021}^{586}.

927. Pentru a verifica egalităţile vectoriale de mai sus, încercăm să transformăm membrul stâng al egalităţii astfel încât în el să apară vectorii din membrul drept.
Astfel, pentru a verifica veridicitatea relaţiei vectoriale de la punctul $\boxed{\text{A}}$ $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}$ scriem $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} + 2\overrightarrow{AC}$.
Pentru a verifica veridicitatea relaţiei vectoriale de la punctul $\boxed{\text{B}}$ $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{0}$ scriem $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{PD} + \overrightarrow{DQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}) = \overrightarrow{0}$. Pentru a verifica veridicitatea relaţiei vectoriale de la punctul $\boxed{\text{C}}$ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$ scriem $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$. Pentru a verifica veridicitatea relaţiei vectoriale de la punctul $\boxed{\text{D}}$ $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CA}$ scriem $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC}$.

928. Avem $a_n = \frac{(n+1)(n+2)\cdots(2n)}{n^n}$, deci $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(n+1)(n+2)\cdots(2n)}{n^n} \cdot \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+2)\cdots(2n)(2n+1)(2n+2)} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{n+1}{2(2n+1)}$. Rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{e}{4} < 1$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ şi prin urmare $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

929. Folosind proprietăţile logaritmilor, avem: $\log_6 16 = 4\log_6 2 = \frac{4}{\log_2 6} = \frac{4}{1+\log_2 3}$.

Din relaţia $a = \log_{12} 27 = 3\log_{12} 3 = \frac{3}{\log_3 12} = \frac{3}{1+2\log_3 2} = \frac{3\log_2 3}{2+\log_2 3} \Rightarrow \log_2 3 = \frac{2a}{3-a}$.

Prin urmare, obţinem $\log_6 16 = \dfrac{4}{1+\log_2 3} = \dfrac{4}{1+\frac{2a}{3-a}} = \dfrac{4(3-a)}{3+a}$.

930. Se verifică uşor că $-1 < \dfrac{x+y}{1+xy} < 1$ pentru orice $x, y \in (-1,1)$. Avem $(x*y)*z = \dfrac{x+y+z+xyz}{1+xy+yz+zx} = x*(y*z)$, deci $\boxed{\text{C}}$ este adevărată. Pe baza acestei formule calculăm $\dfrac{1}{3}*(\dfrac{1}{3}*\dfrac{1}{3}) = \dfrac{7}{9}$, deci $\boxed{\text{B}}$ este falsă. Din $x*e = x$ pentru orice $x \in (-1,1)$ obţinem că elementul neutru este 0, deci $\boxed{\text{A}}$ este falsă. Pentru $x \in (-1,1)$, din egalitatea $x*x' = 0$ obţinem că simetricul lui x este $x' = -x$, deci $\boxed{\text{D}}$ este falsă.

931. Funcţia f este continuă pe $(-\infty,0)$ şi pe $(0,\infty)$, iar $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} x^4 = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} bx^3 = 0 = f(0)$. Deci, f este continuă pe $\mathbb{R}$. Dacă $a=1$ şi $b=-1$, atunci funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este definită prin $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f(x) = \begin{cases} x^4+1, & x\in(-\infty,0],\\ -x^3, & x\in(0,\infty).\end{cases}$ Evident f este strict descrescătoare pe $(-\infty,0]$, respectiv pe $(0,\infty)$. Fie $x_1\in(-\infty,0]$ şi $x_2\in(0,\infty)$, deci $x_1<x_2$. Atunci $f(x_1) = x_1^4+1 \geq 1 > 0 \geq f(x_2) = -x_2^3$. Prin urmare, f este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$. Dacă $a=1$ şi $b=-1$, atunci $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} x^4+1 = f(0) = 1 \neq \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} -x^3 = 0$. Deci, f este discontinuă în 0.

Oricare ar fi $a\in\mathbb{R}$, avem $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ şi oricare ar fi $b\in(-\infty,0)$, avem $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$. Aşadar, pentru $a\in\mathbb{R}, b\in(-\infty,0)$ avem $\lim_{x\to-\infty} f(x) \neq \lim_{x\to\infty} f(x)$.

932. Ştiind că x şi y aparţin cadranului III, diferenţa lor este în intervalul $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$, astfel $\boxed{\text{D}}$ este falsă. Avem $\sin x = -\sqrt{1-\dfrac{1}{49}} = -\dfrac{4\sqrt{3}}{7}$, $\sin y = -\sqrt{1-\dfrac{169}{196}} = -\dfrac{3\sqrt{3}}{14}$. Astfel $\cos(x-y) = \dfrac{1}{7}\cdot\dfrac{13}{14} + \dfrac{4\sqrt{3}}{7}\cdot\dfrac{3\sqrt{3}}{14} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x-y \in \left\{-\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{3}\right\}$. Dar $\sin(x-y) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, deci $x-y = \frac{\pi}{3}$. Astfel $\boxed{\text{A}}$, $\boxed{\text{B}}$ şi $\boxed{\text{D}}$ sunt false iar $\boxed{\text{C}}$ este adevărată.

933. Afirmaţia $\boxed{\text{A}}$ este falsă, pentru că $f_n(1) = 1$, sau pentru că $f_n(2) = 0$. Afirmaţia $\boxed{\text{B}}$ este falsă, pentru că $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(1) = 1$. Afirmaţia $\boxed{\text{C}}$ este adevărată, pentru că subşirul $\Big(f_{2k}(4)\Big)_{k\geq 1}$ este crescător, deoarece $f_{2k}(4) = (-2)^{2k} = 4^k$, iar $\Big(4^k\Big)_{k\geq 1}$ este şir crescător. Afirmaţia $\boxed{\text{D}}$ este falsă, pentru că subşirul $\Big(f_{2k}(4)\Big)_{k\geq 1}$ are limita $\lim\limits_{k\to\infty} f_{2k}(4) = \infty$, iar subşirul $\Big(f_{2k+1}(4)\Big)_{k\geq 1}$ are limita $\lim\limits_{k\to\infty} f_{2k+1}(4) = -\infty$.

934. Teorema sinusurilor implică $\dfrac{\sqrt{3}}{\sin A} = \dfrac{b}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{c}{\sin C} = 2$, deci $\sin A = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Triunghiul fiind nedegenerat $m(\widehat{A}) \neq 120°$, deci $m(\widehat{A}) = 60°$. Astfel $m(\widehat{C}) = 60°$, $b = c = \sqrt{3}$, deci triunghiul este echilateral. Perimetrul este $3\sqrt{3}$. $\mathcal{A}_{\triangle ABC} = \dfrac{3\sqrt{3}}{4} = \dfrac{p \cdot r}{2} \implies r = \dfrac{1}{2}$ (lungimea razei cercului înscris).

935. Fie $A(1, y) \in d_1$, $B(x, 1) \in d_2$, unde $x, y \in \mathbb{R}$. Dacă O, A, B, C sunt vârfurile unui pătrat cu diagonala $[AB]$, atunci $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = x + y = 0$ şi $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$. Aşadar, $A(1, -x)$, $B(x, 1)$ şi $C(1+x, 1-x)$, unde $x \in \mathbb{R}$. $C \in d : x+y = 2$. $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1+x^2}\sqrt{2} \geq \sqrt{2}$. $\mathcal{A}_{OACB} = 1 + x^2 \geq 1$.

936. Funcţia f este derivabilă pe $\mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}$; ea nu este derivabilă în punctele -2 şi 0, pentru că valoarea derivatei în aceste puncte nu este finită. Pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}$ avem că $f'(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{(x+2)^2}}{3\sqrt[3]{x^2(x+2)^2}} = -\dfrac{4x+4}{3\sqrt[3]{x^2(x+2)^2}(\sqrt[3]{x^4} + \sqrt[3]{x^2(x+2)^2} + \sqrt[3]{(x+2)^4})} \Rightarrow$ $f'(-1) = 0$, $f'(x) > 0$, oricare ar fi $x \in (-\infty, -1) \setminus \{-2\}$, şi $f'(x) < 0$, oricare ar fi $x \in (-1, \infty) \setminus \{0\}$. Prin urmare funcţia f este strict crescătoare pe intervalul $(-\infty, -1]$ şi strict decrescătoare pe intervalul $[-1, \infty)$. Se obţine că punctul -1 este singurul punct de extrem local al funcţiei f (este un punct de maxim global) şi că funcţia f nu are puncte de minim global.

Funcţia f fiind strict descrescătoare pe intervalul $(0, \infty)$, rezultă că $f(5) < f(3)$, de unde se obţine $\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{7} < 2\sqrt[3]{5}$.

937. Fie C un cerc din $\mathcal{C}$ cu centrul $M(x_M, y_M)$. Deoarece d este mediatoarea segmentului $[AB]$, raza lui C este $r = d(A, M) = d(B, M)$, deci, avem $r = d(A, M) = \sqrt{5(y_M^2 - 6y_M + 10)}$. Aceasta este o funcţie convexă, iar minimul ei se obţine pentru $y_M = 3$. Deci, cea mai mică rază a unui cerc din $\mathcal{C}$ este $\sqrt{5}$. Prin urmare $\boxed{\text{A}}$ este falsă iar $\boxed{\text{B}}$ este adevărată. Dacă cercul C intersectează fiecare axă de coordonate în exact un punct, atunci centrul lui, M, este la distanţe egale faţă de cele două axe. Cum punctele A şi B sunt în primul cadran şi cercul trebuie să fie în primul cadran, adică centrul cercului are coordonatele $M = M(r, r)$ cu $r > 0$. Dar M este pe dreapta d, deci $r - 2r = 2$ şi obţinem o contradicţie cu $r > 0$, deci $\boxed{\text{C}}$ este falsă. Triunghiul ABD este isoscel şi dreptunghic, deci centrul cercului circumscris este mijlocul ipotenuzei, adică este punctul $O_1(6, 2)$. Dar $O_1 \in d$, deci $\boxed{\text{D}}$ este adevărată.

938. Matricea X care verifică (1), dacă există, este matrice coloană de forma $X =$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$. Rezultă imediat că varianta de răspuns $\boxed{\text{A}}$ este adevărată. Pentru ca X din (2) să fie o soluţie a ecuaţiei (1) este necesar şi suficient ca $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ să fie o soluţie a sistemului de 3 ecuaţii liniare cu 4 necunoscute

$$\begin{cases} 2x_1 + 3ax_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 + 2x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 1 \end{cases}. \tag{3}$$

Matricele

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3a & 1 & -1 \\ 1 & 2 & a & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \text{ şi } \overline{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3a & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & a & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

sunt matricea sistemului (3), respectiv matricea extinsă a sistemului (3), iar Teorema Kronecker-Capelli ne spune că sistemul (3) este compatibil dacă şi numai dacă $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \overline{A}$. Cum minorul $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5$, ,,decupat” din prima şi ultima coloană a lui A, este nenul, $\operatorname{rang} A \geq 2$. Putem borda acest minor în două moduri pentru a obţine un minor de ordinul 3 al lui A. Avem $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & a & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} \overset{c_1+2c_3}{\underset{c_2+c_3}{=}} \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 5 & a+2 & 2 \\ 7 & 7 & 3 \end{vmatrix} = -7(5-a-2) = 7(a-3)$.

Dacă $a \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$, atunci $\operatorname{rang} A = 3 = \operatorname{rang} \overline{A}$ şi astfel afirmaţia $\boxed{\text{B}}$ este adevărată.

Dacă $a = 3$, pentru a stabili rangul lui A mai trebuie calculat minorul de ordinul 3

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \cdot 3 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 9 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \overset{l_1-2l_3}{\underset{l_2-l_3}{=}} \begin{vmatrix} 0 & 7 & -7 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \overset{l_1=7l_2}{=} 0.$$

Rezultă $\operatorname{rang} A = 2$ şi pentru a afla rangul matricei $\overline{A}$ trebuie calculat minorul său de ordinul 3 (care este, în acest caz, singurul minor caracteristic corespunzător minorului principal $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ al sistemului (3)) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} \overset{c_1-c_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -1$. Acest minor fiind nenul, rang $\overline{A} = 3 \neq 2 =$ rang A. Aşadar, sistemul (3) şi, implicit, ecuaţia (1) au soluţii dacă şi numai dacă $a \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$ iar $\boxed{\text{C}}$ este falsă.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3a & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \overset{l_1-2l_3}{\underset{l_2-l_3}{\Leftrightarrow}} \begin{vmatrix} 0 & 3a-2 & -7 \\ 0 & 1 & a-4 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 3a^2 - 14a + 15 = 0 \Leftrightarrow a \in \left\{\frac{5}{3}, 3\right\}.$$

Cum pentru $a = \frac{5}{3}$ ecuaţia (1) are soluţie, sistemul (3) fiind compatibil, afirmaţia $\boxed{\text{D}}$ este falsă.

939. Avem $\ell = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \left[\left(1 + (\sin x + \cos x - 1)\right)^{\frac{1}{\sin x + \cos x - 1}}\right]^{(\sin x + \cos x - 1)\operatorname{tg} x} = e^L$, unde $L = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x}(\sin x + \cos x - 1) = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x + \cos x - 1}{\cos x} = 1$, cu ajutorul regulii lui L'Hôpital. Drept urmare, avem $\ell = e$.

940. Din ecuaţia dată obţinem $x = 2y + 1$. Expresia dată se poate scrie ca $6y^2 + 4y + 1$, $y \in \mathbb{R}$, care îşi atinge valoarea minimă pentru $y = -\frac{1}{3}$. Obţinem $v = \frac{1}{3}$.

941. Condiţia existenţei unui punct comun este echivalentă cu condiţia ca sistemul format de cele trei ecuaţii cu două necunoscute să fie compatibil, adică: $\Delta \equiv \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = 0$. Dacă adăugăm coloanele 2 şi 3 la prima coloană şi scoatem factorul comun $(a+b+c)$, ecuaţia de mai sus se poate scrie $(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & c & a \\ 1 & a & b \end{vmatrix} = 0$ sau $(a+b+c)(ab+bc+ca-a^2-b^2-c^2) = 0$. Astfel, determinantul se anulează dacă unul dintre factori se anulează, ceea ce înseamnă că primele două afirmații sunt adevărate. Menţionăm că a doua afirmaţie se poate realiza doar dacă $a = b = c$.

Pe de altă parte, se poate verifica imediat, prin calcul direct, că determinantul este egal cu $\Delta = 3abc - a^3 - b^3 - c^3$, deci şi cea de-a treia implicaţie este adevărată. Dacă $\boxed{\textbf{A}}$

sau $\boxed{\textbf{B}}$ au loc, atunci relaţia din $\boxed{\textbf{D}}$ se poate realiza numai pentru $a = b = c = 0$, dar numerele fiind nenule putem afirma că $\boxed{\textbf{D}}$ este falsă.

942. Deoarece F este o primitivă a lui f, deducem că F este derivabilă şi $F'(x) = f(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Cum $f(x) < 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, rezultă că F este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$. Atunci avem $F(4m^2 - 12m + 5) \geq F(3m^2 - 6m - 4) \Rightarrow 4m^2 - 12m + 5 \leq 3m^2 - 6m - 4 \Rightarrow m^2 - 6m + 9 \leq 0 \Rightarrow (m-3)^2 \leq 0$. Însă, pentru $m \in \mathbb{R}$ avem $(m-3)^2 \geq 0$. În consecinţă $(m-3)^2 = 0$, de unde $m = 3$.

943. Funcţia f este un morfism de grupuri între grupurile $(\mathbb{R}, +)$ şi $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ dacă şi numai dacă $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$. Fie $x, y \in \mathbb{R}$. Avem: $f(x+y) = \cos(x+y) + i \sin(x+y) = (\cos x \cos y - \sin x \sin y) + i(\sin x \cos y + \cos x \sin y) = (\cos x + i \sin x) \cdot (\cos y + i \sin y) = f(x) \cdot f(y)$. Astfel $\boxed{\textbf{A}}$ este adevărată.

Funcţia f nu este injectivă, deoarece, de exemplu, avem $f(0) = f(2\pi)$.

Pentru orice $x \in \mathbb{R}$, avem $|f(x)| = \sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x} = 1$. Deci orice element din $\mathbb{C}^*$ cu modulul diferit de 1, de exemplu 2, nu aparţine imaginii lui f. Deci funcţia f nu este surjectivă.

Morfismul de grupuri f este un izomorfism dacă şi numai dacă f este bijectiv. Pe baza $\boxed{\textbf{B}}$ sau $\boxed{\textbf{C}}$, afirmaţia $\boxed{\textbf{D}}$ este falsă.

944. Cu notaţia $\cos x = t \in [-1, 1]$ inecuaţia $2\cos^2 x \geq \cos x + 1$ devine $2t^2 - t - 1 \geq 0$, cu soluţia $t \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup [1, \infty)$, de unde $\cos x \in \left[-1, -\frac{1}{2}\right] \cup \{1\}$, adică $S = \left(\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi, \dfrac{4\pi}{3} + 2k\pi\right]\right) \bigcup \{\, 2l\pi |\, l \in \mathbb{Z}\}$. Verificăm fiecare variantă de răspuns în parte: $\boxed{\text{A}}$ $2020\pi = 1010 \cdot 2\pi \in S$;

$\boxed{\text{B}}$ $2021\pi = 1010 \cdot 2\pi + \pi \in \left[\frac{2\pi}{3} + 2020\pi, \frac{4\pi}{3} + 2020\pi\right] \subset S$;

$\boxed{\text{C}}$ $\left[\frac{2018\pi}{3}, \frac{2020\pi}{3}\right] = \left[\frac{2\pi}{3} + 336 \cdot 2\pi, \frac{4\pi}{3} + 336 \cdot 2\pi\right] \subset S$;

$\boxed{\text{D}}$ $20 \in \left(6\pi, 6\pi + \frac{2\pi}{3}\right)$. Într-adevăr $20 < 6\pi + \frac{2\pi}{3}$ este echivalentă cu $3 < \pi$ şi $6\pi < 20$ este echivalentă cu $\pi < 3,33....$ Ambele fiind adevărate, numărul 20 este în intervalul $\left(6\pi, 6\pi + \frac{2\pi}{3}\right)$. Dar $\left(6\pi, 6\pi + \frac{2\pi}{3}\right) \cap S = \varnothing$, deci $\boxed{\text{D}}$ este falsă.

945. Aplicând regula lui L'Hospital $\Rightarrow \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{1}{t\sqrt{t}} \displaystyle\int_0^t (\sqrt{x} + \sin(x^2))\mathrm{d}x = \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{\sqrt{t} + \sin(t^2)}{\frac{3}{2}\sqrt{t}} = \dfrac{2}{3}$.

946. După înmulţirea primei ecuaţii cu z obţinem $az^4+bz^3+cz^2+dz=0$. Din această scădem a doua ecuaţie pentru a obţine $az^4-a=0$. Deoarece $a\neq 0$, trebuie să avem $z^4=1$. Rădăcinile unităţii de ordinul patru sunt următoarele: $1,i,-1,-i$. Putem obţine toate acestea cu excepția 1 dacă alegem $a=b=c=d=1$. În acest caz ambele ecuații devin $z^3+z^2+z+1=0$. Pentru $z=1$ trebuie să avem $a+b+c+d=0$, si găsim foarte uşor astfel de a,b,c și $d=-a-b-c$. Deci toate cele patru valori pe care le-am găsit sunt valori posibile ale lui z.

947. Toate cele patru răspunsuri rezultă imediat dintr-o schiţă a graficului lui f.

Alternativ, dacă $x_0\in(2k-1,2k+1)$, $k\in\mathbb{Z}$, avem $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}|x-2k|=|x_0-2k|=f(x_0)$, deci funcţia este continuă pe $\cup_{k\in\mathbb{Z}}(2k-1,2k+1)$. Pentru $x_0=2k-1$, $k\in\mathbb{Z}$, avem $\lim\limits_{x\uparrow x_0}f(x)=\lim\limits_{x\uparrow x_0}|x-2(k-1)|=\lim\limits_{x\downarrow x_0}f(x)=\lim\limits_{x\downarrow x_0}|x-2k|=1=f(x_0)$, deci funcţia este continuă pe $\mathbb{R}$. Astfel, $\boxed{\text{A}}$ şi $\boxed{\text{D}}$ sunt false.

În $x_0=2k$, $k\in\mathbb{Z}$ avem $f'_s(x_0)=-1$, $f'_d(x_0)=1$, deci funcţia nu este derivabilă pe mulţimea $\{2k:k\in\mathbb{Z}\}$. În $x_0=2k-1$, $k\in\mathbb{Z}$, avem $f'_s(x_0)=1$, $f'_d(x_0)=-1$, deci funcţia nu este derivabilă pe mulţimea $\{2k-1:k\in\mathbb{Z}\}$. Deci, funcţia nu este derivabilă pe $\mathbb{Z}$ şi pentru orice $x_0\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ avem $f'(x_0)=\begin{cases}-1, & \text{dacă } x_0\in(2k-1,2k),\\ 1, & \text{dacă } x_0\in(2k,2k+1),\ k\in\mathbb{Z}.\end{cases}$ În concluzie, $\boxed{\text{B}}$ este adevărată şi $\boxed{\text{C}}$ este falsă.

948. Din $\displaystyle\int_0^t\frac{x}{x^4+2x^2+2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^t\frac{(x^2+1)'}{(x^2+1)^2+1}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{arctg}(x^2+1)\Big|_0^t$ rezultă că $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\int_0^t\frac{x}{x^4+2x^2+2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{8}$.

949. Calculăm derivata funcţiei f: $f'(x)=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{2x-1}{\sqrt[3]{x^2-1}}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{2x-1}{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)}}$, care este definită pe mulţimea $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$. Facem tabelul de variaţie al funcţiei f.

x		-1		$\frac{1}{2}$		1	
$2x-1$	$- - - -$	$-$	$- - - -$	0	$+ + + +$	$+$	$+ + + +$
$\sqrt[3]{x^2-1}$	$+ + + +$	0	$- - - -$	$-$	$- - - -$	0	$+ + + +$
$f'(x)$	$- - - -$	$\vert$	$+ + + +$	0	$- - - -$	$\vert$	$+ + + +$
$f(x)$	$\searrow\searrow\searrow$		$\nearrow\nearrow\nearrow$		$\searrow\searrow\searrow$		$\nearrow\nearrow\nearrow$

Din tabel reiese că punctele de extrem local ale funcţiei f sunt $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{1}{2}$ şi $x_3 = 1$. Deci funcţia f are 3 puncte de extrem local.

950. Din teorema sinusurilor avem $a = 2R\sin A$, $b = 2R\sin B$, $c = 2R\sin C$. Folosind teorema medianei, obţinem: $m_a = a \Leftrightarrow m_a^2 = a^2 \Leftrightarrow \dfrac{2(b^2+c^2)-a^2}{4} = a^2 \Leftrightarrow 5a^2 - 2b^2 - 2c^2 = 0 \Leftrightarrow 5\sin^2 A - 2\sin^2 B - 2\sin^2 C = 0 \Leftrightarrow 5\sin^2 A + (\cos 2B - 1) + (\cos 2C - 1) = 0 \Leftrightarrow 5\sin^2 A + \cos 2B + \cos 2C = 2$, deci $\boxed{\text{B}}$ este adevărată. Dacă şi $\boxed{\text{A}}$ ar fi adevărată, atunci adunând primele două relaţii obţinem: $10\sin^2 A = 0 \Leftrightarrow \sin^2 A = 0 \Leftrightarrow \sin A = 0$, imposibil în triunghi. Deci $\boxed{\text{A}}$ este falsă. Din teorema medianei şi din teorema cosinusului avem: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \Leftrightarrow a^2 = \dfrac{5a^2}{2} - 2bc\cos A \Leftrightarrow 4bc\cos A = 3a^2 \Leftrightarrow 16R^2\sin B\sin C\cos A = 12R^2\sin^2 A \Leftrightarrow 3\sin^2 A - 4\sin B\sin C\cos A = 0$, deci $\boxed{\text{C}}$ este adevărată. Dacă presupunem că şi $\boxed{\text{D}}$ este adevărată atunci avem din $\boxed{\text{C}}$ şi $\boxed{\text{D}}$ că: $\dfrac{4}{3}\sin B\sin C\cos A = \dfrac{3}{4}\sin B\sin C\cos A (= \sin^2 A)$. Deci $\sin B\sin C\cos A = 0$, de unde putem avea cazurile: $\sin B = 0 \Rightarrow B = 0$, imposibil în triunghi; $\sin C = 0 \Rightarrow C = 0$, imposibil în triunghi; $\cos A = 0 \Rightarrow m(\widehat{A}) = 90^o$, nu este posibil pentru că în triunghiul dreptunghic în A, mediana din A este jumătate din ipotenuza BC, adică $m_a = \dfrac{a}{2}$, contradicţie cu ipoteza $m_a = a$.

951. Fie P intersecţia laturilor neparalele AD şi BC, $AB = a, CD = b$. Din asemănarea triunghiurilor PAB, PMN şi PDC rezultă pentru arii relaţiile $A_a = A_{PAB} = \lambda a^2, A_l = A_{PMN} = \lambda l^2, A_b = A_{PDC} = \lambda b^2$, cu $\lambda > 0$. Din ipoteza problemei rezultă că cele trei arii formează o progresie aritmetică, adică $2\lambda l^2 = \lambda a^2 + \lambda b^2$, adică $l = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

Altă soluţie. Pe lânga notaţiile pentru baza mare $AB = a$, pentru baza mică $CD = b$, fie înălţimile trapezelor $ABMN$, $MNCD$: x respectiv y.

$$\mathcal{A}(ABMN) = \mathcal{A}(MNCD) = \frac{\mathcal{A}(ABCD)}{2} \Longleftrightarrow \frac{(a+l)x}{2} = \frac{(b+l)y}{2} = \frac{(a+b)(x+y)}{4}.$$

Din prima ecuaţie avem: $x = \dfrac{(b+l)y}{a+l}$. Înlocuind aceasta în a doua ecuaţie şi efectuând calculele, obţinem că $l^2 = \dfrac{a^2+b^2}{2}$.

$\boxed{\text{A}}$ conform calculelor de mai sus este adevărată.

$\boxed{\text{B}}$ $\sqrt{ab} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \iff a = b$, dar $a > b$, deci $l \neq \sqrt{ab}$;

$\boxed{\text{C}}$ $l = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} > \frac{a+b}{2}$ este adevărat pentru $a > b$;

$\boxed{\text{D}}$ $l = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} < \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$, pentru $a > b$, deci $l \neq \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$.

Din inegalităţile mediilor $\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} < \sqrt{ab} < \dfrac{a+b}{2} < \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$ valabile petru $a, b > 0, a \neq b$ rezultă că afirmaţiile de la puntele $\boxed{\text{B}}$ şi $\boxed{\text{D}}$ sunt false, iar cea de la punctul $\boxed{\text{C}}$ este adevărată.

952. Pentru un $n \in A$, notăm y numărul cifrelor sale. Dacă $x = (n-6)/10$, atunci obţinem egalitatea $4(10x+6) = 6 \cdot 10^{y-1} + x$, adică $13x = 2(10^{y-1} - 4)$. Numărul $10^{y-1} - 4$ are forma $99\ldots 96$, deci e divizibil cu 3. Din $(3, 13) = 1$ rezultă $3 \mid x$, deci şi $3 \mid n$. Observăm că x trebuie să fie par. Deci n se termină în $06, 26, 46, 66$ sau 86 şi rezultă că $4 \nmid n$. Presupunem că $y = 8$, deci $13 \mid 10^7 - 4$, ceea ce este fals. Se constată că ecuaţia în x şi y are soluţia (particulară) $y = 5$ şi $x = 15384$. De aici rezultă că $n = 153846 \in A$.

953. Scriind Relațiile lui Viete, avem $S_1 = x_1+x_2+x_3 = -a$ și $S_2 = x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3 = 8$, adică $x_1^2+x_2^2+x_3^2 = a^2-16$. Avem $x_1^2+x_2^2+x_3^2 < 0$, adică $a^2-16 < 0$, deci $a \in (-4, 4)$.

954. Pentru că x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcini ale polinomului f, este valabil următorul sistem:

$$\begin{cases} x_1^3 + ax_1^2 + 8x_1 + 3 = 0 \\ x_2^3 + ax_2^2 + 8x_2 + 3 = 0 \\ x_3^3 + ax_3^2 + 8x_3 + 3 = 0 \end{cases}$$

Din relațiile lui Viete, cunoaștem faptul că $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = S_1^2 - 2S_2$. Prin adunarea egalităților din sistem, deducem că $x_1^3+x_2^3+x_2^3 = -a^3+24a-9$. Cum 0 nu este rădăcină a polinomului, putem înmulți adecvat cu fiecare dintre rădăcini egalitățile din sistem și obținem:

$$\begin{cases} x_1^4 + ax_1^3 + 8x_1^2 + 3x_1 = 0 \\ x_2^4 + ax_2^3 + 8x_2^2 + 3x_2 = 0 \\ x_3^4 + ax_3^3 + 8x_3^2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

Analog, prin adunarea egalităților din sistem, obținem faptul că $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = a^4 - 32a^2 + 12a + 128$. Deci, avem $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 - (x_1^3 + x_2^3 + x_2^3) = a^4 + a^3 - 32a^2 - 12a + 137$. Se poate observa prin calcul că 2 este rădăcină a polinomului $X^4 + X^3 - 32X^2 - 12X + 128$, deci egalitatea $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 - (x_1^3 + x_2^3 + x_2^3) = 9$ are loc pentru $a = 2$.

955. Aplicând regula triunghiului, avem $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN}$ și $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BP}$. Din relațiile date în ipoteză, rezultă imediat următoarele egalități:

$$\begin{cases} \overrightarrow{AN} = -\dfrac{5}{k+5}\overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{MA} = -\dfrac{1}{k+1}\overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{MB} = \dfrac{k}{k+1}\overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{BP} = \dfrac{5}{4}\overrightarrow{BC} \end{cases}$$

Înlocuind în relația $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MP}$, avem $2\Big(-\dfrac{1}{k+1}\overrightarrow{AB} + \dfrac{5}{k+5}\overrightarrow{AC}\Big) = \dfrac{k}{k+1}\overrightarrow{AB} + \dfrac{5}{4}\overrightarrow{BC}$, de unde rezultă $k = 3$.

956. Fie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - a$, $g'(x) = f'(x) = e^x\Big(x^2 - 2x - 3\Big), \forall x \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow g'(x) = 0 \iff e^x\left(x^2 - 2x - 3\right) = 0$. Cum $e^x \neq 0$, avem : $x^2 - 2x - 3 = 0$. Deci, $x_1 = 3$, $x_2 = -1$. Avem: $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(e^x\left(x^2 - 4x + 1\right) - a\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{e^{-x}}\left(x^2 + 4x + 1\right)\right) - a = -a$ și $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(e^x\left(x^2 - 4x + 1\right) - a\right) = \infty$. Totodată, $g(-1) = \dfrac{1}{e}(1 + 4 + 1) - a = \dfrac{6}{e} - a$ și $g(3) = e^3\left(3^2 - 4\cdot 3 + 1\right) - a = e^3 - 2e^3 - a$.

Pentru g, avem:

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	0	$+$
$g(x)$	$-a$	$\frac{6}{e} - a$	$-2e^3 - a$	∞
Rolle	$-$	$+$	$-$	$+$

Așadar, din șirul semnelor lui Rolle: $\begin{cases} -a < 0 \\ \frac{6}{e} - a \geq 0 \\ -2e^3 - a < 0 \end{cases}$ Deci, $a \in \left(0, \dfrac{6}{e}\right)$.

957. Scriem raportul $\dfrac{1}{x^4 - 16}$ descompus în fracții simple: $\dfrac{1}{(x-2)(x+2)(x^2+4)} = \dfrac{A}{x-2} + \dfrac{B}{x+2} + \dfrac{Cx + D}{x^2+4}$. Obținem $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^4 - 16}\mathrm{d}x = \frac{1}{32}\int_0^1 \frac{1}{x-2}\mathrm{d}x - \frac{1}{32}\int_0^1 \frac{1}{x+2}\mathrm{d}x - \frac{1}{8}\int_0^1 \frac{1}{x^2+4} = -\frac{\ln 3}{32} - \frac{\arctan(\frac{1}{2})}{16}$.

958. Funcţia f este de două ori derivabilă pe $\mathbb{R}$, deci $M = \{a \in \mathbb{R} \mid f''(x) = 4(3x^2 + a) \geq$

$0, \forall x \in \mathbb{R}\} = [0, +\infty)$.

959. (Adaptare după o problemă din Folclorul Matematic) Din $z^2+z+1=0$, împărțind cu z, avem $z+\dfrac{1}{z}=-1$. Tot din $z^2+z+1=0$, înmulțind cu z și înlocuind $z^2+z=-1$, avem $z^3=1$. Deci, în relația $z^{2023}+\dfrac{1}{z^{2023}}$, înlocuim $z^{2023}=(z^3)^{674}\cdot z$ și rămânem cu $z+\dfrac{1}{z}=-1$.

960. Matricea sistemului şi matricea extinsă a sistemului sunt

$$A=\begin{pmatrix} 2 & \alpha & 0 & 2 \\ 4 & -1 & \alpha+2 & 5 \\ 2 & 10 & -5 & 1 \end{pmatrix}, \text{ respectiv } \overline{A}=\begin{pmatrix} 2 & \alpha & 0 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & \alpha+2 & 5 & 1 \\ 2 & 10 & -5 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Minorul matricei A de ordin 2

$$d=\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}=10-8=2$$

este nenul şi poate fi bordat în două moduri la un minor de ordinul 3 al matricei A. Să considerăm minorul

$$d'=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 4 & \alpha+2 & 5 \\ 2 & -5 & 1 \end{vmatrix} \overset{c_3-c_1}{=} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & \alpha+2 & 1 \\ 2 & -5 & -1 \end{vmatrix}=2(-\alpha-2+5)=2(3-\alpha).$$

Dacă $\alpha\neq 3$ atunci $d'\neq 0$, prin urmare $\operatorname{rang} A=3=\operatorname{rang}\overline{A}$ şi, conform Teoremei Kronecker-Capelli, sistemul dat este compatibil. Dacă $\alpha=3$ atunci, pentru a decide care este rangul matricei A (şi, implicit, compatibilitatea sistemului dat) trebuie să calculăm celălalt minor de ordinul 3 ce se obţine din bordarea lui d:

$$d''=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 5 \\ 2 & 10 & 1 \end{vmatrix} \overset{\substack{l_1-l_3 \\ l_2-2l_3}}{=} \begin{vmatrix} 0 & -7 & 1 \\ 0 & -21 & 3 \\ 2 & 10 & 1 \end{vmatrix}=2\cdot(-21+21)=0.$$

Aceasta arată că d este minor principal şi, echivalent, $\operatorname{rang} A = 2$. Cum minorul caracteristic corespunzător lui d este

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{c_1-2c_3}{=} \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-2)(2-1) = -2 \neq 0.$$

Fie folosind teorema lui Rouché şi constatând că acest minor caracteristic este nenul, fie aplicând teorema Kronecker-Capelli şi constatând că $\operatorname{rang} \overline{A} = 3 \neq 2 = \operatorname{rang} A$, deducem că sistemul dat este incompatibil. Deci sistemul dat este compatibil dacă şi numai dacă $\alpha \neq 3$. În particular, dacă $\alpha = -5 \neq 3$ atunci sistemul este compatibil. Aşadar, afirmaţiile $\boxed{\text{B}}$ şi $\boxed{\text{C}}$ sunt adevărate, iar $\boxed{\text{A}}$ şi $\boxed{\text{D}}$ sunt false.

961. Funcţia este de două ori derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi derivata a doua $f''(x) = 2(1-a)\dfrac{1-3x^2}{(x^2+1)^3}$ are rădăciniile $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Condiţia cerută se scrie $f''(0) \geq 0$, de unde rezultă $a \leq 1$.

962. $\left|\dfrac{1}{t^2}\displaystyle\int_0^t (\sqrt{x} + \sin x)dx\right| \leq \dfrac{1}{t^2}\left(\displaystyle\int_0^t \sqrt{x}dx + \int_0^t |\sin x|dx\right) \leq \dfrac{1}{t^2}\left(\dfrac{2}{3}t^{3/2} + t\right) \to 0,$ când $t \to \infty$.

963. Facem schimbarea de variabilă $t = 1 - \dfrac{x}{n}$, $\mathrm{d}t = -\dfrac{1}{n}\mathrm{d}x \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} n \displaystyle\int_{\frac{n-1}{n}}^{1} t^n \mathrm{d}t =$ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1}\left(\dfrac{1}{n}\right)^{n+1} = 0.$

964. Rescriem ecuația ca $4\log_x 2 + \dfrac{1}{4\log_x 2} = 9\log_x 2 + \dfrac{1}{9\log_x 2}$. Notăm acum $\log_x 2 = a, a \in \mathbb{R}$. Avem că $4a + \dfrac{1}{4a} = 9a + \dfrac{1}{9a} \iff 180a^2 - 5 = 0 \iff \dfrac{1}{a} = \pm\sqrt{\dfrac{180}{5}} = \pm 6$. Cum $\dfrac{1}{a} = \log_2 x \Rightarrow x = 2^{\pm 6}$. Suma soluțiilor este $\dfrac{4097}{64}$, care sunt prime între ele, lucru care se poate verifica cu algoritmul lui Euclid. Așadar, suma cerută este $4097 + 64 = 4161$.

965. $\boxed{\textbf{A}}$ Funcţia f este un morfism de grupuri între grupurile $(\mathbb{R}, +)$ şi $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ dacă şi numai dacă $f(x+y) = f(x)\cdot f(y)$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$. Fie $x, y \in \mathbb{R}$. Avem: $f(x+y) = \cos(x+y) + i\sin(x+y) = (\cos x \cos y - \sin x \sin y) + i(\sin x \cos y + \cos x \sin y) = (\cos x + i\sin x)\cdot(\cos y + i\sin y) = f(x)\cdot f(y)$. $\boxed{\textbf{B}}$ Funcţia f nu este injectivă, deoarece, de exemplu, avem $f(0) = f(2\pi) = 1$. $\boxed{\textbf{C}}$ Pentru orice $x \in \mathbb{R}$, avem $|f(x)| = \sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x} = 1$. Deci orice element din $\mathbb{C}^*$ cu modulul diferit de 1, de exemplu 2, nu aparţine imaginii lui

f. Deci funcţia f nu este surjectivă. $\boxed{\mathbf{D}}$ Morfismul de grupuri f este un izomorfism dacă şi numai dacă f este bijectiv. Pe baza $\boxed{\mathbf{B}}$ sau $\boxed{\mathbf{C}}$, afirmaţia $\boxed{\mathbf{D}}$ este falsă.

966. Fie $A = \begin{pmatrix} -3 & 15 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ şi $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Avem $(\det(X))^2 = \det(X^2) = \det(A) = 0$, de unde $\det(X) = 0$, deci $\boxed{\text{A}}$ este adevărată. Din $ad = bc$ obţinem că $\operatorname{tr}(X^2) = a^2 + d^2 + 2bc = (a+d)^2 = (\operatorname{tr} X)^2$. Din relaţia anterioară rezultă că $(\operatorname{tr} X)^2 = \operatorname{tr} A = 2$, de unde $\operatorname{tr} X = \pm\sqrt{2}$, deci $\boxed{\text{B}}$ este falsă. Ecuaţia matricelă se poate scire sub forma

$$\begin{cases} a^2 + bc = -3 \\ b(a+d) = 15 \\ c(a+d) = -1 \\ d^2 + bc = 5. \end{cases}$$

Utilizând relaţia $ad = bc$ ecuaţia se transformă în $X \cdot \operatorname{tr} X = A$. Din $\operatorname{tr} X = \pm\sqrt{2}$ obţinem că soluţiile ecuaţiei sunt $X = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}A$, deci $\boxed{\text{C}}$ şi $\boxed{\text{D}}$ sunt false. Observaţie: Problema poate fi rezolvată şi cu teorema lui Cayley–Hamilton.

967. Folosim substituția $t = -x^2 \to dt = -2x\,dx$. Integrala devine $-\frac{1}{2}\int_0^{-1} e^t\,dt$. $\Rightarrow$ $-\frac{1}{2}\int_0^{-1} e^t\,du = -\frac{1}{2}\left[e^t\right]_0^{-1} = -\frac{1}{2}\left(e^{-1} - e^0\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{e} - 1\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2e}$.

968. $x \in (-\infty, 3]$. $\sqrt{3-x} - x = -10 \iff \sqrt{3-x} = x - 10$. Condițiile de compatibilitate: $x \geq 10$. Cum $(-\infty, 3] \cup [10, \infty) = \emptyset$. Deducem că ecuația nu are nicio soluție, astfel răspunsul corect este $\boxed{\text{A}}$.

969. Inlocuind şi simplificând obţinem ecuaţia de gradul doi $x^2 - 10x + 9 = 0$, cu rădăcinile 1 şi 9. Convine doar soluţia $x = 9$, din cauza condiţiilor asupra aranjamentelor şi combinărilor, i.e., $x \in \mathbb{N}, x \geq 6$.

970. Pentru a calcula coordonatele centrului cercului circumscris, este suficient să cunoaștem ecuațiile a 2 dintre mediatoare. Putem calcula cu ușurință mijlocul segmentului AB și obținem punctul $M(8,3)$. Fie d mediatoarea lui AB. $d \perp AB$, deci $m_d \cdot m_{AB} = -1$, de unde obținem $m_d = \dfrac{1}{2}$. Cum $M \in d$, avem ecuația dreptei $d : x - 2y - 2 = 0$. Analog, obținem ecuația mediatoarei segmentului AC, $d_1 : x + 2y - 12 = 0$. Centrul cercului circumscris se află la intersecția celor două drepte, de unde obținem $O(7, \frac{5}{2})$.

971. Fie C un cerc din $\mathcal{C}$ cu centrul $M(x_M, y_M)$. Deoarece d este mediatoarea segmentului $[AB]$, raza lui C este $r = d(A, M) = d(B, M)$, deci, avem $r = d(A, M) = \sqrt{5(y_M^2 - 6y_M + 10)}$. Aceasta este o funcţie convexă, iar minimul ei se obţine pentru $y_M = 3$. Deci, cea mai mică rază a unui cerc din $\mathcal{C}$ este $\sqrt{5}$. Prin urmare $\boxed{\text{A}}$ este falsă, iar $\boxed{\text{B}}$ este adevărată. Dacă cercul C intersectează fiecare axă de coordonate în exact un punct, atunci centrul lui, M, este la distanţe egale faţă de cele două axe, adică $M = M(r, r)$. Dar M este pe dreapta d, deci $r - 2r = 2$, o contradicţie cu $r > 0$, deci $\boxed{\text{C}}$ este falsă. Triunghiul ABD este dreptunghic în A și isoscel , deci centrul cercului circumscris este mijlocul ipotenuzei, adică $(6, 2) \in d$, deci $\boxed{\text{D}}$ este adevărată.

972. $\sqrt{k-1}+\sqrt{k} < 2\sqrt{k} < \sqrt{k}+\sqrt{k+1} \iff \frac{1}{\sqrt{k-1}+\sqrt{k}} > \frac{1}{2\sqrt{k}} > \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$. Însumând după k și folosind criteriul cleștelui, rezultă că: $\dfrac{2\sqrt{n+1}-2}{\sqrt{n}} < \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{kn}} < \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n}} = 2$.

973. Pentru $\boxed{\text{A}}$ este uşor de văzut că $\widehat{5}^3 - \widehat{5} + \widehat{1} = \widehat{121} = \widehat{9} \neq \widehat{11}$, deci $\boxed{\text{A}}$ este falsă. Pentru că $\varphi(14) = 14\left(1 - \dfrac{1}{2}\right)\left(1 - \dfrac{1}{7}\right) = 6$ şi $(5, 14) = 1$, avem din teorema lui Euler că $\widehat{5}^6 = \widehat{1}$. La acest rezultat se poate ajunge şi prin încercări: $\widehat{5}^2 = \widehat{25} = \widehat{11}$, $\widehat{5}^3 = \widehat{125} = \widehat{13}$, $\widehat{5}^4 = \widehat{625} = \widehat{9}$, $\widehat{5}^5 = \widehat{3125} = \widehat{3}$, $\widehat{5}^6 = \widehat{15625} = \widehat{1}$ Avem deci: $\widehat{5^{13}} = \widehat{5^{6\cdot2+1}} = (\widehat{5}^6)^2 \cdot \widehat{5} = \widehat{1}^2 \cdot \widehat{5} = \widehat{5} \neq \widehat{1}$, deci $\boxed{\text{B}}$ este falsă. Pe de altă parte: $\widehat{5^{2021}} = \widehat{5^{6\cdot336+5}} = (\widehat{5}^6)^{336} \cdot \widehat{5}^5 = \widehat{1^{336}} \cdot \widehat{5}^5 = \widehat{5}^5$. Dacă am avea $\widehat{5}^5 = \widehat{5}$, atunci ar însemna că $\widehat{25} = \widehat{5}^5 \cdot \widehat{5} = \widehat{5}^6 = \widehat{1}$, deci $\widehat{25} = \widehat{1}$, ceea nu este adevărat. Deci $\widehat{5}^5 \neq \widehat{5}$, prin urmare $\boxed{\text{C}}$ este falsă. În ceea ce priveşte $\boxed{\text{D}}$, avem: $\widehat{5^{123}} + \widehat{5^{210}} = \widehat{5^{6\cdot20+3}} + \widehat{5^{6\cdot35}} = (\widehat{5}^6)^{20} \cdot \widehat{5}^3 + (\widehat{5}^6)^{35} = \widehat{1}^{20} \cdot \widehat{5}^3 + \widehat{1}^{35} = \widehat{126} = \widehat{0}$, deci $\boxed{\text{D}}$ este adevărată.

974. Observăm că $x = -1$ este rădăcină a împărțitorului, de unde rezultă din teorema lui Bézout că restul este egal cu 0.

975. Știm că $\sin^2(90^o - n) = \cos^2 n$. Grupând $\sin^2(90^o - n) + \sin^2 n = 1$, rezultă 44 de perechi la care se adaugă $\sin^2 90^o = 1$ și $\sin^2 45^o = \dfrac{1}{2}$, rezultatul fiind egal cu $\dfrac{91}{2}$.

976. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}}{n} \overset{\text{Stolz-Cèsaro}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \cdot \frac{1}{n+1-n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 0.$

977. Realizăm schimbarea de variabilă $u = 1-t$, $\mathrm{d}u = -\mathrm{d}t$ și integrala devine $\int_0^1 u^{99}(1-u)\mathrm{d}u = \int_0^1 u^{99} - u^{100}\mathrm{d}u = \frac{1}{10100}$.

978. Observăm că termenul general a_n se poate rescrie astfel: $a_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2}$.

Aşadar, a_n reprezintă suma Riemann asociată funcţiei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, diviziunii $\Delta_n = \left(0, \frac{1}{n}, ..., \frac{n}{n}\right)$ şi sistemului de puncte intermediare $\xi_n = \left(\frac{1}{n}, ..., \frac{n}{n}\right)$.

Cum f este integrabilă, rezultă că şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este convergent şi avem că $l = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\cdot\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$.

979. $\frac{AC}{CB} = \frac{AB}{AC} = \lambda.\frac{AC}{CB} = \lambda \implies AC = \lambda \cdot CB.\frac{AB}{AC} = \lambda \implies AB = \lambda \cdot AC.AC = \lambda\cdot CB \implies AC = \frac{AA+\lambda\cdot AB}{1+\lambda}.yC = \frac{yA+\lambda\cdot yB}{1+\lambda}.\frac{AC}{CB} = \lambda \implies AC = \lambda\cdot CB.\frac{AB}{AC} = \lambda \implies AB = \lambda\cdot AC. \implies AB = \lambda^2\cdot CB$. Însă, $AB = AC + CB \implies \lambda^2\cdot CB = \lambda\cdot CB + CB$.Cum CB reprezintă lungimea unui segment $\implies CB > 0 \implies \lambda^2\cdot CB = \lambda\cdot CB + CB \quad | : CB.\lambda^2 = \lambda + 1.\lambda^2 - \lambda - 1 = 0\lambda_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$, dar $\lambda > 0 \implies \lambda = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \implies$ Revenim la relațiile inițiale: $AC = \frac{AA+\lambda\cdot AB}{1+\lambda}$ și $AB = 2\cdot\frac{1+\lambda-AA}{1+\sqrt{5}}\cdot\left(1+\frac{1+\sqrt{5}}{2}-2\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\cdot\frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}-1}{1+\sqrt{5}} \Rightarrow yB = \frac{2(1+\lambda)-yA}{\lambda} = \frac{2+1+\sqrt{5}-\frac{y}{2}}{1+\sqrt{5}}\cdot 2 = \left(2+\sqrt{5}-\frac{y}{2}\right)\cdot\frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{6+2\sqrt{5}-y}{1+\sqrt{5}}. \Rightarrow (AB+yA)^2 - yB = \frac{6-2\sqrt{5}}{6+2\sqrt{5}} + \frac{y(\sqrt{5}-1)}{1+\sqrt{5}} + \frac{49}{4} + \frac{5\sqrt{5}-6}{1+\sqrt{5}}$.

980. Știind că $h(x) - x$ este tot o funcție polinomială de gradul 3, din enunț observăm că 1,2 și 3 sunt rădăcini ale acesteia. Ea se poate scrie sub forma: $h(x) - x = a\cdot(x-1)(x-2)(x-3)$, unde $a \in \mathbb{R}$ este un coeficient. Cum $h(4) = a\cdot 3\cdot 2\cdot 1 + 4 = 6 \Rightarrow a = \frac{1}{3} \Rightarrow h(6) = \frac{1}{3}\cdot 5\cdot 4\cdot 3 + 6 = 26; h(16) = 926$.

981. Separăm egalitățile astfel: $x\cdot\log_a(b) = \frac{e}{\sqrt{5}}$ și $eb\cdot\log_b(a) = \frac{e}{\sqrt{5}}$ după care le înmulțim: $e\cdot ab\cdot(\log_a(b)\cdot\log_b(a)) = \frac{e^2}{5}$. Cum $\log_a(b)\cdot\log_b(a) = 1 \Rightarrow ab = \frac{e}{5}$.

982. $\det(A) = y\cdot(1-2x) \Rightarrow$pentru $x = \frac{1}{2}$ sau $y = 0$ avem $\det(A) = 0$. Cum pentru orice $y \neq 0$, avem un minor de ordinul 2 nenul format din primele 2 linii și coloane, rezultă că $rang(A) = 3 \iff x \neq \frac{1}{2}, y \in \mathbb{R}^*$. $A^2 = \begin{pmatrix} 1+2x & 0 & 4x \\ 0 & y^2 & 0 \\ 2 & 0 & 1+2x \end{pmatrix}$, $x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow \det(A^2) = y^2[(1+2x)^2 - 8x]$.

983. Presupunem că avem deja n numere. Pentru numărul $n+1$, există trei posibilități $(2023, 2024, 2025) \Rightarrow 3A_n$. Dacă numărul anterior a fost 2024, trebuie să excludem posibilitatea de a avea 2025 pe poziția $n+1$. Numărul de cazuri de exclus este egal cu A_{n-1}, deoarece reprezintă situațiile în care avem un șir valid de $n-1$ numere, urmat de 2024. Astfel, relația de recurență finală este $A_{n+1} = 3A_n - A_{n-1}, n > 1$.

984. Ridicând ambii membrii la pătrat, obținem $\sin^2 x = \dfrac{1}{2} \iff \sin x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Cum doar $\sin x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \in (-1, 0) \Rightarrow \sin\gamma = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Astfel, $f(\gamma) = -1$.

985. Știind că numărul de cifre a unui număr x este egal cu $[\lg x + 1] \Rightarrow$ aplicând Stolz–Cesàro, obținem $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{[(n+1)\lg 4 + 1]}{2n+1}$. Cum $(n+1)\lg 4 < [(n+1)\lg 4 + 1] \leq (n+1)\lg 4 + 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)\lg 4}{2n+1} < \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{[(n+1)\lg 4 + 1]}{2n+1} \leq \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)\lg 4 + 1}{2n+1}$. Deoarece atât limita din partea stângă a inegalității, cât și cea din partea dreaptă a inegalității sunt egale cu $\dfrac{1}{2}\lg 4 \Rightarrow L = \lg\sqrt{4}$.

986. Fie α unghiul dintre dreptele d și d', unde d are panta m, iar d' are panta m'. Atunci $\text{tg}\alpha = \left|\frac{m-m'}{1+mm'}\right|$. Pentru $d' : 2x+3y-7 = 0 \Rightarrow d' : y = -\frac{2}{3}x + \frac{7}{3} \Rightarrow m' = -\frac{2}{3}$. $\text{tg}45° = 1 = \left|\frac{m+\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}m}\right| = \left|\frac{3m+2}{3-2m}\right|$, $m \neq \frac{3}{2}$, relație care are loc, fiindcă altfel dreptele ar fi perpendiculare.

Cazul 1: $3m+2 = 3-2m \iff m = \frac{1}{5} \Rightarrow d : y+3 = \frac{1}{5}(x-2) \iff d : x-5y-17 = 0$.

Cazul 2: $3m+2 = 2m-3 \iff m = -5 \Rightarrow d : y+3 = -5(x-2) \iff d : 5x+y-7 = 0$

987. Ecuația tangentei în $x = 1$ este $y - f(1) = f'(1)(x-1)$. Deoarece tangenta trebuie să fie perpendiculară pe dreapta $y = -x+5$, produsul pantelor lor trebuie să fie -1. Panta dreptei date este -1, deci $f'(1) = 1$. Cum $f'(x) = 4x^3 + 2(k-2)x + 3 \Rightarrow 4 + 2(k-2) + 3 = 1 \iff 2k+3 = 1 \iff k = -1$.

988. Se verifică ușor că $-1 < \dfrac{x+y}{1+xy} < 1$ pentru orice $x, y \in (-1, 1)$. Avem $(x \diamond y) \diamond z = \dfrac{x+y+(1+xy)z}{1+xy+(x+y)z} = x \diamond (y \diamond z)$, deci $\boxed{\text{C}}$ este adevărată. Pe baza acestei formule calculăm $\frac{1}{2} \diamond (\frac{1}{2} \diamond \frac{1}{2}) = \frac{13}{14}$, deci $\boxed{\text{B}}$ este falsă. Din $x \diamond e = x$ pentru orice $x \in (-1, 1)$ obținem că elementul neutru este 0, deci $\boxed{\text{A}}$ este adevărată. Pentru $x \in (-1, 1)$, din egalitatea $x \diamond x' = 0$ obținem că simetricul lui x este $x' = -x$, deci $\boxed{\text{D}}$ este adevărată.

989. P, Q, R sunt coliniare $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ \beta & \beta^2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2\beta^2 + \beta - 5 = 0 \Rightarrow \beta_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{41}}{4}$

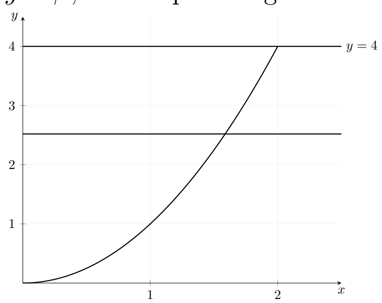
990. Deoarece $i^4 = 1$, $T_4 = i + (-1) + (-i) + 1 = 0$. Orice n, multiplu de 4 va fi egal cu 0.

$T_{98} = T_{96} + i^{97} + i^{98} = 0 + i + (-1) = i - 1 \neq -1 - i$. $T_{2025} = T_{2024} + i^{2025} = 0 + i = T_{101}$. $T_{37} = T_{36} + i^{37} = 0 + i \neq -i$.

991. Folosim substituția $t = \sqrt{x} \Rightarrow \mathrm{d}x = 2t\mathrm{d}t$. Integrala devine $(2t \cdot e^t - 2e^t)\Big|_0^{\sqrt{\alpha}}$.

992. Rescriem prima ecuație $y = -\frac{x}{2a} + \frac{1}{3}$ și a doua $y = \frac{x}{3} + \frac{1}{3}$. Pentru infinitate de soluții, pantele trebuie să fie egale: $-\frac{1}{2a} = \frac{1}{3} \Rightarrow a = -\frac{3}{2}$.

993. Conform enunțului, putem crea graficul regiunii, unde linia verde reprezintă ecuația $y = \beta$, care împarte regiunea delimitată în două regiuni cu suprafețe egale.



Astfel, $\int_0^{\beta} \sqrt{y}\,\mathrm{d}y = \int_{\beta}^{4} \sqrt{y}\,\mathrm{d}y \Rightarrow 4\sqrt{\beta^3} = 16 \Rightarrow \beta = \sqrt[3]{16}$

994. $\frac{x^2}{x-2} = 3x \Rightarrow x^2 = 3x(x-2) \Rightarrow -2x^2 = -6x \Rightarrow x(x-3) = 0 \Rightarrow x = 0$ sau $x = 3$.

Deci $S = 3$ și $P = 0$.

995. $\begin{cases} a_6 = 4 \cdot a_3 \\ a_{10} = a_4 + 30 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a_1 + 5r = 4 \cdot (a_1 + 2r) \\ a_1 + 9r = a_1 + 3r + 30 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a_1 + 5r = 4a_1 + 8r \\ 6r = 30 \Rightarrow r = 5 \end{cases}$

$a_1 + 25 = 4a_1 + 40 \Rightarrow a_1 = -5$.

996. Pentru ca f să admită primitive, este suficient ca numitorul să nu se anuleze niciodată, adică ecuația $m \cos x + n = 0$ să nu aibă soluții reale. Știm că $-1 \leq \cos x \leq 1$

pentru orice x real. Deci, trebuie să avem: $m\cos x + n > 0$ pentru orice x. Cea mai restrictivă condiție apare când $\cos x = -1$: $-m + n > 0 \implies n > m$. Așadar, pentru ca funcția să admită primitive, este necesar ca $n > m$. În caz contrar se poate observa că f nu are proprietatea lui Darboux pe R, deci nu poate avea primitive pe R.

997. Distanța de la punctul $Q(b, 0)$ la dreapta d_1 este dată de: $d(Q, d_1) = \dfrac{|2b-3|}{\sqrt{5}}$. Distanța de la punctul $Q(b, 0)$ la dreapta d_2 este dată de: $d(Q, d_2) = \dfrac{|b+1|}{\sqrt{5}}$. Condiția ca cele două distanțe să fie egale este: $|2b-3| = |b+1| \Rightarrow b = \dfrac{2}{3}$ și $b = 4$.

998. În orice triunghi DEF are loc relația $\operatorname{tg} D + \operatorname{tg} E + \operatorname{tg} F = \operatorname{tg} D \cdot \operatorname{tg} E \cdot \operatorname{tg} F$. Așadar, $\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{4} + \operatorname{tg} F = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3}{4} \cdot \operatorname{tg} F \Rightarrow \operatorname{tg} F = -2$. Folosind relația $\cos^2 F + \sin^2 F = 1$ și $\tan F = \dfrac{\sin F}{\cos F}$, obținem $\cos^2 F = \dfrac{1}{5}$. Cum $\operatorname{tg} D = \frac{1}{2} < 1$ și $\operatorname{tg} E = \frac{3}{4} < 1$, rezultă că unghiurile D, E sunt mai mici de $45°$, deci unghiul F este mai mare de $90°$. Așadar, $\cos F = -\frac{\sqrt{5}}{5}$.

999. f este definită pe $(-\infty, \sqrt[3]{2}] \Rightarrow$ nu există limită spre ∞. f este descrescătoare pe tot domeniul de definiție, deoarece $f'(x) = \dfrac{-3x^2}{2\sqrt{2-x^3}} \leq 0$. $x = \sqrt[3]{2}$ este singurul punct de extrem.

1000. Folosim substituția $s = t^3 \implies t = s^{1/3}$, $dt = \dfrac{1}{3}s^{-2/3}ds$ și avem că $t^5 = \left(s^{1/3}\right)^5 = s^{5/3}$ și $\sqrt{2-t^3} = \sqrt{2-s} = (2-s)^{1/2} \Rightarrow \displaystyle\int t^5\sqrt{2-t^3}dt = \int s^{5/3}(2-s)^{1/2}\left(\frac{1}{3}s^{-2/3}ds\right) = \frac{1}{3}\int s^1(2-s)^{1/2}ds$. Simplificând, integrala devine $I = \displaystyle\frac{1}{3}\int_{n^3}^{2} s(2-s)^{1/2}ds$. Facem acum substituția: $w = 2-s \implies s = 2-w$, $ds = -dw$. Astfel, integrala devine: $I = \displaystyle\frac{1}{3}\int_0^{2-n^3}(2-w)w^{1/2}dw = \frac{1}{3}\int_0^{2-n^3}(2-w)w^{1/2}dw$. Cum $(2-w)w^{1/2} = 2w^{1/2} - w^{3/2}$ rezultă că integrala devine $I = \displaystyle\frac{1}{3}\left(\frac{4}{3}w^{3/2} - \frac{2}{5}w^{5/2}\right)\Bigg|_0^{2-n^3} = \frac{1}{3}\left(\frac{4}{3}(2-n^3)^{3/2} - \frac{2}{5}(2-n^3)^{5/2}\right)$. Așadar, $L = \displaystyle\lim_{n\to-\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{4}{3}(2-n^3)^{3/2} - \frac{2}{5}(2-n^3)^{5/2}\right)$. Notăm $x = 2-n^3 \Rightarrow L = \displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{4}{3}x^{3/2} - \frac{2}{5}x^{5/2}\right) = \frac{1}{15}\lim_{x\to\infty} 20\sqrt{x^2} - 6\sqrt{x^5} = -\infty$.

1001. $z + \dfrac{1}{z} = 2\cos\dfrac{\pi}{12} \iff z^2 - 2z\cos\dfrac{\pi}{12} + 1 = 0$. Ecuația de gradul 2 are rădăcinile $z = \cos\dfrac{\pi}{12} + i\sin\dfrac{\pi}{12}$ și $\overline{z} = \cos\dfrac{\pi}{12} - i\sin\dfrac{\pi}{12}$. Cum $|z| = 1$, avem $\dfrac{1}{z} = \overline{z} = \cos\dfrac{\pi}{12} - i\sin\dfrac{\pi}{12}$, deci $z^4 + \dfrac{1}{z^4} = \cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3} + \cos\dfrac{\pi}{3} - i\sin\dfrac{\pi}{3} = 2\cos\dfrac{\pi}{3} = 1$.

1002. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{\ln x(\sin x - x)}{x^2} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\ln x \cdot \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{\sin x - x}{x^3} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} \cdot \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{\sin x - x}{x^3}$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{\sin x - x}{x^3} \overset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{\cos x - 1}{3x^2} \overset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{-\sin x}{6x} = -\dfrac{1}{6}$, deoarece $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (-x) = 0$. Așadar, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{\ln x(\sin x - x)}{x^2} = 0 \cdot (-\dfrac{1}{6}) = 0$.

1003. $4x^2 + 4xy + y^2 - 2x - y = 0 \iff (2x+y)(2x+y) - (2x+y) = 0 \iff (2x+y-1)(2x+y) = 0$. Acest produs este zero, când una dintre paranteze este zero(parantezele nu pot fi simultan zero, deoarece sunt numere reale distincte). Dacă $2x + y - 1 = 0$, avem că M aparține dreptei d_1 de ecuație $d_1 : 2x + y - 1 = 0$. Dacă $2x + y = 0$, avem că M aparține dreptei d_1 de ecuație $d_2 : 2x + y = 0$. Se observă că pantele celor două drepte sunt egale, deci ele sunt paralele. Prin calcul se poate verifica că $(0,1) \in d_1$ și că $(0,0) \in d_2$.

1004. Cu substituția: $u = x - 2024$ integrala devine: $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^u}{e^u + e^{1-u}} du = \int_0^1 \frac{e^u}{\frac{e^{2u}+e}{e^u}} du = \int_0^1 \frac{e^{2u}}{e^{2u}+e} du$. Cu schimbarea de variabilă $v = 1 - u$ avem $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{2(1-v)}}{e^{2(1-v)} + e} dv = \int_0^1 \frac{e^2}{e^2 + e^{2v+1}} dv = \int_0^1 \frac{e}{e^{2v} + e} dv = 1 - I$, deci $I = \dfrac{1}{2}$.

Soluție alternativă: Făcând schimbarea de variabilă $x - 2024 = 2025 - t \Rightarrow \mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$, obținem: $I = \displaystyle\int_{2025}^{2024} \frac{e^{2025-t}}{e^{2025-t} + e^{t-2024}} (-\mathrm{d}t) = \int_{2024}^{2025} \frac{e^{2025-t} + e^{t-2024} - e^{t-2024}}{e^{2025-t} + e^{t-2024}} \mathrm{d}t = \int_{2024}^{2025} \frac{e^{2025-t} + e^{t-2024}}{e^{2025-t} + e^{t-2024}} \mathrm{d}t - \int_{2024}^{2025} \frac{e^{t-2024}}{e^{2025-t} + e^{t-2024}} \mathrm{d}t = \int_{2024}^{2025} \mathrm{d}t - I \Rightarrow I = \frac{1}{2}$.

1005. Fie $x, y, x \in (-1,1)$. $(x*y)*z = (\dfrac{x+y}{1+xy})*z = \dfrac{\frac{x+y}{1+xy} + z}{1 + \frac{x+y}{1+xy} \cdot z} = \dfrac{x+y+z+xyz}{1+xy+xz+yz} = \dfrac{\frac{x+y+z+xyz}{1+yz}}{\frac{1+xy+xz+yz}{1+yz}} = \dfrac{x + \frac{y+z}{1+yz}}{1 + x \cdot \frac{y+z}{1+yz}} = x * (y * z)$, $\forall x, y, z \in (-1,1)$. $x * 0 = \dfrac{x+0}{1+x\cdot 0} = \dfrac{x}{1} = x = \dfrac{x}{1} = \dfrac{0+x}{1+0\cdot x} = 0 * x$, $\forall x \in (-1,1)$, deci 0 este element neutru. $x * (-x) = \dfrac{x+(-x)}{1+x(-x)} = 0 = \dfrac{-x+x}{1+(-x)x} = (-x) * x$, $\forall x \in (-1,1)$. Așadar, $((-1,1), *)$ este un grup. Presupunem că "$*$" admite un element absorbant, pe care îl notăm cu a. Atunci: $\forall x \in (-1,1)$, $x * a = a * x = a \Rightarrow \dfrac{a+x}{1+ax} = a \Rightarrow a^2x = x \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a \in \{\pm 1\}$, care nu aparțin mulțimii $(-1,1)$, deci "$*$" nu poate avea element absorbant. $\dfrac{1}{2} * \dfrac{1}{3} = \dfrac{\frac{5}{6}}{\frac{7}{6}} = \dfrac{5}{7}$.

1006. Folosim substituţia $x = \dfrac{1}{t} \implies \mathrm{d}x = -\dfrac{1}{t^2}\mathrm{d}t \Rightarrow I = \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{\operatorname{arctg} \frac{1}{t}}{\left(\frac{1}{t}\right)^2 + \frac{2}{t} + 1} \cdot \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t =$

$\int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{\operatorname{arctg} \frac{1}{t}}{1+2t+t^2} \mathrm{d}t$. Adunăm expresiile pentru I şi folosim faptul că $\operatorname{arctg} u + \operatorname{arctg} \frac{1}{u} = \frac{\pi}{2}$, $\forall u > 0$. $\Rightarrow 2I = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x}}{1+2x+x^2} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \cdot \int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{1}{x^2+2x+1} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \cdot \int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{1}{(x+1)^2} \mathrm{d}x = -\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{x+1} \Big|_{\frac{1}{2}}^{2} = -\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\right) = \frac{\pi}{12} > \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$.

1007. Folosim substituţia $t = \sin x \implies \mathrm{d}t = \cos x \mathrm{d}x \Rightarrow I = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{1+9t^2} \mathrm{d}t = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

1008. $f(3) - f(1) = 2(40m + n)$ care este par. $f(x) - f(y) = m(x^4 - y^4) + n(x - y)$ care este divizibil cu $(x - y)$.

1009. Funcţiile $\sin x, \cos x \in [-1, 1] \implies 5\sin x + 3\cos x$ este o valoare finită, în timp ce $\lim_{x\to\infty} x^2 + 3x + 5 = \infty$. În concluzie, $L = 0$.

1010. Panta dreptei m este dată de tangenta unghiului pe care dreapta îl face cu axa Ox. Știind că unghiul este de $45°$, avem: $m = \operatorname{tg}(45°) = 1$. Înlocuind în ecuația generală: $y - 3 = 1(x - 2)$.

1011. Se observă că $f(x) = f(-x) \Rightarrow a_{2k+1} = 0$, iar $a_0 + a_1 + \ldots + a_{100} = f(1)$.

1012. $\operatorname{arctg}\Big(\operatorname{tg} \frac{5\pi}{6}\Big) = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(\pi - \frac{\pi}{6})) = \operatorname{arctg}\Big(-\operatorname{tg} \frac{\pi}{6}\Big) = \operatorname{arctg}\Big(\operatorname{tg}(-\frac{\pi}{6})\Big) = -\frac{\pi}{6}$, deoarece $-\frac{\pi}{6} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ și $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x$, $\forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

1013. Folosind teorema bisectoarei, avem: $\frac{BD}{DC} = \frac{7}{9}$. Atunci, lungimea AD este dată de: $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{1+\frac{7}{9}}\overrightarrow{AB} + \frac{\frac{7}{9}}{1+\frac{7}{9}}\overrightarrow{AC}$. Simplificând termenul: $\frac{1}{1+\frac{7}{9}} = \frac{9}{16}$ și $\frac{\frac{7}{9}}{1+\frac{7}{9}} = \frac{7}{16}$. Astfel, avem: $\overrightarrow{AD} = \frac{9}{16}\overrightarrow{AB} + \frac{7}{16}\overrightarrow{AC}$.

1014. $L = \lim_{x\to 5} \frac{2x(x+5)\cdot(\frac{6x+1}{x+5} - \frac{7x-4}{2x})}{2x(x+5)\cdot(x^2-6x+5)} = \lim_{x\to 5} \frac{2x(6x+1)-(x+5)(7x-4)}{2x(x+5)(x-5)(x-1)} = \lim_{x\to 5} \frac{5x^2-29x+20}{2x(x+5)(x-5)(x-1)}$. Observăm că 5 este o soluţie a numărătorului. Impărţind numărătorul la $(x-5) \Rightarrow L = \lim_{x\to 5} \frac{(x-5)(5x-4)}{2x(x+5)(x-5)(x-1)} = \lim_{x\to 5} \frac{5x-4}{2x(x+5)(x-1)} = \frac{21}{400}$.

1015. Scriem $25^{\log_5 x} = x^2, 8^{\log_2 x} = x^3, \log_{0.25} \frac{1}{64} = 3 \Rightarrow 4x - 5x^2 = x^2 + x^3 - 24 \Leftrightarrow x^3 + 6x^2 - 4x - 24 = 0 \Leftrightarrow (x+6)(x-2)(x+2) = 0 \Rightarrow$ ecuația are o singură soluție reală pozitivă.

1016. Rezolvăm prima ecuație $\dfrac{y!}{(y-x)1} = 9\dfrac{y!}{(y-x+1)!} \Leftrightarrow (y-x+1)! = 9(y-x)! \Leftrightarrow$ $y-x+1 = 9 \Leftrightarrow y = x+8$. Înlocuim în a doua ecuație $\dfrac{(x+8)!}{x!\cdot 8!} = 15\dfrac{(x+8)!}{(x+1)!\cdot 7!} \Rightarrow x =$ $119, y = 127$.

1017. $\det(A) = 1 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rang}(A) = 2$. $A^2 = -I_2 \Rightarrow A^3 = -A \Rightarrow A^4 = I_2 \Rightarrow A^5 = A$ de unde rezultă, prin inducție, că $A^{4k} = I_2, A^{4k+1} = A, A^{4k+2} = -I_2, A^{4k+3} = -A$. Deci nu există $k \in \mathbb{N}$ astfel încât $A^k = 2A$. Apoi $A^{2024} = A^{156} = I_2$, dar $A^{705} = A, A^{343} = -A$. $X(2024,-1) = A + I_2 \Rightarrow \det(X(2024,-1)) = 2 = \det(B^3)$. În fine, $\det(X(150,30)) =$ $\det(-I_2 - 30A) = 901$, iar $\det(30B^3) = 900\det(B^3) = 1800$.

1018. În limită se observă suma Riemann asociată funcţiei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{tg}^2\dfrac{\pi x}{4}$, diviziunii $\Delta_n = \left(0, \frac{1}{n}, ..., \frac{n-1}{n}\right)$ şi sistemului de puncte intermediare $\xi_n = \left(\frac{1}{n}, ..., \frac{n}{n}\right)$. Funcția este continuă și deci integrabilă, așa că limita din enunț este egală cu integrala lui f pe $[0,1]$. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\operatorname{tg}^2\dfrac{k\pi}{4n} = \displaystyle\int_0^1 \operatorname{tg}^2\dfrac{\pi x}{4}\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\dfrac{1}{\cos^2\frac{\pi x}{4}} - 1\right)\mathrm{d}x = \left(\dfrac{4}{\pi}\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{4} - x\right)\Big|_0^1 =$ $\dfrac{4}{\pi} - 1$.

1019. Notăm numărul complex z cu $a+bi \Rightarrow \operatorname{Re}(6z^2-3i+2) = \operatorname{Re}(6(a+bi)^2-3i+2) =$ $6a^2-6b^2+2, \operatorname{Im}(7i*\bar{z}-2z*\bar{z}) = \operatorname{Im}(7i*(a-bi)-2(a+bi)(a-bi)) = \operatorname{Im}(7ai+7b-2a^2-2b^2) =$ $7a, 6\operatorname{Im}(\bar{z})^2 = 6b^2 \Rightarrow \operatorname{Re}(6z^2-3i+2) - \operatorname{Im}(7i*\bar{z}-2z*\bar{z}) + 6\operatorname{Im}(\bar{z})^2 = 6a^2-7a+2$ Egalăm cu $7 \Rightarrow 6a^2-7a-5 = 0 \Rightarrow a = \dfrac{21}{12}$ sau $a = -\dfrac{7}{12}$.

1020. Înmulțim relația cu $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$: $\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\sin B + \cos B) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\sin C + \cos C)$. Folosind identitățile trigonometrice: $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin B + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos B = \sin B\cdot\sin\dfrac{\pi}{4} + \cos B\cdot\cos\dfrac{\pi}{4} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin C +$ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos C = \sin C\cdot\sin\dfrac{\pi}{4} + \cos C\cdot\cos\dfrac{\pi}{4} \Rightarrow \sin B\cdot\sin\dfrac{\pi}{4} + \cos B\cdot\cos\dfrac{\pi}{4} = \sin C\cdot\sin\dfrac{\pi}{4} +$ $\cos C\cdot\cos\dfrac{\pi}{4} \Rightarrow \cos\left(B-\dfrac{\pi}{4}\right) = \cos\left(C-\dfrac{\pi}{4}\right)$. Cum funcția cos este pară, avem: $B-\dfrac{\pi}{4} =$ $C-\dfrac{\pi}{4}$ sau $B-\dfrac{\pi}{4} = -\left(C-\dfrac{\pi}{4}\right)$. Primul caz: $B-\dfrac{\pi}{4} = C-\dfrac{\pi}{4} \implies B = C$. În acest caz, triunghiul este isoscel. Al doilea caz: $B-\dfrac{\pi}{4} = -\left(C-\dfrac{\pi}{4}\right) \implies B-\dfrac{\pi}{4} =$ $-C+\dfrac{\pi}{4} \implies B+C = \dfrac{\pi}{2}$. În acest caz, triunghiul este dreptunghic.

1021. Cum $a_1 = 1, a_2 = -1, a_3 = 2, a_4 = -2, \ldots$ deducem formula generala pentru

termenul $a_n = \begin{cases} -\frac{n}{2} & \text{dacă } n \text{ este par,} \\ \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor & \text{dacă } n \text{ este impar.} \end{cases}$. Demonstrând prin inducție: Pentru $n = 1$, avem: $a_1 = 1$, echivalent cu $a_1 = \left\lfloor \frac{1+1}{2} \right\rfloor = \lfloor 1 \rfloor = 1$. Presupunem că formula este adevărată pentru $n = k$. 1. Cazul $k+1$ impar: Dacă $k+1$ este impar, atunci k este par $\to a_k = -\frac{k}{2}$. Atunci, pentru $n = k+1$, avem: $a_{k+1} = a_k + (k+1) = -\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + (k+1)$..
Conform formulei: $a_{k+1} = \left\lfloor \dfrac{k+2}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \dfrac{k+1+1}{2} \right\rfloor$, ceea ce este corect.
2. Cazul $k+1$ par: Dacă $k+1$ este par, atunci k este impar $\Rightarrow a_k = \left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor$. Atunci, pentru $n = k+1$, avem: $a_{k+1} = a_k - (k+1) = \frac{k+1}{2}$..
Conform formulei: $a_{k+1} = -\left\lfloor \dfrac{k+1}{2} \right\rfloor$, deci cel mai mic număr pozitiv n pentru care $a_n \geq 200$ este 399.

1022. $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1 - \frac{\sin x}{\cos x}}{1 + \frac{\sin x}{\cos x}} \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} \mathrm{d}x$. Folosim schimbarea de variabilă $t = \cos x + \sin x \Rightarrow \mathrm{d}t = -\sin x + \cos x \mathrm{d}x \Rightarrow$ integrala devine $\displaystyle\int_1^1 \frac{1}{t} \,\mathrm{d}t = 0$.

1023. Fie $z \in \mathbb{C}$, $z = \cos \dfrac{\pi}{7} + i \sin \dfrac{\pi}{7}$. Conform formulei lui De Moivre, expresia cerută este chiar $\mathrm{Re}(z + z^3 + z^5)$. $z^7 = -1 \iff z^7 + 1 = 0 \iff (z+1)(z^6 - z^5 + z^4 - z^3 + z^2 - z + 1) = 0 \iff z^6 + z^4 + z^2 + 1 = z^5 + z^3 + z \iff z(z^5 + z^3 + z) + 1 = z^5 + z^3 + z \iff z^5 + z^3 + z = \frac{1}{1-z}$. $\dfrac{1}{1-z} = \dfrac{1}{1 - \cos \frac{\pi}{7} - i \sin \frac{\pi}{7}} = \dfrac{1 - \cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7}}{2 - 2\cos \frac{\pi}{7}} \Rightarrow \mathrm{Re}\Big(\dfrac{1}{1-z}\Big) = \dfrac{1 - \cos \frac{\pi}{7}}{2 - 2\cos \frac{\pi}{7}} = \dfrac{1}{2}$.

1024. Folosim substituţia $x = \dfrac{1}{t} \implies \mathrm{d}x = -\dfrac{1}{t^2} \mathrm{d}t \Rightarrow L = \displaystyle\lim_{a\to\infty} \int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{\ln \frac{1}{t}}{\frac{1}{t^2} + 1} \cdot \frac{1}{t^2} \mathrm{d}t = -\lim_{a\to\infty} \int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{\ln t}{\frac{t^2+1}{t^2}} \cdot \frac{1}{t^2} \mathrm{d}t = -\lim_{a\to\infty} \int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{\ln t}{t^2+1} \mathrm{d}t = -L \implies L = 0$.

1025. $L = \displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{3x+1} - \sqrt{7}}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{3x+1} - \sqrt{7}}{x-2} \cdot \frac{\sqrt{3x+1} + \sqrt{7}}{\sqrt{3x+1} + \sqrt{7}}$
$= \displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{3}{\sqrt{3x+1} + \sqrt{7}} = \frac{3}{2\sqrt{7}}$.

1026. $0 \leq \sin^2 x, \cos^2 x \leq 1 \Rightarrow 1 \leq 8^{\cos^2 x} \leq 8, 1 \leq 4^{\sin^2 x} \leq 4 \Rightarrow 8^{\cos^2 x} = 4^{\sin^2 x} = 1 \Rightarrow \sin^2 x = \cos^2 x = 0$ imposibil. Ecuația nu are soluție.

1027. $\log_c((c^{-x})^x) - \log_a \left(\dfrac{1}{c^3}\right) \log_a(b^2) + \log_a \left(\dfrac{c^{2x}}{b^{3x}}\right) + \log_a \left(\dfrac{c^2}{a^x}\right) = -x^2 - x + 6\log_a b \log_a c + 2x \log_a c - 3x \log_a cb + 2\log_a c = (2\log_a c - x)(3\log_a b + x + 1)$. Ca ecuația să prezinte o rădăcină dublă $\Rightarrow 2\log_a c - x = 3\log_a b + x + 1 = 0 \Rightarrow \log_a c^2 = \log_a \left(\dfrac{1}{a}\right) + \log_a \left(\dfrac{1}{b^3}\right) \Rightarrow$

$c^2 = \dfrac{1}{ab^3} \Rightarrow a = \dfrac{1}{c^2b^3}$.

1028. Alegem $x = \dfrac{\pi}{4}$. Atunci avem: $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n + \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n = 1$. Aceasta devine: $2 \cdot \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n = 1$ $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n = \dfrac{1}{2}$. Deci: $2^{-\frac{n}{2}} = 2^{-1}$. Prin urmare, $n = 2$ este singura soluție.

1029. $det(A) = 0 \overset{\text{Cayley-Hamilton}}{\Longrightarrow} A^2 = -9A \Rightarrow A^n = (-9)^{n-1}A$. Dacă $B^{2024} = A \Rightarrow det(B) = 0 \Rightarrow B^n = (\mathrm{Tr}(B))^{n-1}B$. Fie $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}, x, y, z, t \in \mathbb{C} \Rightarrow (\mathrm{Tr}(B))^{2023}B = A \Leftrightarrow (x+t)^{2024} = \mathrm{Tr}(A) = -9 \Rightarrow$ ecuația $B^{2024} = A$ are 2024 soluții în $\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ și 2 în $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$.

1030. $\dfrac{1}{|n+1-x|+2024} < \dfrac{1}{|n-x|+2024} \implies \displaystyle\int_0^1 \dfrac{1}{|n+1-x|+2024}\mathrm{d}x < \int_0^1 \dfrac{1}{|n-x|+2024}\mathrm{d}x \implies I_{n+1} < I_n$. Folosind Teorema de medie, obţinem $\dfrac{1}{|n-x|+2024}$ continuă pe $[0,1] \implies \exists k \in [0,1]$ astfel încât $\displaystyle\int_0^1 \dfrac{1}{|n-x|+2024}\mathrm{d}x = \dfrac{1}{|n-k|+2024}$. În concluzie $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{|n-k|+2024} = 0$.

1031. Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x - \ln(1+x)$. Avem că $f'(x) = \frac{x}{x+1} > 0, \forall x > 0$, deci f este strict crescătoare pe $(0,\infty)$. De asemenea, se observă că $f(0) = 0$, deci din monotonia lui f rezultă că $f(x) > 0, \forall x > 0$. Știm că $x_{n+1} = f(x_n), \forall n \in \mathbb{N}$ și cum $x_0 > 0$, prin inducție se poate demonstra că $x_n > 0, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow x_{n+1} - x_n = -\ln(1+x_n) < 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, deci $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este strict descrescător. Cum $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este și mărginit inferior de 0, rezultă că șirul este convergent. Pentru a-i afla limita, pe care o vom nota cu l, putem trece la limită în relația de recurență și obținem: $l = l - \ln(1+l) \iff l = 0$.

1032. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \overset{\text{Cèsaro-Stolz}}{=} \lim_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{n+1-n} = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} x_n = 0$

1033. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \ln \sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{\ln(x_1x_2\ldots x_n)}{n} \overset{\text{Cèsaro-Stolz}}{=} \lim_{n\to\infty} \ln\left(\dfrac{x_1\ldots x_{n+1}}{x_1\ldots x_n}\right) = \lim_{n\to\infty} \ln(x_{n+1}) = -\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n} = 0$.

1034. Din teorema sinusurilor: $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R \Rightarrow \dfrac{\sin A + \sin B + \sin C}{a+b+c} = \dfrac{1}{2R} \Rightarrow \sin A + \sin B + \sin C = \dfrac{p}{R}$, unde cu R am notat raza cercului circumscris și cu p semiperimetrul triunghiului ABC. Înlocuind, obținem $p = 6$. Ne putem folosi de formula $R = \dfrac{abc}{4s}$, unde s este aria lui ABC, pentru a afla raza R. Aria o aflăm din formula lui Heron: $s = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{6 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 6$. Așadar, avem că $R = \dfrac{3 \cdot 4 \cdot 5}{4 \cdot 6} = \dfrac{5}{2}$ și deci $\sin A + \sin B + \sin C = \dfrac{12}{5}$.

1035. $AB : \dfrac{x - x_A}{x_B - x_A} = \dfrac{y - y_A}{y_B - y_A} \iff \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-3}{2} \iff 2x - 3y + 7 = 0 \iff y = \dfrac{2}{3}x + \dfrac{7}{3}$, $CD : \dfrac{x - x_C}{x_D - x_C} = \dfrac{y - y_C}{y_D - y_C} \iff \dfrac{x-1}{9} = \dfrac{y-0}{6} \iff 6x - 9y - 6 = 0 \iff y = \dfrac{2}{3}x - \dfrac{2}{3}$. Cum $m_{AB} = m_{CD} = \dfrac{2}{3}$, avem că $AB || CD$. Analog se poate arăta $m_{AC} \neq m_{BD}$, deci $ABCD$ este trapez. $\mathcal{A}_{ABCD} = \dfrac{(AB + CD) \cdot h}{2}$, unde $h = d(A, CD) = \dfrac{|6 \cdot 1 - 9 \cdot 3 - 6|}{\sqrt{6^2 + 9^2}} = \dfrac{27}{\sqrt{113}} = \dfrac{9}{\sqrt{13}}$. $AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{13}$; $CD = \sqrt{(x_C - x_D)^2 + (y_C - y_D)^2} = \sqrt{117} = 3\sqrt{13} \Rightarrow \mathcal{A}_{ABCD} = \dfrac{9 \cdot 4\sqrt{13}}{2\sqrt{13}} = 18$.

1036. Folosim metoda integrării prin părţi $u = \cos(3x) \implies \mathrm{d}u = -3\sin(3x), v' = e^{-3x} \implies v = -\dfrac{1}{3} \cdot e^{-3x} \Rightarrow I = \cos(3x) \cdot \left(-\dfrac{1}{3} \cdot e^{-3x}\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{3}}^{0} - \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{0} \sin(3x) \cdot e^{-3x}\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{3} - \dfrac{e^{\pi}}{3} - \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{0} \sin(3x) \cdot e^{-3x}\mathrm{d}x$. Folosim, din nou, în mod similar, metoda integrării prin părţi $u = \sin(3x) \implies \mathrm{d}u = 3\cos(3x), v' = e^{-3x} \implies v = -\dfrac{1}{3} \cdot e^{-3x}$. In concluzie, $I = -\dfrac{1}{3} - \dfrac{e^{\pi}}{3} + \sin(3x) \cdot \dfrac{1}{3} \cdot e^{-3x}\Bigg|_{-\frac{\pi}{3}}^{0} + \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{0} -\cos(3x) \cdot e^{-3x}\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{3} - \dfrac{e^{\pi}}{3} - I \implies I = -\dfrac{e^{\pi} + 1}{6}$.

1037. Notăm $a = \sin\dfrac{\pi}{10}$ și $b = \cos\dfrac{\pi}{5}$. Deoarece $\sin^2\alpha = \dfrac{1 - \cos(2\alpha)}{2}$ avem că $a^2 = \dfrac{1-b}{2} \Rightarrow 2a^2 + b = 1$. De asemenea $\cos^2\alpha = \dfrac{1 + \cos(2\alpha)}{2}$, deci $b^2 = \dfrac{1 + \cos\frac{2\pi}{5}}{2} = \dfrac{1 + \sin\frac{\pi}{10}}{2} = \dfrac{1+a}{2} \Rightarrow 2b^2 - a = 1$. Așadar, $2a^2 + b = 1 = 2b^2 - a \iff 2a^2 - 2b^2 + a + b = 0 \iff 2(a+b)(2a - 2b + 1) = 0$. Cum $a + b \neq 0$, rezultă că $2a - 2b + 1 = 0 \iff 2a = 2b - 1 \iff 2a = 2 - 4a^2 - 1 = 1 - 2a^2 \iff 4a^2 - 2a + 1 = 0$. Cum $\dfrac{\pi}{10}$ se află în primul cadran, valoarea lui $\sin\dfrac{\pi}{10}$ va fi rădăcina pozitivă a ecuației de mai sus, deci $\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$.

1038. Vom calcula derivatele lui f și punctele în care se anulează acestea:

$f'(x) = \dfrac{4(4x^2+1) - 4x \cdot 8x}{(4x^2+1)^2} = 4\dfrac{-4x^2+1}{(4x^2+1)^2}$, $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) = 0 \iff -4x^2 + 1 = 0 \iff x \in \{\pm\dfrac{1}{2}\}$.

$f''(x) = 4\dfrac{-8x(4x^2+1)^2 - (-4x^2+1) \cdot 2(4x^2+1) \cdot 8x}{(4x^2+1)^4} = 4\dfrac{-32x^3 - 8x + 64x^3 - 16x}{(4x^2+1)^3} =$

$4\dfrac{32x^3-24x}{(4x^2+1)^3} = 32x\dfrac{(4x^2-3)}{(4x^2+1)^3}$, $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f''(x) = 0 \iff x = 0$ sau $4x^2 - 3 = 0 \iff$
$x \in \{-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\}$.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$. Tabelul de variație a lui f este:

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	∞
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$0\searrow$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\searrow 0$

Așadar, f are două puncte de extrem global: $x = -1$ și $x = 1$ și 3 puncte de inflexiune.
$\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln(4x^2+1)\Big|_0^{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\ln 9 - \frac{1}{2}\ln 1 = \ln 3.$

1039. Determinantul sistemului este $d = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 2 \\ 1 & \alpha+1 & 1 \\ 2 & 1 & \alpha-1 \end{vmatrix} = (\alpha+3)(\alpha^2-3\alpha+1) \Rightarrow$ sistemul este compatibil determinat pentru $\alpha \in \mathbb{R} - \left\{-3, \frac{3+\sqrt{5}}{2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right\}$.

1040. Cum $\sin\alpha\cdot\sin\beta = \dfrac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}$, $\sin(x - \arcsin x)\cdot\sin(x+\arcsin x) =$
$= \frac{1}{2}(\cos(x - \arcsin x - (x + \arcsin x)) - \cos(x - \arcsin x + x + \arcsin x)) =$
$= \frac{1}{2}(\cos(-2\arcsin x) - \cos(2x)) = \frac{1}{2}(\cos(2\arcsin x) - \cos(2x)) =$
$= \frac{1}{2}(1 - 2\sin^2(\arcsin x) - 1 + \sin^2 x) = \frac{1}{2}(-2x^2 + 2\sin^2 x) = \sin^2 x - x^2$, $x \in [-1, 1]$

1041. Dezvoltăm termenii egalității $\dfrac{n!}{(n-k-1)!} = a\dfrac{n!}{(n-k+1)!} \Leftrightarrow a = (n-k)(n-k+1)$ (produs de 2 numere consecutive) $\Rightarrow a \in \{2, 6, 12, \ldots\}$.

1042. Pentru $x = 0, y = 10 \Rightarrow$ graficul $\boxed{\text{B}}$ nu este corect. De asemenea, pentru $x = -2, y = 0 \Rightarrow$ graficul corect este cel reprezentat de varianta $\boxed{\text{A}}$.

1043. Folosim relația $\cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \dfrac{\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{u}||\overrightarrow{v}|}$ și avem: $2(a-1) = \sqrt{2(a^2+1)}$. De aici rezultă că $a = 2 + \sqrt{3}$. Analog se obține $b_1 = -1$ și $b_2 = \dfrac{3}{2}$.

1044. Pentru $(1-x_1^2)(1-x_2^2)(1-x_3^2)(1-x_4^2) = (a+1)(a+3)$ observăm că: $(1-x_i^2) = (1-x_i)(1+x_i) \Rightarrow \displaystyle\prod_{i=1}^{4}(1-x_i^2) = \prod_{i=1}^{4}(1-x_i)\cdot\prod_{i=1}^{4}(1+x_i) = f(1)\cdot f(-1) \Rightarrow \prod_{i=1}^{4}(1-x_i^2) =$ $(a+1)(a+3)$. Pentru $(1-x_1^2)(1-x_2^2)(1-x_3^2)(1-x_4^2) = (a+1)^2$, conform calculelor de mai sus: $(a+1)(a+3) \neq (a+1)^2$ pentru orice $a \neq 2$. Pentru $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2 = 9-2a$, folosim formula $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2 = (x_1+x_2+x_3+x_4)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4) = (-3)^2 - 2a = 9 - 2a$. Pentru $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 9 - 4a$, conform calculelor de mai sus: $9 - 2a \neq 9 - 4a$ pentru orice $a \neq 0$.

1045. $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OD})$. Grupăm vectorii $\overrightarrow{OB}$ cu $\overrightarrow{OA}$ și $\overrightarrow{OC}$ cu $\overrightarrow{OD}$: $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left((\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD})\right)$. Rezultă că: $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD})$ $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC})$. Rezultă că: $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD})$.

1046. Funcţia este continuă pe intervalul de integrare, aşa că aplicăm Teorema de Medie: $L = \lim\limits_{n\to\infty} n^5 \cdot (n+1-n+1) \cdot \dfrac{k^4+9}{k^9+16} = \lim\limits_{k\to\infty} 2 \cdot \dfrac{k^9+9k^5}{k^9+16} = 2, k \in (n-1, n+1)$.

1047. Legea de compozitie devine: $x * y = 2(x+5)(y+5) - 5$, care este comutativă. Pentru a găsi elementul neutru e, avem: $x * e = 2(x+5)(e+5) - 5 = x$ $2(x+5)(e+5) = x+5$, oricare ar fi x, deci $2(e+5) = 1 \iff e+5 = \dfrac{1}{2} \Rightarrow e = -\dfrac{9}{5}$. Căutăm un element a astfel încât: $x * a = a$ oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$. Conform legii de compoziție date: $2(x+5)(a+5) = a$. Deoarece ecuația trebuie să fie adevărată pentru orice x, putem simplifica: $a+5 = 0 \implies a = -5$. Atunci: $(-10)*(-9)*\cdots*9*10 = -5$..

1048. $a_n = \sqrt[n]{\dfrac{(2n)!}{n! \cdot n^n}} = \sqrt[n]{\dfrac{(n+1)\cdot\ldots\cdot(2n)}{n^n}} = \sqrt[n]{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\left(1+\dfrac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\dfrac{n}{n}\right)}$.

Aplicând logaritmul natural, obţinem $\ln a_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(1+\dfrac{k}{n}\right)$. Aşadar, a_n reprezintă suma Riemann asociată funcţiei $f : [0,1] \to \mathbb{R}, f(x) = \ln(1+x)$, diviziunii $\Delta_n = \left(0, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{n}{n}\right)$ şi sistemului de puncte intermediare $\xi_n = \left(\dfrac{1}{n}, \ldots, \dfrac{n}{n}\right)$. Cum f este integrabilă, rezultă că şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este convergent şi avem că $\lim\limits_{n\to\infty} \ln a_n = \displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \ln(x+1)\mathrm{d}x = \ln\frac{4}{e} \implies \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{4}{e}$.

1049. Scriem 14! ca produs de numere prime, $14! = 2^{11} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13$. Le grupăm corespunzător $\Rightarrow \log_{13}(14!) = 1 + 3\log_{13} 6 + 2\log_{13} 8 + 2\log_{13} 70 + \log_{13} 11 + 2\log_{13} 3, \log_{13}(14!) = 1 + 4\log_{13} 6 + 2\log_{13} 14 + 3\log_{13} 2 + \log_{13} 10 + \log_{13} 22 + \log_{13} 15$.

1050. Funcţia este impară, iar intervalul de integrare este simetric $\Rightarrow$ rezultatul este 0.

1051. $\det(A) = 16 \neq 0 \Rightarrow \text{rang}\,(A) = 2$. Așadar $\det(A^n)$ poate fi scris astfel: $\det(A^n) = a_n^2 + b_n^2 = (\det(A))^n = 16^n$. De aici rezultă că $a_{14}^2 - 2^{24} \cdot a_8^2 = (16^{14} - b_{14}^2) - 2^{24}(16^8 - b_8^2) =$

$16^{14}-b_{14}^2-16^6\cdot 16^8+16^6 b_8^2=16^6\cdot b_8^2-b_{14}^2 \iff a_{14}^2+b_{14}^2=2^{24}(a_8^2+b_8^2) \iff 2^56=2^56$.

$\dfrac{a_{20}^2+b_{20}^2}{a_{30}^2+b_{30}^2}=\dfrac{16^{20}}{16^{30}}=16^{-10}$.

1052. Determinantul sistemului este $d=\begin{vmatrix}\alpha & 1 & 2\\ 1 & \alpha+1 & 1\\ 2 & 1 & \alpha\end{vmatrix}=(\alpha+3)\alpha(\alpha-2)\Rightarrow$ sistemul este compatibil determinat pentru $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{-3,0,2\}$.

1053. Notăm cu I integrala din enunț. Facem schimbarea de variabilă $x=\pi-t$ și obținem: $I=\displaystyle\int_\pi^0\frac{(\pi-t)\sin(\pi-t)}{\cos^2(\pi-t)-3}(-\mathrm{d}t)=\int_0^\pi\frac{(\pi-t)\sin t}{\cos^2 t-3}\mathrm{d}t=\pi\int_0^\pi\frac{\sin t}{\cos^2 t-3}\mathrm{d}t-I$, deci $I=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi\frac{\sin t}{\cos^2 t-3}\mathrm{d}t=-\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt3}\ln\left|\frac{\cos t-\sqrt3}{\cos t+\sqrt3}\right|\Big|_0^\pi=-\frac{\pi}{4\sqrt3}\Big(\ln\left|\frac{-1-\sqrt3}{-1+\sqrt3}\right|-$ $\ln\left|\dfrac{1-\sqrt3}{1+\sqrt3}\right|\Big)=-\dfrac{\pi}{4\sqrt3}\ln\left|\dfrac{1+\sqrt3}{-1+\sqrt3}\right|^2\Rightarrow I=-\dfrac{\pi}{2\sqrt3}\ln\dfrac{\sqrt3+1}{\sqrt3-1}$.

1054. $\sin\dfrac{\pi}{10}=\sqrt{1-\cos^2\dfrac{\pi}{10}}=\dfrac{\sqrt5-1}{4}$. Putem rescrie așadar ecuația astfel: $\dfrac{\frac{\sqrt5-1}{4}}{\sin x}+\dfrac{\frac{\sqrt{10+2\sqrt5}}{4}}{\cos x}=2\iff\dfrac{\sin\frac{\pi}{10}}{\sin x}+\dfrac{\cos\frac{\pi}{10}}{\cos x}=2\iff\sin\dfrac{\pi}{10}\sin x+\cos\dfrac{\pi}{10}\cos x=2\sin x\cos x$, adică $\sin\left(\frac{\pi}{10}+x\right)=\sin 2x$. Soluția generală a acestei ecuații este: $\dfrac{\pi}{10}+x=n\pi+(-1)^n2x$, $n\in\mathbb{Z}$. Soluțiile din $(0,\pi)$ se obțin pentru $n\in\{0,1,3\}$ și sunt $x\in\left\{\dfrac{\pi}{10},\dfrac{3\pi}{10},\dfrac{29\pi}{30}\right\}$.

1055. Aflăm formula generală a unui termen a dezvoltării: $T_{k+1}=(-1)^k\cdot 3^{\frac{7n-7k}{5}}\cdot C_n^k\cdot x^{\frac{13k+2n}{5}}$. Știm din enunț că $(-1)^5\cdot 3^{\frac{7n-7\cdot5}{5}}\cdot C_n^5=-3^{14}\cdot 3003\Rightarrow n=15$. Aflăm termenul care îl conține pe x^{32}: $\dfrac{13k+30}{5}=32\Rightarrow k=10\Rightarrow T_{11}\Rightarrow$ coeficientul lui T_{11} este $3^7C_{15}^{10}$.

1056. $L=\displaystyle\lim_{x\to4}\frac{(\sqrt{x+12}+x)(\sqrt{x+12}-x)}{(\sqrt{x+12}+x)(x^2-16)}=\lim_{x\to4}\frac{(-3-x)(x-4)}{(x-4)(x+4)(\sqrt{x+12}+x)}=$ $\displaystyle\lim_{x\to4}\frac{-3-x}{(x+4)(\sqrt{x+12}+x)}=-\frac{7}{64}$.

1057. $x_1=x_0+e^{-x_0}>0$, deoarece $x_0>0$ și analog se poate demonstra prin inducție că $\forall n\in\mathbb{N}$, $x_n>0$ și $x_{n+1}-x_n=e^{-x_n}>0$, deci $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ crescător. Putem presupune că șirul ar fi mărginit superior, caz în care ar fi convergent la $l\in\mathbb{R}$ și am putea trece la limită în relația de recurență: $l=l+e^{-l}\iff e^{-l}=0$, fapt care contrazice $l\in\mathbb{R}$. Așadar, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=\infty$. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n+e^{-x_n}}{x_n}=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{e^{-x_n}}{x_n})=1+\frac{0}{\infty}=1$, deci conform consecinței lemei lui Cezaro-Stolz avem $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=1$.

1058. Fie $\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *și* $\begin{pmatrix} 1 & a' & b' \\ 0 & 1 & c' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ din $H_3(M)$. $\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a' & b' \\ 0 & 1 & c' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$ $\begin{pmatrix} 1 & a+a' & b+ac'+b' \\ 0 & 1 & c+c' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in H_3(M)$, $\forall M \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, deci " $\cdot$ " este o operație pe $H_3(M), M \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Asociativitatea acestei operații se moștenește din asociativitatea înmulțirii matricilor de ordinul 3 cu intrări complexe, reale, respectiv întregi.

De asemenea, elementul neutru $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in H_3(M)$, pentru $M = \mathbb{Z}$ sau $M = \mathbb{R}$.

Se poate verifica prin calcul că $\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a & ab-c \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in H_3(M)$, pentru $M = \mathbb{Z}$ sau $M = \mathbb{R}$, deci orice matrice din mulțime va avea inversa tot în această mulțime. În concluzie, $(H_3(\mathbb{R}), \cdot)$ și $(H_3(\mathbb{Z}), \cdot)$ sunt grupuri. $\forall A \in H_3(\mathbb{R})$, $\det(A) = 1+0+0-0-0-0 = 1$.

1059. $\cos\left(\arcsin\frac{7}{\sqrt{50}} + \arccos\frac{3}{5}\right) = \cos\left(\arcsin\frac{7}{\sqrt{50}}\right)\cos\left(\arccos\frac{3}{5}\right) -$ $\sin\left(\arcsin\frac{7}{\sqrt{50}}\right)\sin\left(\arccos\frac{3}{5}\right)$. Folosim acum $\arcsin x = \arccos\left(\sqrt{1-x^2}\right)$ și $\arccos x = \arcsin\left(\sqrt{1-x^2}\right)$, pentru $x \in (0,1)$. Cum $\frac{7}{\sqrt{50}}, \frac{3}{5} \in (0,1)$, avem $\arcsin\frac{7}{\sqrt{50}} = \arccos\frac{1}{\sqrt{50}}$, $\arccos\frac{3}{5} = \arcsin\frac{4}{5}$. Așadar, $\cos\left(\arcsin\frac{7}{\sqrt{50}} + \arccos\frac{3}{5}\right) = \cos\left(\arccos\frac{1}{\sqrt{50}}\right)$ $\cos\left(\arccos\frac{3}{5}\right) - \sin\left(\arcsin\frac{7}{\sqrt{50}}\right)\sin\left(\arcsin\frac{4}{5}\right) = \frac{1}{\sqrt{50}}\cdot\frac{3}{5} - \frac{7}{\sqrt{50}}\cdot\frac{4}{5} = \frac{3-28}{5\sqrt{50}} =$ $-\frac{5}{\sqrt{50}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow \arccos\left(\cos\left(\arcsin\frac{7}{\sqrt{50}} + \arccos\frac{3}{5}\right)\right) = \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$.

1060. Pentru a determina punctele de acumulare, vom calcula $L = \lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n \cdot \frac{n+1}{7n}$, în funcţie de paritatea lui $n \Rightarrow L = \frac{1}{7}$, dacă n este par și $L = -\frac{1}{7}$ dacă n este impar. Ambele valori sunt puncte de acumulare.

1061. $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \Rightarrow$ ecuația devine $2\cos^2 x - 1 + 3\cos x - 1 = 0 \iff (2\cos x - 1)(\cos x + 2) = 0$. Singura soluție validă este $\cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm \arccos\frac{1}{2} + 2n\pi = \pm\frac{\pi}{3} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$.

1062. $\lim\limits_{x\to\infty} x\Big(\frac{\pi}{6} - \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}x}{x+\pi}\Big) = \lim\limits_{x\to\infty} x\big(\operatorname{arctg}\sqrt{3} - \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}x}{x+\pi}\big)$

$= \lim\limits_{x\to\infty} x \cdot \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}x}{x+\pi}}{1 + \frac{3x}{x+\pi}} = \lim\limits_{x\to\infty} x \cdot \operatorname{arctg}\dfrac{\pi\sqrt{3}}{4x+\pi} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x\pi\sqrt{3}}{4x+\pi}\dfrac{\operatorname{arctg}\frac{\pi\sqrt{3}}{4x+\pi}}{\frac{\pi\sqrt{3}}{4x+\pi}} = \dfrac{\pi\sqrt{3}}{4}$, deoarece $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{4x+\pi} = 0$ și $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} t}{t} = 1$.

1063. Vom afla ecuațiile dreptelor $AB : \dfrac{x - x_A}{x_B - x_A} = \dfrac{y - y_A}{y_B - y_A} \iff \dfrac{x + \frac{1}{15}}{-\frac{3}{5} + \frac{1}{15}} = \dfrac{y - \frac{8}{15}}{0 - \frac{8}{15}} \iff 5x - 5y + 3 = 0$ și $AC : \dfrac{x - x_A}{x_C - x_A} = \dfrac{y - y_A}{y_C - y_A} \iff 7x - y + 1 = 0$. Reuniunea bisectoarelor unghiului A, care se obține ca intersecție a dreptelor AB și AC, este locul geometric al punctelor egal depărtate de aceste două drepte. Ecuația acestui loc geometric este așadar: $\dfrac{|5x - 5y + 3|}{\sqrt{5^2 + 5^2}} = \pm\dfrac{|7x - y + 1|}{\sqrt{7^2 + 1^2}} \iff |5x - 5y + 3| = |7x - y + 1| \iff 5x - 5y + 3 = \pm(7x - y + 1)$, de unde se obțin cele două bisectoare de ecuații $x + 2y - 1 = 0$ și $6x - 3y + 2 = 0$. Observăm că ecuația $\boxed{\text{D}}$ este echivalentă cu $6x - 3y + 2 = 0$.

1064. Scriem $z = x + yi$; $x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow |z - a| = \sqrt{(x-4)^2 + (y-4)^2}$ și scriem inegalitatea ca $2 < \sqrt{(x-4)^2 + (y-4)^2} < 3 \Rightarrow 4 < (x-4)^2 + (y-4)^2 < 36$.

1065. Folosim substituţia $x = 4 - t \implies \mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$. $I = \displaystyle\int_0^4 \frac{1}{4 + 2^{4-t}}\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\int_0^4 \frac{2^t}{4 + 2^t}\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\cdot 4 - \frac{1}{4}\int_0^4 \frac{4}{4 + 2^t}\mathrm{d}t = 1 - I \implies I = \frac{1}{2}$.

1066. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$, deci $y = 1$ asimptotă orizontală pentru G_f. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = \dfrac{2}{0_-} = -\infty$ și $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = \dfrac{2}{0_+} = \infty$, deci $x = 1$ asimptotă verticală pentru G_f. Așadar, G_f admite două asimptote. Ecuația tangentei în $x = 2$ este: $y - f(2) = f'(2)(x - 2)$ $f'(x) = \dfrac{-2}{(x-1)^2} \Rightarrow f'(2) = -2$ și $f(2) = \dfrac{3}{1} = 3$, deci ecuația tangentei este: $y - 3 = -2(x - 2) \iff y = -2x + 7$. Observăm că $f'(x) < 0$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, deci f este strict descrescătoare pe $(-\infty, 1)$ și pe $(1, \infty)$. Folosindu-ne de informațiile cu privire la asimptotele lui f, avem că: $f(x) < 1$, $\forall x \in (-\infty, 1)$ și $f(x) > 1$, $\forall x \in (1, \infty)$, deci pentru $a = 1$, ecuația $a = f(x)$ nu are soluție.

1067. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{n}{(n+k)^2\sqrt[4]{((1+\frac{k}{n})^4+1)^3}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{n^2}{(n+k)^2\sqrt[4]{((1+\frac{k}{n})^4+1)^3}}=$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{(1+\frac{k}{n})^2\sqrt[4]{((1+\frac{k}{n})^4+1)^3}}$. Avem deci o sumă Riemann atașată funcției $f:[1,2]\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{x^2\sqrt[4]{(x^4+1)^3}}$, diviziunii $\Delta_n=\left(1,1+\frac{1}{n},...,1+\frac{n}{n}\right)$ și sistemului de puncte intermediare $\xi_n=\left(1+\frac{1}{n},...,1+\frac{n}{n}\right)$. Cum funcția f este continuă pe $[1,2]$, ea va fi integrabilă pe acest interval și limita sumei Riemann va fi așadar egală cu integrala lui f pe $[1,2]$. Vom calcula acum valoarea acestei integrale: $\displaystyle\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=$

$\displaystyle\int_1^2\frac{1}{x^2\sqrt[4]{(x^4+1)^3}}\mathrm{d}x=\int_1^2\frac{1}{x^2\sqrt[4]{[x^4(1+x^{-4})]^3}}\mathrm{d}x=\int_1^2\frac{1}{x^2\cdot x^3\sqrt[4]{(1+x^{-4})^3}}\mathrm{d}x=$
$\displaystyle\int_1^2\frac{1}{x^5\sqrt[4]{(1+x^{-4})^3}}\mathrm{d}x=\int_1^2\frac{x^{-5}}{(1+x^{-4})^{\frac{3}{4}}}\mathrm{d}x=-\frac{1}{4}\cdot 4(1+x^{-4})^{\frac{1}{4}}\Big|_1^2=-(1+x^{-4})^{\frac{1}{4}}\Big|_1^2=$
$\sqrt[4]{2}-\sqrt[4]{\dfrac{17}{16}}$.

1068. Cum $\overrightarrow{0}=\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}\Rightarrow\overrightarrow{0}=3\overrightarrow{HG}$. Deci: $\overrightarrow{HG}=\overrightarrow{0}$, așadar, $H=G$. Ceea ce înseamnă că ortocentrul coincide cu centrul de greutate,deci triunghiul este echilateral.

1069. Rescriem $f(x)=(x+1)(x^2+(a-1)\cdot x+1)$ și știm că una dintre rădăcini este -1, iar celelalte două rădăcini sunt soluții ale ecuației de gradul al doilea. Pentru ca ecuația de gradul al doilea să aibă soluții reale, discriminantul său trebuie să fie mai mare sau egal cu zero. Astfel, a trebuie să aparțină intervalului $a\in(-\infty,-1]\cup[3,\infty)$.

1070. Folosind faptul că $\sin x=\mathrm{tg}\,x\cdot\cos x$, rescriem I în felul următor: $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{tg}\,x}{\mathrm{tg}\,x+1}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$. Folosim, apoi, schimbarea de variabilă $t=\mathrm{tg}\,x\implies\mathrm{d}t=\dfrac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$ și avem: $I=\displaystyle\int_0^1\frac{t}{t+1}\mathrm{d}t=\int_0^1\mathrm{d}t-\int_0^1\frac{1}{t+1}\mathrm{d}t=(t-\ln|t+1|)\Big|_0^1=1-\ln 2$.

1071. Circumferința este $16\Leftrightarrow 2\pi R=16\Leftrightarrow R=\dfrac{8}{\pi}$, unde R este raza cercului, de unde rezultă că distanța de la centrul cercului până la vârfuri este egală cu R. R mai este egal cu $\dfrac{2}{3}h$, unde h este înălțimea triunghiului echilateral. Notăm cu l lungimea laturii triunghiului $\Rightarrow R=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{l\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow l=\sqrt{3}R\Leftrightarrow l=\dfrac{8\sqrt{3}}{\pi}\Rightarrow a=\dfrac{48\sqrt{3}}{\pi^2}, P=\dfrac{24\sqrt{3}}{\pi}, r=\dfrac{4}{3\pi}$.
$\dfrac{a}{P^2}=\dfrac{16\sqrt{3}}{24^2}\notin\mathbb{Q}, a<P^2, r<P, \dfrac{P}{a}=\dfrac{\pi}{2}$.

1072. Pentru a obține o lege comutativă, tabla legii trebuie să fie simetrică față de diagonala principală; se completează fără restricții elementele de pe diagonală și deasupra ei (restul vor fi simetrice), deci avem $\frac{n \cdot (n+1)}{2}$ poziții; cum fiecare poziție poate fi ocupată de n valori, rezultă că avem $n^{\frac{n\cdot(n+1)}{2}}$ legi diferite.

1073. Scriem $\log_7(9x^2 - 12x + 5)$ ca $\log_7((3x-2)^2+1) \Rightarrow$ pentru $x = \frac{2}{3}, y = 0$.

1074. Folosim substituţia $t = x + \frac{\pi}{4} \implies \mathrm{d}t = \mathrm{d}x$. $I = \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \frac{\sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right)}{\sin t}\mathrm{d}t =$ $\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \frac{\sin t \cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4}\cos t}{\sin t}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \frac{\sin t - \cos t}{\sin t}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(t\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} - \ln|\sin x|\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\right) =$ $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

1075. Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \cos^{2^{n+1}} x + \sin^{2^{n+1}} x$. Atunci, $f(x) = (\cos^2 x)^{2^n} + (\sin^2 x)^{2^n} = (\cos^2 x)^{2^n} + (1 - \cos^2 x)^{2^n}$. Facem acum schimbarea de variabilă $t = \cos^2 x$ și privim funcția f ca fiind funcția $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, $g(t) = t^{2^n} + (1-t)^{2^n}$. $g'(t) = 2^n t^{2^n-1} - 2^n(1-t)^{2^n-1} \Rightarrow g'(t) = 0 \iff t = \frac{1}{2}$. Minimul lui g se atinge în acest punct și este egal cu $g(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2})^{2^n} + (\frac{1}{2})^{2^n} = \frac{1}{2^{2^n-1}}$.

1076. Folosim teorema sinusurilor și proprietatea din enunț și obținem: $\frac{a^2}{4R^2} + \frac{b^2}{4R^2} = \frac{c^2}{4R^2}$. Înmulțind cu $4R^2$ obținem: $a^2 + b^2 = c^2$ Prin urmare, triunghiul ABC este dreptunghic.

1077. Din Teorema Cayley-Hamilton, cum $\det(A) = 0 \Rightarrow A^2 = 10A$, deci înmulțind succesiv cu A la dreapta obținem $A^n = 10^{n-1}A$ (se poate demonstra și prin inducție). $\det\left(\sum_{k=1}^{2024} A^k\right) = \det(A + A^2 + A^3 + ... + A^{2024}) = \det A * \det(I_2 + A + A^2 + ... + A^{2023}) = 0.$

1078. Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \ln 2 \cdot x^n$, cu $n \in \mathbb{N}$. Observăm că L este definiţia derivatei funcţiei f, aşadar, $L = \ln 2 \cdot n \cdot x^{n-1}$.

1079. Determinantul sistemului este $d = \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-1)^2(a+2) \Rightarrow$ pentru $a \in \mathbb{R} - \{1, -2\}$ sistemul este compatibil determinat cu $x = y = z = \frac{1}{a+2}$. Pentru $a = -2 \Rightarrow d_1 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0, d_c = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow$ sistemul este incompatibil.

Pentru $a = 1 \Rightarrow d_1 = 1 \neq 0 \Rightarrow d_{c1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, d_{c2} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ sistemul este compatibil nedeterminat.

1080. Folosim substituţia $\operatorname{tg} \dfrac{x}{2} = t$, $\mathrm{d}x = \dfrac{2}{t^2+1}\mathrm{d}t$, $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, și $\operatorname{tg} x = \dfrac{2t}{1-t^2}$. $I = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{2t}{1-t^2} \cdot \frac{1}{1+2\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t = 4\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{t}{(1-t^2)(1+t^2+2\cdot(1-t^2))}\mathrm{d}t$
$= 4\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{t}{t^4-4t^2+3}\mathrm{d}t$. Cu substituţia $u = t^2$, $\mathrm{d}u = 2t\mathrm{d}t, I = 2\displaystyle\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{1}{u^2-4u+3}\mathrm{d}u =$
$= 2 \cdot \dfrac{-1}{2}\displaystyle\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{(u-3)-(u-1)}{(u-3)\cdot(u-1)}\mathrm{d}u = \int_{\frac{1}{3}}^0 \frac{1}{u-1}\mathrm{d}u - \int_{\frac{1}{3}}^0 \frac{1}{u-3}\mathrm{d}u = \ln\left|\frac{u-1}{u-3}\right|\Bigg|_{\frac{1}{3}}^0 = \ln\frac{1}{3} -$
$\ln\dfrac{1}{4} = \ln\dfrac{4}{3}$.

1081. Maximul este atins la "mijloc", datorita proprietății de simetrie a coeficienților binomiali, deci termenul cel mai mare va fi $C_{5n}^{\frac{5n}{2}}$.

1082. $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2} \implies \cos^4 x = \left(\dfrac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 = \dfrac{1+2\cos 2x+\cos^2 2x}{4} =$
$= \dfrac{\frac{3}{2}+2\cos 2x+\frac{\cos 4x}{2}}{4} = \dfrac{3}{8}+\dfrac{\cos 2x}{2}+\dfrac{\cos 4x}{8}$. $F(x) = \displaystyle\int\left(\frac{3}{8}+\frac{\cos 2x}{2}+\frac{\cos 4x}{8}\right)\mathrm{d}x =$
$\dfrac{\sin(4x)+8\sin(2x)+12x}{32}+C$. $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{3\pi+9}{32} \implies C = \dfrac{1}{32}$.

1083. $36\cos^2 x + 36\sin x - 34 = 36 - 36\sin^2 x + 36\sin x - 34 = 2 - 36\sin^2 x + 36\sin x =$ $11 - (36\sin^2 x - 36\sin x + 9) = 11 - (3 - 6\sin x)^2 \Rightarrow$ cea mai mare valoare este atinsă dacă $3 - 6\sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow$ valoarea maximă e 121.

1084. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2+k^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \frac{n^2}{n^2+k^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \frac{1}{1+(\frac{k}{n})^2}$. Observăm că în limită este suma Riemann atașată funcției integrabile $f : [0,1] \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, diviziunii $\Delta_n = \left(0, \dfrac{1}{n}, \ldots, \dfrac{n}{n}\right)$ și sistemului de puncte intermediare $\xi_n = \left(\dfrac{1}{n}, \ldots, \dfrac{n}{n}\right)$, așadar limita sumei va fi integrala lui f pe $[0,1]$. $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \operatorname{arctg} x\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$.

1085. Notăm cele 8 puncte coliniare cu $C_1, C_2, ..., C_8$ și cu $N_1, N_2, ..., N_{25}$ pe cele care nu sunt coliniare. Avem o dreaptă ce unește cele 8 puncte coliniare, $C_8^1 * C_{25}^1$ drepte de tipul $C_iN_j, 1 \leq i \leq 8, 1 \leq j \leq 25$ și C_{25}^2 drepte de tipul $N_iN_j, 1 \leq i \leq 25, 1 \leq j \leq 25 \Rightarrow$ sunt necesare 501 drepte.

1086. $z = \sqrt{12}\Big(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\Big) \Leftrightarrow z = \sqrt{12}\Big(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\Big) \Rightarrow z_0 = \sqrt[8]{12}\Big(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\Big)$, $z_1 = \sqrt[8]{12}\Big(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\Big)$, $z_2 = \sqrt[8]{12}\Big(\cos\frac{13\pi}{12}+i\sin\frac{13\pi}{12}\Big)$, $z_3 = \sqrt[8]{12}\Big(\cos\frac{19\pi}{12}+ +i\sin\frac{19\pi}{12}\Big)$. $z_0^2 = \sqrt[4]{12}\Big(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\Big)$, $z_1^2 = \sqrt[4]{12}\Big(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\Big)$, $z_2z_3 = \sqrt[4]{12} \Big(\cos\frac{13\pi}{12}\cos\frac{19\pi}{12}+i\sin\frac{19\pi}{12}\Big)\cos\frac{13\pi}{12}+i\sin\frac{13\pi}{12}\cos\frac{19\pi}{12}-\sin\frac{13\pi}{12}\sin\frac{19\pi}{12} = \sqrt[4]{12}\Big(\cos\frac{8\pi}{3} + i\sin\frac{8\pi}{3}\Big)$. $z_0^2+z_1^2 = -\frac{\sqrt[4]{12}}{2}\Big(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\Big)$. $z_0^2+z_1^2+\frac{1}{2}z_2z_3 = -\frac{\sqrt[4]{12}}{4}\cos\frac{4\pi}{3}$.

1087. Folosind l'Hôpital, obţinem $L = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^7+3x-4}{x^3-2x-1}\cdot\frac{3x^2-2}{7x^6+3} = \frac{3}{7}$.

1088. $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}+(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})$. Știind că $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC}$ și $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD} = 3\overrightarrow{BC}$, avem: $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD} = 3\overrightarrow{BC}$. Prin urmare, modulul va fi: $|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}| = |3\overrightarrow{BC}| = 3|\overrightarrow{BC}| = 3\cdot 5 = 15$.

1089. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\ln(2^{2n})}+\cdots+\frac{1}{\ln(n^{n^2})}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2n\ln 2}+\cdots+\frac{1}{n^2\ln n}\right)$
$= \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2\ln 2}+\cdots+\frac{1}{n\ln n}\right) \overset{\text{Cèsaro-Stolz}}{=} \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} = 0$.

1090. Pentru a ajunge la funcția $r(x) = 4x$, putem aplica u de 2 ori sau $v(v(u(v(u(x)))))$, deci am aplicat funcția v de un număr impar de ori. Nicio variantă nu este corectă $\Rightarrow$ $\boxed{\text{D}}$.

1091. Folosim substituţia $\text{tg}\,\frac{x}{2} = t \implies \mathrm{d}x = \frac{2}{t^2+1}\mathrm{d}t$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ și $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$. Avem: $I = \int_0^1 \frac{1}{2\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}+3\cdot\frac{2t}{1+t^2}+4}\cdot\frac{2}{t^2+1}\mathrm{d}t = \int_0^1\frac{2}{2-2t^2+6t+4t^2+4}\mathrm{d}t = = \int_0^1\frac{1}{t^2+3t+3}\mathrm{d}t = \int_0^1\frac{1}{\left(t+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\mathrm{d}t$. Folosim substituţia $u = t+\frac{3}{2} \implies \mathrm{d}u = \mathrm{d}t$. $I = \int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}}\frac{1}{u^2+\frac{3}{4}}\mathrm{d}u = \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\text{arctg}\,\frac{2u}{\sqrt{3}}\Big|_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\text{arctg}\,\frac{5}{\sqrt{3}}-\text{arctg}\,\frac{3}{\sqrt{3}}\right)$. Folosind $\text{arctg}\,x-\text{arctg}\,y = \text{arctg}\,\frac{x-y}{1+xy}$, obţinem $I = \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\text{arctg}\,\frac{1}{3\sqrt{3}}$.

1092. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} e^{x^2\ln x} = e^{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} x^2\ln x} = e^0 = 1$, unde am folosit $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} x^2\ln x \overset{\text{L'Hôpital}}{=} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-2}{x^3}} = 0$. $f'(x) = x^{x^2}(x^2\ln x)' = x^{x^2}(2x\ln x+x) = x^{x^2+1}(2\ln x+1)$, $\forall x>0$. $f'(x) = 0 \iff 2\ln x+1 = 0 \iff x = \frac{1}{\sqrt{e}}$. Avem că: $f'(x)<0$, $\forall x\in\Big(0,\frac{1}{\sqrt{e}}\Big)$ și $f'(x)>0$, $\forall x\in\Big(\frac{1}{\sqrt{e}},\infty\Big)$, deci f descrește pe $\left(0,\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ și crește pe $\left(\frac{1}{\sqrt{e}},\infty\right)$. Așadar, punctul

$x = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$ este de minim global pentru f.

1093. Folosim substituţia $x = \dfrac{\pi}{2} - t \implies \mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$. $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\mathrm{tg}^{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}\mathrm{d}t =$
$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\frac{1}{\mathrm{tg}^{\pi}t}}\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{tg}^{\pi}t}{\mathrm{tg}^{\pi}t+1}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\mathrm{tg}^{\pi}t+1}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} - I \implies I = \frac{\pi}{4}.$

1094. Lungimea medianei din $A(0,0)$ spre latura opusă BC pentru triunghiul cu vârfurile $A(0,0), B(4,0), C(2,3)$ este dată de formula distanței între punctele $A(0,0)$ și mijlocul segmentului BC, care are coordonatele $M\left(3, \dfrac{3}{2}\right)$. Formula lungimii medianei este: $AM = \sqrt{(x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2} = \sqrt{(3-0)^2 + \left(\dfrac{3}{2} - 0\right)^2} = \dfrac{3\sqrt{5}}{2}$.

$G\left(\dfrac{0+4+2}{3}, \dfrac{0+0+3}{3}\right) = G\left(\dfrac{6}{3}, \dfrac{3}{3}\right) = G(2,1)$. Așadar, coordonatele centrului de greutate sunt: $G(2,1)$.

1095. Folosim următoarea identitate $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(a+b-x)\mathrm{d}x$.

$I = \displaystyle\int_3^7 \frac{\ln(3+7-x-3)}{\ln[(3+7-x-3)(7-3-7+x)]}\mathrm{d}x = \int_3^7 \frac{\ln(7-x)}{\ln[(7-x)(x-3)]}\mathrm{d}x$. Adunând cele două ecuaţii pentru I, obţinem $2I = \displaystyle\int_3^7 \frac{\ln[(7-x)(x-3)]}{\ln[(7-x)(x-3)]}\mathrm{d}x = \int_3^7 \mathrm{d}x = x\Big|_3^7 = 4 \implies$
$I = 2$.

1096. Dezvoltăm legea de compoziție astfel: $x*y = e^{\ln(x-2)\cdot\ln(y-2)}+2$, de unde observăm că $*$ este comutativă. Fie c elementul neutru al acestei legi, adică: $x*c = x$. Conform legii de compoziție date: $x*c = e^{\ln(x-2)\cdot\ln(c-2)}+2$. Pentru ca $x*c = x$ să fie adevărat $\forall x \in (2,\infty)$, trebuie să avem: $e^{\ln(x-2)\cdot\ln(c-2)}+2 = x \iff e^{\ln(x-2)\cdot\ln(c-2)} = x-2$, deci $e^{\ln(x-2)\cdot\ln(c-2)} = e^{\ln(x-2)}$. Prin urmare $\ln(x-2)\cdot\ln(c-2) = \ln(x-2)$, deci $\ln(c-2) = 1$
$c = e+2$.

1097. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\cdot\sin\frac{1}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1.$

1098. Știind că $\sin\alpha\cdot\sin\beta = \dfrac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))$, înmulțim expresia cu $\sin\dfrac{x}{2}$:

$E(x)\cdot\sin\dfrac{x}{2} = \dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{x}{2} - \cos\dfrac{3x}{2} + \cos\dfrac{3x}{2} - \cos\dfrac{5x}{2} - \cos\dfrac{5x}{2} + \cos\dfrac{7x}{2}\right)$.

$E(x)\cdot\sin\dfrac{x}{2} = \dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{x}{2} - 2\cos\dfrac{5x}{2} + \cos\dfrac{7x}{2}\right)$, deci $E(x) = \dfrac{\cos\frac{x}{2} - 2\cos\frac{5x}{2} + \cos\frac{7x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}$.

1099. Avem $x_G = \dfrac{x_A+x_B+x_C}{3} = \dfrac{10}{3}$ și $y_G = \dfrac{y_A+y_B+y_C}{3} = 2 \Rightarrow G\left(\dfrac{10}{3}, 2\right)$. Deci $d(G,l) = \dfrac{|\frac{10}{3} - 2 + 2|}{\sqrt{1+1}} = \dfrac{10}{3\sqrt{2}}$.

1100. $T_{n-5} = C_n^{n-6} \cdot 5 \cdot 4^{-\frac{1}{3}(n-6)}$. $T_6 = C_n^6 \cdot 5^{n-5} \cdot 4^{-\frac{5}{3}}$, deci $\dfrac{T_6}{T_{n-5}} = \dfrac{5^{n-5} \cdot 4^{\frac{n-6}{3}}}{5 \cdot 4^{\frac{5}{3}}} = 5^{n-6} \cdot 4^{\frac{n-11}{3}} = 20$, de unde rezultă $n \notin \mathbb{N}$.

1101. $\log_7(1,80) = \log_7 \dfrac{18}{10} = \log_7 \dfrac{9}{5} = \log_7 9 - \log_7 5 = 2\log_7 3 - \log_7(125)^{\frac{1}{3}} = 2b - \dfrac{a}{3} = \dfrac{6b-a}{3}$.

1102. Facem schimbarea de variabilă $t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}, x = 2\operatorname{arctg} t \Rightarrow \mathrm{d}x = \dfrac{2\mathrm{d}t}{t^2+1}$ și ne folosim de formulele $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}, \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$. După simplificări, integrala devine $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{2}{8t^2+4t+2}\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} \frac{1}{4t^2+2t+1}\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} \frac{1}{(2t+\frac{1}{2})^2+\dfrac{3}{4}} =$ Substituim $u = 2t + \frac{1}{2}$, deci $du = 2\,dt$, iar integralul devine: $\displaystyle\frac{1}{2}\int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} \frac{1}{u^2+\frac{3}{4}}\,du$ Folosind formula standard, obținem: $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{3}}\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{2u}{\sqrt{3}}\right)\right]_{-\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}}$ Evaluăm acum la limitele de integrare: $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{5}{\sqrt{3}}\right) + \dfrac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

1103. Notăm $AB = c, BC = a, AC = b$. Avem $\dfrac{c}{a+b} + \dfrac{a}{b+c} = 1$ deci $\dfrac{c(b+c)+a(a+b)}{(a+b)(b+c)} = 1$, adică $c^2 + a^2 + ab + bc = ab + ac + b^2 + bc$. Aplicând Teorema cosinusului, obținem $m(\hat{B}) = \dfrac{\pi}{3}$.

1104. Aplicarea regulii de înmulţire a numerelor complexe scrise în formă trigonometrică şi stabilirea faptului că $f(x+y) = f(x)\cdot f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. f nu este injectivă: $f(x+k) = f(x)$, $\forall k \in \mathbb{Z}^*$. f nu este surjectivă deoarece nici un număr complex nenul de modul diferit de 1 nu aparţine mulţimii $f(\mathbb{R})$. $[f(x)]^4 = 1 \Leftrightarrow f(x) \in \{\cos\frac{2k\pi}{4} + i\sin\frac{2k\pi}{4} \mid k \in \mathbb{Z}\} \Leftrightarrow x \in \{\frac{k}{4} \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Presupunând că ar exista un izomorfism $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^*$, ar exista $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $g(a) = -1$, prin urmare $g(0) = 1 = (-1)^2 = [g(a)]^2 = g(2a)$, ceea ce implică $2a = 0$, adică $a = 0$. Dar atunci $1 = g(0) = g(a) = -1$, contradicţie.

1105. Aplicând legea de compoziție, egalitatea se restrânge la $(x-2)(9(x-2)^2-1) = 0$, deci soluțiile sunt $\left\{2, \dfrac{7}{3}, \dfrac{5}{3}\right\}$.

1106. Integrând, aflăm $f(x) = 2x^2 - \sqrt{x}$. Avem $f'(x) = 0 \iff 8x\sqrt{x} = 1 \iff x^3 = \dfrac{1}{64}$ și cum $x > 0$, avem $f'(x) = 0 \iff x = \dfrac{1}{4}$. Cum $f\Big(\dfrac{1}{4}\Big) = -\dfrac{3}{8}$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ și $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$, iar f este o funcție continuă, avem $\operatorname{Im} f = \Big[-\dfrac{3}{8}, +\infty\Big)$.

1107. Scriind Relațiile lui Viete și rezolvând sistemul de ecuații, aflăm $x_1 = 3, x_2 =$

$4, x_3 = 5$, deci raportul se restrânge la $\dfrac{25}{25} = 1$.

1108. $\lim\limits_{t\to\infty}\displaystyle\int_{-t}^{1} f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{t\to\infty}\int_{-t}^{1} xe^x\mathrm{d}x = \lim\limits_{t\to\infty}\left(e^x \cdot x\Big|_{-t}^{1} - \int_{-t}^{1} e^x\mathrm{d}x\right) = \lim\limits_{t\to\infty}\left(e^x(x - 1)\Big|_{-t}^{1}\right) = 0$.

1109. $A = \displaystyle\int_1^2 |g(x)|\mathrm{d}x = \int_1^2 e^x(x-1)\mathrm{d}x = e^x(x-1)\Big|_1^2 - \int_1^2 e^x\mathrm{d}x = e^x(x-2)\Big|_1^2 = e$.

1110. Dând factor comun, putem rescrie expresia ca $(A^{2008} - I_2)(A^4 - 6A^3 - A^2) = O_2$.

Din Teorema Cayley-Hamilton, $A^2 - 6A - I_2 = O_2$ și cum A este inversabilă, avem $A^4 - 6A^3 - A^2 = O_2$, deci expresia este egală cu O_2.

1111. Limita se poate rescrie ca $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{\sqrt{n^2-k^2}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2}}$. Fie funcția $f : [0,1] \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, f continuă și integrabilă pe $\mathbb{R}$. Pentru fiecare n se consideră diviziunea $\Delta_n = (0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1)$ a intervalului $[0,1]$ și $\xi_n = (\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1)$ sistemul de puncte intermediare asociat diviziunii Δ_n. Pentru fiecare n, termenul x_n este suma Riemann asociată funcției f, diviziunii Δ_n şi sistemului de puncte intermediare ξ_n, adică $x_n = \sigma_{\Delta_n}(f, \xi_n)$. Avem $\lim\limits_{n\to\infty} ||\Delta_n|| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n} = 0$ și, cum f este integrabilă, $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_{\Delta_n}(f,\xi_n) = \displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \arcsin x\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}$.

1112. Fie A matricea sistemului. $det(A) = 0$. Alegem un minor principal $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, $d_c = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 9 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ sistemul este compatibil nedeterminat. Notăm $z = \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow x = -\dfrac{7}{5}\alpha, y = \dfrac{\alpha}{5}$, deci expresia este egală cu $\dfrac{73}{75}$.

1113. Avem $z^2 + 2z + 1 = z \iff z^2 + z + 1 = 0$, împărțind cu z, avem $z + \dfrac{1}{z} = -1$.

Tot din $z^2 + z + 1 = 0$, înmulțind cu z și înlocuind $z^2 + z = -1$, avem $z^3 = 1$. Deci, în relația $\dfrac{z^{4044}+1}{z^{2022}}$, înlocuim $z^{2022} = (z^3)^{674}$ și $z^{4044} = (z^3)^{1348}$ rămânem cu $\dfrac{z^{4044}+1}{z^{2022}} = 2$.

1114. Efectuând calculele, P este o progresie geometrică cu rația z, deci $P = z \cdot \dfrac{z^{2024}-1}{z-1} = \dfrac{z^{2025}-z}{z-1} = -1 (z^3 = 1)$. Prelucrând expresia Q, $Q = z^{\frac{2024\cdot 2025}{2}} = z^{1012\cdot 2025} = (z^3)^{675\cdot 1012} = 1$.

1115. Aplicând Regula Triunghiului succesiv pentru fiecare pereche din sumă, vom rămâne la final cu $\overrightarrow{A_0 \cdot A_n} + \overrightarrow{A_n \cdot A_0} = \overrightarrow{0}$.

1116. Adunând coloanele, avem

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 - 1 \\ x_1 & x_2 - 1 & x_3 \\ x_1 - 1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = (x_1 + x_2 + x_3 - 1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & x_2 & x_3 - 1 \\ 1 & x_2 - 1 & x_3 \\ 1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} =$$

$(x_1+x_2+x_3-1)\cdot(-1)$. Din prima Relație a lui Viete, $x_1+x_2+x_3 = 1$, deci determinantul este egal cu 0.

1117. Avem $a_n = 1^{2023}+2^{2023}+\cdots+n^{2023}$, $b_n = n^2024$. Cum b_n este divergent, aplicând criteriul Stolz-Cesàro avem $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^{2023} + 2^{2023} + \cdots + n^{2023}}{n^{2024}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^{2023}}{(n+1)^{2024} - n^{2024}} =$
$= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^{2023} + \cdots}{2024n^{2023} + \cdots} = \dfrac{1}{2024}$.

1118. Din relațiile lui Viete, suma rădăcinilor va fi -3, iar produsul acestora va fi 4 (gradul polinomului este un număr par, deci vom avea un număr par de relații). De aici, rezultă varianta $\boxed{\text{A}}$.

1119. Avem $f'(x) = e^x(x^2+2x-2)+e^x(2x+2) = e^x(x^2+4x) = e^x\cdot x(x+4), \forall x \in \mathbb{R}$, deci $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-4, 0\}$. Cum $f'(x) \geq 0, \forall x \in (-\infty, -4] \cup [0, \infty)$, $f'(x) \leq 0 \forall x \in [-4, 0]$ și f continuă, obținem că f este crescătoare pe $(-\infty, -4]$, descrescătoare pe $(-4, 0)$ și crescătoare pe $[0, \infty)$. Avem $f(-4) = 6e^{-4}, f(0) = -2, \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ și $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, deci $x = 6e^{-4}$ este punct de maxim pe $(-\infty, 0]$, de unde rezultă că afirmația $\boxed{\text{B}}$ este adevărată.

1120. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^4(x)}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2(x)} \cdot \frac{1}{\cos^2(x)}\mathrm{d}x$. Fie $t = \operatorname{tg} x \Rightarrow \mathrm{d}t = \dfrac{1}{\cos^2(x)}\mathrm{d}x$;
$t^2 = \dfrac{1 - \cos^2(x)}{\cos^2(x)} = \dfrac{1}{\cos^2(x)} - 1 \Rightarrow t^2 + 1 = \dfrac{1}{\cos^2(x)} \Rightarrow \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2(x)} \cdot \frac{1}{\cos^2(x)}\mathrm{d}x =$
$\displaystyle\int_0^1 (t^2 + 1)\mathrm{d}t = \frac{4}{3}$.

1121. Calculăm puterile matricei F în $\mathbb{Z}_5$:

$$F^2 = F \cdot F = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 2+1\cdot 1 & 2\cdot 1+1\cdot 2 \\ 1\cdot 2+2\cdot 1 & 1\cdot 1+2\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F^3 = F^2 \cdot F = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\cdot 2+4\cdot 1 & 0\cdot 1+4\cdot 2 \\ 4\cdot 2+0\cdot 1 & 4\cdot 1+0\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$F^4 = F^3 \cdot F = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\cdot 2+3\cdot 1 & 4\cdot 1+3\cdot 2 \\ 3\cdot 2+4\cdot 1 & 3\cdot 1+4\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 10 \\ 10 & 11 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1122. $\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{v} \Rightarrow 3 = 9k \quad \Rightarrow \quad k = \dfrac{1}{3} \Rightarrow p + 2 = -2 \quad \Rightarrow \quad p = -4$

1123. Limita se rescrie ca $e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} \cdot \ln(\sin x + \cos x)} \stackrel{l'\mathrm{H}}{=} e^1 = e.$

1124. Rescriem ecuația astfel: $(3^2)^{x+1} - (3\cdot 2)^x = 2^{2x} \Rightarrow 3^{2x+2} - 3^x \cdot 2^x = 2^{4x}$. Împărțim toți termenii la 3^{2x} și notăm $t = \left(\dfrac{2}{3}\right)^x \Rightarrow 9 - t = t^2 \Rightarrow t = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+36}}{2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{37}}{2}$. Observăm că produsul soluțiilor este: $t_1 \cdot t_2 = \dfrac{(-1+\sqrt{77})(-1-\sqrt{77})}{4} = \dfrac{1-37}{4} = \dfrac{-36}{4} = -9 \Rightarrow t_1 \cdot t_2 = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{x_1} \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^{x_2} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{x_1+x_2} = -9 \Rightarrow x_1 + x_2 = -9.$

1125. $H = \left(\frac{x_P+x_Q+x_R}{3}, \frac{y_P+y_Q+y_R}{3}\right) = (2,1) \Rightarrow \quad 4 + x_R = 6 \quad \Rightarrow \quad x_R = 2; \Rightarrow \quad 5 + y_R = 3 \quad \Rightarrow \quad y_R = -2 \Rightarrow R(2,-2)$ $A_{PQR} = \dfrac{1}{2}\left|x_P(y_Q - y_R) + x_Q(y_R - y_P) + x_R(y_P - y_Q)\right| == \dfrac{1}{2}|4 - 15 + 2| = \dfrac{1}{2} \times 9 = 4.5 \Rightarrow A_{PQRS} = 2 \times A_{PQR} = 2 \times 4.5 = 9$

1126. Efectuăm substituția $t = x^2 + 1 \Rightarrow dt = 2x\,\mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad \frac{dt}{2} = x\,\mathrm{d}x$. Integrala devine $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x = \int_{t=1}^{t=2} \frac{1}{2\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_1^2 t^{-1/2}\,\mathrm{d}t \Rightarrow \frac{1}{2}\left[2\sqrt{t}\right]\Big|_1^2 = \frac{1}{2}\left(2\sqrt{2} - 2\sqrt{1}\right) = \sqrt{2} - 1.$

1127. $f(\hat{2}) = f(\hat{1} + \hat{1}) = f(\hat{1}) + f(\hat{1}) = 2 \cdot f(\hat{1}) = \hat{4}$ în $\mathbb{Z}_{12} \Rightarrow 2x \equiv 4 \pmod{12} \quad \Rightarrow$

$x \equiv 2 \pmod 6 \Rightarrow x = 2, 8$ în $\mathbb{Z}_{12}$.

1128. $D = \begin{vmatrix} 1 & -k & 1 \\ -1 & k & 1 \\ 1 & 1 & -k \end{vmatrix} == 1\cdot(k\cdot(-k) - 1\cdot 1) - (-k)\cdot(-1\cdot(-k) - 1\cdot 1) + 1\cdot(-1\cdot 1 - k\cdot 1) =$

$-k^2 - 1 + k^2 - k - 1 - k = -2k - 2.$

$-2k - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad k = -1$

1129. Dintre 9 copii, arbitrul poate fi ales în $C_9^1 = 9$ moduri. Din cei 8 copii rămași, echipa A de 4 jucători poate fi formată în $C_8^4 = 70$ moduri. După formarea echipei A, rămân 4 copii care formează echipa B. Deci, totalul modurilor este $9 \cdot 70 = 630$.

1130. Cum $\cos(-x) = \cos x \Rightarrow 2\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{(1-\cos x)(1-\cos 3x)}\, dx$

Folosim $1 - \cos\theta = 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \Rightarrow 2 \cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin\frac{x}{2}\sin\frac{3x}{2}\, dx = 4\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin\frac{x}{2}\sin\frac{3x}{2}\, dx =$ $4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} (\cos x - \cos 2x)\, dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{6}} (\cos x - \cos 2x)\, dx = 2\left[\left(\sin\frac{\pi}{6} - \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{3}\right) - (0-0)\right] =$ $2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = 2 \cdot \frac{2-\sqrt{3}}{4} = \frac{2-\sqrt{3}}{2}$.

1131. $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(2\cdot\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}$.

1132. $\sin x + 1 - 2\sin^2 x = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0 \Rightarrow \sin x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} =$ $\frac{1\pm 3}{4} \Rightarrow \sin x = 1$ și $\sin x = -\frac{1}{2}$, dar $\sin x = -\frac{1}{2}$ nu are soluții în intervalul $[0,\pi]$.

1133. Aplicând de două ori regula lui L'Hôpital, obținem $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}$.

1134. $x * e = xe + 2ax + 2ae + 4 = x. \Rightarrow -4a^2 + 2a + 4 = 0 \Rightarrow 2a^2 - a - 2 = 0 \Rightarrow a =$ $\frac{1\pm\sqrt{1+16}}{4} = \frac{1\pm\sqrt{17}}{4}$.

1135. $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\ln(1+ax)}{x} = a. f(0) = b\cdot 0 + 3\cdot 0^2 = 0 \Rightarrow a = 0.$ $f'_{st}(0) = 0,\ f'(x) = b + 6x \implies f'_{dr}(0) = b \Rightarrow b = 0.$

1136. $\cos C = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{C}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{C}{2}} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{4}} = \frac{3}{5}. \Rightarrow c^2 = 104 - 40\cdot\frac{3}{5} = 104 - 24 = 80 \Rightarrow c = \sqrt{80} =$ $4\sqrt{5}$. (din teorema cosinusului), $\sin C = \frac{2\cdot\operatorname{tg}\frac{C}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{C}{2}} = \frac{1}{\frac{5}{4}} = \frac{4}{5}$. $\mathcal{Aria}\,(ABC) = \frac{ab\sin C}{2} =$ $\frac{10\cdot 2\cdot\frac{4}{5}}{2} = \frac{16}{2} = 8.$

1137. Avem $g(3x) = 4g(x)$, deci $g(x) = \frac{g(3x)}{4}$. Calculăm integrala dată: $\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x =$ $\int_0^1 \frac{g(3x)}{4}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{12}\int_0^3 g(u)\,\mathrm{d}u = 3$. Astfel, $\int_0^3 g(u)\,\mathrm{d}u = 36$. Pentru a găsi $\int_1^3 g(u)\,\mathrm{d}u$, scădem $\int_0^1 g(u)\,\mathrm{d}u = 3 \Rightarrow \int_1^3 g(u)\,\mathrm{d}u = 36 - 3 = 33.$

1138. Primul număr cu cinci cifre este 10000 și ultimul este 99999, deci în total sunt

$99999 - 10000 + 1 = 90000$ astfel de numere. Dintre acestea, jumătate sunt impare, deci numărul elementelor din M este $\frac{90000}{2} = 45000$. Sau: prima poziție poate fi ocupata de 9 cifre(1-9),următoarele 3 poziții de 10 cifre, iar ultima de 5 cifre (1,3,5,7,9), deci în total $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 5 = 4500$ numere

1139. $(1+i)^{2024} = \left(\sqrt{2} \cdot \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)\right)^{2024} = 2^{1012} \left(\cos\left(2024 \cdot \frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(2024 \cdot \frac{\pi}{4}\right)\right)$.

$2024 \cdot \dfrac{\pi}{4} = 506\pi \equiv 2\pi \pmod{2\pi} \Rightarrow (1+i)^{2024} = 2^{1012} (\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = 2^{1012} (1 + i \cdot 0)$
$= 2^{2012}$.

1140. Observăm că $\log_{4^k} x^k = k \cdot \log_{4^k} x = k \cdot \frac{1}{\log_x 4^k} = \frac{1}{\log_x 4} = \log_4 x$. Astfel, ecuația devine $n \cdot \log_4 x = n$, de unde $\log_4 x = 1$, ceea ce implică $x = 4$. Prin urmare, mulțimea S conține exact un singur element, iar acesta se încadrează în intervalul $[1, 4]$.

1141. Fie q rația progresiei geometrice $b_1, b_2, \dots, b_m$. Avem $b_k = b_1 q^{k-1}$. Astfel, $\dfrac{1}{b_i b_{i-1}} = \dfrac{1}{b_1^2 q^{2i-3}}$. $Q(1) = \sum_{i=2}^{m} \dfrac{1}{b_i b_{i-1}} + \dfrac{m}{b_1 b_m} = \displaystyle\sum_{i=2}^{m} \dfrac{1}{b_1^2 q^{2i-3}} + \dfrac{m}{b_1 b_m}$. Observăm că suma geometrică $\sum_{i=2}^{m} \dfrac{1}{b_i b_{i-1}}$ converge la $\dfrac{1}{b_1^2 q} \left(\dfrac{1 - q^{-2(m-1)}}{1 - q^{-2}}\right) = \dfrac{1}{b_1^2 q} \cdot \dfrac{1 - q^{-2(m-1)}}{1 - q^{-2}} \Rightarrow$
$Q(1) = m - 1 + \dfrac{m}{b_1 b_m}$.

1142. Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ avem $J_n + J_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^{3n} + x^{3n+3}}{1+x^3} \, dx = \int_0^1 x^{3n} \, dx = \frac{1}{3n+1}$.
Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ avem $0 < J_n < \displaystyle\int_0^1 x^{3n} \, dx = \dfrac{1}{3n+1}$, deci $\lim\limits_{n \to \infty} J_n = 0$.
Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ avem $J_{n+1} < J_n$, deci $2J_n > J_n + J_{n+1} = \dfrac{1}{3n+1} \Rightarrow J_n > \dfrac{1}{6n+2}$ şi $2J_{n+1} < J_n + J_{n+1} = \dfrac{1}{3n+1} \Rightarrow J_{n+1} < \dfrac{1}{6n+2} \Rightarrow J_n < \dfrac{1}{6n-2}$. Drept urmare, avem $\dfrac{1}{6n+2} < J_n < \dfrac{1}{6n-2} \Rightarrow \dfrac{n}{6n+2} < nJ_n < \dfrac{n}{6n-2} \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} nJ_n = \dfrac{1}{6}$.

1143. $\dfrac{b_{n+1}}{(n+1) \cdot 3^{n+1}} = \dfrac{b_n}{n \cdot 3^n} + 1$. Fie $c_n = \frac{b_n}{n \cdot 3^n}$, atunci: $c_{n+1} = c_n + 1 \implies c_n = n \Rightarrow b_n = n^2 \cdot 3^n$ și $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = \infty$.

1144. $p \cdot (-2) + q \cdot 0 + r = -2p + r \neq 0$ și $p \cdot 2 + q \cdot 0 + r = 2p + r \neq 0$,

$$\operatorname{dist}(N, d) = \frac{\left| p \cdot \dfrac{q-r}{p} + q \cdot 0 + r \right|}{\sqrt{p^2 + q^2}} = \frac{|q - r + r|}{\sqrt{r^2}} = \frac{q}{r}.$$

$p \cdot \dfrac{q-r}{p} + q \cdot 0 + r = q - r + r = q \neq 0$.

$\operatorname{dist}(G,d)\cdot\operatorname{dist}(H,d) = \dfrac{|p\cdot(-2)+q\cdot 0+r|}{\sqrt{p^2+q^2}}\cdot\dfrac{|p\cdot 2+q\cdot 0+r|}{\sqrt{p^2+q^2}} = \dfrac{|r-2p|\cdot|r+2p|}{r^2} =$

$\dfrac{|r^2-(2p)^2|}{r^2} = \dfrac{|q^2-3\cdot p^2|}{r^2}$.

1145. Determinantul este de tip Vandermonde și se descompune în $(\sin\theta-\cos\theta)\left(\cos\theta-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\sin\theta\right)=0$ și cum $\theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, vom obține de 3 ori soluția $\theta=\dfrac{\pi}{4}$.

1146. Avem $a_n = 1!+2!+\cdots+n!, b_n=(n+1)!$. Cum b_n este divergent, putem aplica criteriul Stolz-Cesàro și avem $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1!+2!+\cdots+n!}{(n+1)!} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)!}{(n+2)!-(n+1)!} =$ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)!}{(n+1)!\cdot(n+1)} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1}=0$.

1147. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\log_2\left(\frac{k^2+2k}{(k+1)^2}\right) = \sum_{k=1}^{n}\log_2\left(\frac{k(k+2))}{(k+1)^2}\right) = \log_2\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{k(k+2)}{(k+1)^2}\right)$

$\displaystyle = \log_2\left(\frac{\prod_{k=1}^{n}k\cdot\prod_{k=1}^{n}(k+2)}{\prod_{k=1}^{n}(k+1)^2}\right) = \log_2\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{n+2}{n+1}\right)$ și cum $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+2}{n+1}=1$, obținem $S=$ -1.

1148. Avem $x_G = \dfrac{x_A+x_B+x_C}{3}, y_G = \dfrac{y_A+y_B+y_C}{3}$, așadar $C(-2,4)$. Pentru a afla panta dreptei d_1, avem $m_{AC} = \dfrac{y_C-y_A}{x_C-x_A} = \dfrac{4}{-4} = -1$ și cum $d_1\perp AC \iff$ $m_{d_1}\cdot m_{AC}=-1 \iff m_{d_1}=1$. Analog procedăm și pentru d_2 și d_3 și vom obține $m_{d_2}=-\dfrac{5}{3}, m_{d_3}=-\dfrac{1}{7}$. În acest caz, date fiind variantele de răspuns, este suficient să aflăm tangentele unghiurilor α,θ,γ și vom avea: $\tan\alpha = \left|\dfrac{m_{d_2}-m_{d_1}}{1+m_{d_2}\cdot m_{d_1}}\right| = 4$. (deoarece unghiul este ascuțit). Similar pentru θ și γ, vom obține $\tan\theta=\dfrac{4}{3}, \tan\gamma=\dfrac{16}{13}$ și efectuând calculele, obținem variantele $\boxed{\text{A}}$, $\boxed{\text{B}}$ și $\boxed{\text{D}}$ ca fiind adevărate.

1149. Divizorii lui 42 pe $\mathbb{N}$ sunt $\{1,2,3,6,7,14,21,42\}$. Evident, pentru că ne dorim ca atât suma cifrelor, cât și produsul să fie 42, vom alege cifrele $6,7$ și restul cifrelor 1. Așadar, cel mai mic T este $T=\underbrace{111\cdots1}_{\text{de 29 de ori}}67$, care are exact 31 de cifre.

1150. $I = \displaystyle\int_0^1\frac{4^{\frac{3}{2}}}{(4x^2+4x+4)^{\frac{3}{2}}} = \int_0^1\frac{8}{((2x+1)^2+3)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$. Folosim substituţia $t=2x+1 \implies \mathrm{d}t=2\mathrm{d}x$. $I=\displaystyle\int_1^3\frac{4}{(t^2+3)^{(3/2)}}\mathrm{d}t$. Apoi, folosim substituţia $t=\sqrt{3}\mathrm{tg}\,u \implies$

$\mathrm{d}t = \dfrac{\sqrt{3}}{\cos^2 u}\mathrm{d}u.$ $I = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{4}{3^{\frac{3}{2}}(\operatorname{tg}^2 t+1)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\cos^2 t}\mathrm{d}t = \frac{4}{3}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\left(\frac{1}{\cos^2 t}\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{1}{\cos^2 t}\mathrm{d}t =$

$= \dfrac{4}{3}\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \cos t\mathrm{d}t = \frac{4}{3}\sin t\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{4}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{2}{3}.$

1151. Cum 11 este prim și $(3,11)=1$, avem din Mica Teoremă a lui Fermat $\widehat{3}^{10} = \widehat{1}$.

Afirmația $\boxed{\text{A}}$ rezultă imediat prin calcul. De asemenea, în afirmația $\boxed{\text{B}}$, $\widehat{3}^{22} - \widehat{3}^{14} - \widehat{3}^{13} = \widehat{3}^{2} - \widehat{3}^{4} - \widehat{3}^{3} = \widehat{9} - \widehat{4} - \widehat{5} = \widehat{0}$. Cum $\widehat{3}^{2024} = \widehat{3}^{4} = \widehat{4}$, afirmația $\boxed{\text{D}}$ este, de asemenea, adevărată.

1152. $\sin^2 x + \sin^2 2x = 1 \implies \sin^2 2x = \cos^2 x \implies \sin^2 2x - \cos^2 x = 0 \implies$

$\implies (\sin 2x - \cos x)(\sin 2x + \cos x) = 0 \implies \sin 2x - \cos x = 0$ sau $\sin 2x + \cos x = 0.$

Cazul 1: $\sin 2x - \cos x = 0 \implies 2\sin x\cos x - \cos x = 0 \implies \cos x(2\sin x - 1) = 0$

$$\implies \begin{cases} \sin x = \dfrac{1}{2} \implies x \in \left\{(-1)^k\cdot\dfrac{\pi}{6} + k\pi \,\middle|\, k\in\mathbb{Z}\right\} \implies \left\{\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}\right\} \text{ soluţii pt. k} \in \{0,1\}. \\ \cos x = 0 \implies x = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Cazul 2: $\sin 2x + \cos x = 0 \implies 2\sin x\cos x + \cos x = 0 \implies \cos x(2\sin x + 1) = 0$

$$\implies \begin{cases} \cos x = 0 \implies x = \dfrac{\pi}{2} \\ \sin x = -\dfrac{1}{2} \text{ fals pentru } x\in[0,\pi]. \end{cases}$$

În concluzie, sunt 3 soluţii distincte: $\left\{\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}, \dfrac{\pi}{2}\right\}$

1153. Desfăcând parantezele și împărțind cele două polinoame, avem $I = \displaystyle\int_6^{21} 2x\mathrm{d}x = 441 - 36 = 405.$

1154. $\overrightarrow{u} \parallel \overrightarrow{v} \iff \dfrac{m+2}{m-2} = \dfrac{6}{-3} \iff m+2 = -2m+4 \iff m = \dfrac{2}{3}.$

1155. $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}\sqrt{5} - \operatorname{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{5}}) = \dfrac{\sqrt{5}-\frac{1}{\sqrt{5}}}{1+\sqrt{5}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}} = \dfrac{4}{2\sqrt{5}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \operatorname{arctg}\sqrt{5} - \operatorname{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{5}} = \operatorname{arctg}\dfrac{2}{\sqrt{5}}$. Ne folosim acum de formulele $\operatorname{arctg} x = \arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $\forall x \in (0,\infty)$. Așadar, $\operatorname{arctg}\dfrac{2}{\sqrt{5}} = \arcsin\dfrac{\frac{2}{\sqrt{5}}}{\sqrt{1+\frac{4}{5}}} = \arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{4}{5}}} \iff \operatorname{arctg}\dfrac{2}{\sqrt{5}} = \arcsin\dfrac{2}{3} = \arccos\dfrac{\sqrt{5}}{3}.$

1156. Scriem Relațiile lui Viete și obținem: $\begin{cases} S_1 = x_1 + x_2 + x_3 = -m \\ S_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 20 \cdot \\ S_3 = x_1x_2x_3 = -n. \end{cases}$

Suma din cerință se restrânge la $2S_1^2 - 6S_2 = 2m^2 - 120 = 2(m^2 - 60)$. Dacă $m = \sqrt{60}$, expresia este egală cu 0.

1157. **Soluția I**: Înlocuind în prima Relație a lui Viete, obținem $x_3 = -m + \frac{m}{4} + \frac{m}{4} = -\frac{m}{2}$. Înlocuim în a treia relație a lui Viete și obținem $n = 16$.

Soluția II: Dacă $x = -\frac{m}{4}$ este rădăcina dublă a polinomului $f(x)$, înseamnă că: $f'\left(-\frac{m}{4}\right) = 0$ unde derivata este: $f'(x) = 3x^2 + 2mx + 20$. Calculăm derivata în punctul $x = -\frac{m}{4}$: $f'\left(-\frac{m}{4}\right) = 0 \implies m^2 = 64$. Cum $m > 0$, rezultă: $m = 8$. De asemenea, $x = -2$ este rădăcină, deci:$f(-2) = 0$. de unde rezultă că: $n = 16$.

1158. Folosim substituţia $x = \pi - t \implies \mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$. $I = \int_0^\pi \frac{(\pi - t)\sin(\pi - t)}{1 + \sin^2(\pi - t)}\mathrm{d}t = \pi \int_0^\pi \frac{\sin t}{1 + \sin^2 t}\mathrm{d}t - I \implies 2I = \pi \int_0^\pi \frac{\sin t}{1 + \sin^2 t}\mathrm{d}t \implies I = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{\sin t}{2 - \cos^2 t}\mathrm{d}t$. Folosim în continuare substituţia $u = \cos t \implies \mathrm{d}u = -\sin t\mathrm{d}t$ și avem: $I = \frac{\pi}{2}\int_1^{-1} \frac{1}{u^2 - 2}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \ln\left|\frac{u - \sqrt{2}}{u + \sqrt{2}}\right|\Big|_1^{-1} = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{-2\sqrt{2} - 3}{2\sqrt{2} - 3}\right|$.

1159. Calculând determinantul sistemului obținem $\Delta = 9 \neq 0$, deci sistemul este compatibil determinat și se poate rezolva folosind Formulele lui Cramer. Obținem, astfel, $x = -\frac{1}{9}, y = -\frac{4}{9}, z = \frac{29}{9}$. Deci avem $a = 24, b = 9 \implies a - b = 15$.

1160. $L \overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{1 - \frac{1}{x^2+1}} \overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{-x}{(1 - x^2)\sqrt{1 - x^2}} \cdot \frac{(x^2 + 1)^2}{2x} = -\frac{1}{2}$.

1161. Avem $f'(x) = -\frac{2}{x^2 - 1} < 0 \forall x \in (1, +\infty)$, deci f este descrescătoare. De asemenea, $f''(x) = \frac{4x}{(x^2 - 1)^2} > 0 \forall x \in (1, +\infty)$, deci f este convexă pe intervalul dat.

1162. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=2}^{n} f'(k) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{1} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n-1}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) = -\frac{3}{2}$.

1163. Folosim substituţia $t = e - x \implies x = e - t \implies \mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$. Avem: $I = \int_0^e \frac{e^{e-t}}{e^{e-t} + e^t}\mathrm{d}t = \int_0^e \mathrm{d}t - \int_0^e \frac{e^t}{e^{e-t} + e^t}\mathrm{d}t = e - I \implies 2I = e \implies I = \frac{e}{2}$.

1164. Distanța de la punctul $P(2, a)$ la dreapta d_1 este dată de: $d(P, d_1) = \dfrac{|2a+1|}{\sqrt{13}}$, iar distanța de la punctul P la dreapta d_2 este dată de: $d(P, d_2) = \dfrac{|3a+5|}{\sqrt{13}}$. Așadar, trebuie să avem $|2a+1| = |3a+5| \implies x \in \left\{-4, -\dfrac{6}{5}\right\}$.

1165. Avem $C_x^{x-1} = \dfrac{x!}{(x-1)! \cdot 1}$ și $C_{x-1}^{x-3} = \dfrac{(x-1)!}{(x-3)! \cdot 2}$. Simplificând fracțiile, inegalitatea se reduce la $x^2 - x - 16 \leq 0$. Soluțiile ecuației sunt $x_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{65}}{2}$, deci inecuația este satisfăcută dacă $x \in \left[\dfrac{1-\sqrt{65}}{2}, \dfrac{1+\sqrt{65}}{2}\right]$. Cum $x \in \mathbb{Z}$ și $x \geq 3$ (condiție de existență), dintre variantele de răspuns obţinem $x \in \{3,\ 4\}$.

1166. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \left(1 + \dfrac{2n}{2k+n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{2k+3n}{2k+n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{2\frac{k}{n}+3}{2\frac{k}{n}+1}$

Observăm că în limită este suma Riemann atașată funcției integrabile $f : [0,1] \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{2x+3}{2x+1}$, diviziunii $\Delta_n = \left(0, \dfrac{1}{n}, \dots, \dfrac{n}{n}\right)$ și sistemului de puncte intermediare $\xi_n = \left(\dfrac{1}{n}, \dots, \dfrac{n}{n}\right)$, așadar limita sumei va fi integrala lui f pe $[0,1]$.

$\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(1 + \frac{2}{2x+1}\right)\mathrm{d}x = (x + \ln(2x+1))\Big|_0^1 = 1 + \ln 3.$

1167. Cunoaștem $i^1 = i, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1$. Așadar, $i^1 + i^2 + i^3 + i^4 = 0$, deci vom avea $z_{2025} = i, z_{2026} = -1 + i, z_{2027} = -1$.

1168. Avem $z_{4k} = 0, z_{4k+1} = i, z_{4k+2} = -1 + i, z_{4k+3} = -1$. Deci,$S = \sum\limits_{k=1}^{2024} z_k = 506(-2 + 2 \cdot i) = -1012 + 1012i$. $\bar{S} = -1012 - 1012i$, deci $\left|S + \bar{S}\right| = 2024$.

1169. Folosim substituţia $\mathrm{tg}\dfrac{x}{4} = t \implies \mathrm{d}x = \dfrac{4}{t^2+1}\mathrm{d}t$ și $\cos\dfrac{x}{2} = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \Rightarrow$

$I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\frac{4}{1+t^2}}{1 + \frac{1-t^2}{1+t^2}}\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{4}{1+t^2} \cdot \frac{1+t^2}{1+t^2+1-t^2}\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{4}{2}\mathrm{d}t = 2t\Big|_0^1 = 2.$

1170. $5\cos(x+y)\sin y = \sin x \iff 5(\cos x \cos y - \sin x \sin y)\sin y = \sin x$. Știm că $\cos x \neq 0$, deci putem împărți egalitatea cu $\cos x : 5 \sin y \cos y - 5\sin^2 y \mathrm{tg}\, x = \mathrm{tg}\, x \iff$ $\mathrm{tg}\, x = \dfrac{5\sin y \cos y}{1 + 5\sin^2 y} = \dfrac{5 \sin y \cos y}{\cos^2 x + 6 \sin^2 y} \leq \dfrac{5 \sin y \cos y}{2\sqrt{\cos^2 y \cdot 6 \sin^2 y}} \leq \dfrac{5}{2\sqrt{6}}$, unde pentru a obține această inegalitate am aplicat inegalitatea mediilor.

1171. Știm că $\arcsin : [1,1] \to [-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}]$ și că $\arcsin(\sin x) = x$, $\forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Cum $\sin\dfrac{6\pi}{5} = \sin(\pi - \dfrac{6\pi}{5}) = \sin(-\dfrac{\pi}{5})$ și $-\dfrac{\pi}{5} \in [-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}]$, avem $\arcsin\left(\sin\dfrac{6\pi}{5}\right) = -\dfrac{\pi}{5}$.

1172. Panta dreptei $2y - x = 1$ este egală cu $\dfrac{1}{2} \Rightarrow$ panta celeilalte diagonale este

$-2 \Rightarrow d_2 : y = -2x + n$. Cum $B(7,2) \notin d_1 \Rightarrow c = 16$, $d_2 : y = -2x + 16$. Astfel, se observă că $D\left(\frac{27}{5}, \frac{26}{5}\right)$ este simetricul lui B față de dreapta $2y - x = 1$. De asemenea, se observă că $C\left(\frac{17}{5}, \frac{11}{5}\right)$ este simetricul lui A față de dreapta $y = -2x + 16$.

1173. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{(2n-k)(2n+k)}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{4n^2 - k^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{n}{\sqrt{4n^2-k^2}} =$
$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{4 - (\frac{k}{n})^2}}$. Observăm că în limită este suma Riemann atașată funcției integrabile $f : [0,1] \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$, diviziunii $\Delta_n = \left(0, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{n}{n}\right)$ și sistemului de puncte intermediare $\xi_n = \left(\frac{1}{n}, \ldots, \frac{n}{n}\right)$, așadar limita sumei va fi integrala lui f pe $[0,1]$. $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \arcsin \frac{x}{2}\Big|_0^1 = \arcsin\frac{1}{2} - \arcsin 0 = \frac{\pi}{6}$.

1174. Folosim substituţia $x = \sqrt{2} - t \implies \mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$. $I = \int_0^{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{\sqrt{2}-t}}{\sqrt{\sqrt{2}-t} - \sqrt{t}}\mathrm{d}t =$
$\int_0^{\sqrt{2}} \mathrm{d}t + \int_0^{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{\sqrt{2}-t}-\sqrt{t}}\mathrm{d}t = \sqrt{2} - \int_0^{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t} - \sqrt{\sqrt{2}-t}}\mathrm{d}t = \sqrt{2} - I \implies 2I = \sqrt{2} \implies I = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

1175. $f(x) = \begin{cases} x^2(1-x)^3 - x & \text{dacă } x < 0 \\ x^2(1-x)^3 + x & \text{dacă } x \geq 0 \end{cases}$

$f'(x) = \begin{cases} -5x^4 + 12x^3 - 9x^2 + 2x - 1 & \text{dacă } x < 0 \\ -5x^4 + 12x^3 - 9x^2 + 2x + 1 & \text{dacă } x > 0 \end{cases}$. Avem că $f'_s(0) = -1$ și $f'_d(0) = 1$, deci $x = 0$ este punct unghiular pentru f. Folosind informațiile din ipoteză știm că $f'(x) = 0$ va avea o singură rădăcină și anume $a = 1.38342$. Cum f' este un polinom de gradul 4 și avem că $f'_d(0) = 1 > 0$ rezultă că f' va fi pozitivă pe $(0,a)$ și negativă pe $(\infty, 0) \cup (a, \infty)$. Calculăm limitele lui f: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$.

x	$-\infty$	0	a	∞
$f'(x)$	$-$	$-\vert+$	0	$-$
$f(x)$	$\infty \searrow$	0	$\nearrow f(a)$	$\searrow -\infty$

Așadar, $x = 0$ este punct de minim local și $x = a$ punct de maxim local.

1176. $I = \int_0^{\pi} \sin^2 x \cdot \sin x \mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \left(1 - \cos^2 x\right) \sin x \mathrm{d}x$. Folosim substituţia $t =$

$\cos x \implies \mathrm{d}t = -\sin x \mathrm{d}x \Rightarrow I = \int_1^{-1} (1-t^2)(-\mathrm{d}t) = t\Big|_{-1}^{1} - \frac{t^3}{3}\Big|_{-1}^{1} = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}.$

1177. $\mathrm{tg}x + \mathrm{ctg}x = 3 \implies \sin 2x = \frac{2}{3} \implies \begin{cases} \sin^2 2x = \frac{4}{9} \\ \cos^2 2x = \frac{5}{9} \end{cases}$. Aşadar, $\cos 4x = \frac{1}{9} \implies$

$\frac{3}{7} \cdot (\sin 2x + \cos 4x) = \frac{3}{7} \cdot \frac{7}{9} = \frac{1}{3}.$

1178. $L = \lim_{x\to\infty} \left[\left(1 - \frac{ax+b-2x+1}{2x-1} \right)^{\frac{2x-1}{ax+b-2x+1}} \right]^{\frac{ax+b-2x+1}{2x-1}\cdot x}$. Ştiind că $L = e^2$, obţinem $a = 2$, iar limita devine $L = e^{\lim_{x\to\infty} \frac{x^2(a-2)+x(b+1)}{2x-1}} = e^2 \implies \lim_{x\to\infty} \frac{x(b+1)}{2x-1} = 2 \implies \frac{b+1}{2} = 2 \implies b = 3.$

1179. $T_k = \binom{2020}{k} \left(x^2\right)^k \left(\frac{1}{x^3}\right)^{2020-k} = \binom{2020}{k} x^{2k} x^{-3(2020-k)} = \binom{2020}{k} x^{2k-6060+3k} = \binom{2020}{k} x^{5k-6060}$. $\Rightarrow 5k - 6060 = 5 \implies 5k = 6065 \implies k = \frac{6065}{5} = 1213$ Astfel coeficientul binomial este C_{2020}^{1213} care este egal cu C_{2020}^{807}.

1180. g este un morfism de grupuri între grupurile $(\mathbb{R}, +)$ și $(\mathbb{R}^*, \cdot) \Leftrightarrow g(x+y) = e^{x+y} = e^x \cdot e^y = g(x) \cdot g(y)$. Funcţia g este injectivă deoarece pentru orice $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, dacă $g(x_1) = g(x_2)$, atunci $e^{x_1} = e^{x_2}$ implică $x_1 = x_2$. Funcţia g nu este surjectivă deoarece imaginea sa este $(0, +\infty) \Rightarrow g$ nu este nici bijectivă, deci g nu este un izomorfism de grupuri.

1181. Notăm cu $A = \log_{100} a$ și $B = \log_{81} b$. Din prima ecuație obținem $A + B = 0 \Rightarrow B = -A$. Folosind a doua ecuație, avem $\frac{1}{A} - \frac{1}{B} = \frac{1}{A} + \frac{1}{A} = \frac{2}{A} = 1 \Rightarrow A = 2$ și $B = -2 \Rightarrow \log_{30}\left(a^2\right) - \log_{30} b = \log_{30}\left(10^8 \cdot 3^8\right) = \log_{30}\left((10 \cdot 3)^8\right) = \log_{30}\left(30^8\right) = 8.$

1182. Ecuația perpendicularei este $\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{2} \iff 2x - 4y + 6 = 0 \iff x - 2y + 3 = 0$. Perpendiculara are panta egală cu $\frac{1}{2}$, deci dreapta d va avea panta $m = -2$. Ecuația dreptei d este: $d : y - y_A = m(x - x_A) \iff y - 4 = -2(x-5) \iff 2x + y - 14 = 0.$

1183. $\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BD}) = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{0} + \vec{d} - \vec{0}) = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{d} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{7}\vec{c}\right) + \frac{1}{2}\vec{d} = \frac{3}{14}\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{d};$

$\overrightarrow{BM} = \vec{M} - \vec{B} = \vec{M} = \frac{3}{14}\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{d};\ \ \overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CA}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DC} + \frac{4}{7}\overrightarrow{CB}\right) =$
$= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{7}\overrightarrow{DC} + \frac{4}{7}\overrightarrow{DB}\right) = \frac{3}{14}\overrightarrow{DC} + \frac{2}{7}\overrightarrow{DB}.$

1184. Înlocuind cu 2, respectiv 14 observăm că nu sunt soluții. Folosind notația $y = \sqrt{x+2} \Rightarrow \sqrt{y^2-5y+9} + \sqrt{y^2+5y+9} = 7$. Notăm $A = \sqrt{y^2-5y+9}$, $B = \sqrt{y^2+5y+9} \Rightarrow A+B = 7$ și $A^2+B^2 = 2y^2+18 \Rightarrow AB = \frac{31-2y^2}{2}$. Din $B^2-A^2 = 10y \Rightarrow B-A = \frac{10y}{7}$. Din toate $\Rightarrow 96y^2 = 637 \Rightarrow y^2 = \frac{637}{96} \Rightarrow x = \frac{445}{96}$.

1185. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \overset{\text{Stolz–Cesaro}}{=} \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}-n^n}{(n+1)^{n+1}} = 1 - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = 1.$

1186. Fie a, b, c lungimile laturilor acestui triunghi. Din ipoteză rezultă faptul că $a+b+c = 2p = 8$. Fie s aria triunghiului. Din formula lui Heron: $s = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \Rightarrow s^2 = \frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{-a+b+c}{2} \cdot \frac{a-b+c}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2} \Rightarrow 16s^2 = 8(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) \Rightarrow 2s^2 = (-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$. Inegalitatea triunghiului ne asigura că fiecare paranteză este un număr real pozitiv și putem aplica inegalitatea mediilor: $(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 = \left(\frac{8}{3}\right)^3 = \frac{512}{27} \Rightarrow s^2 \leq \frac{512}{54} = \frac{256}{27} \Rightarrow s \leq \sqrt{\frac{256}{27}}$. Aria maximă este așadar $\sqrt{\frac{256}{27}}$ și se obține în cazul egalității $a = b = c$, adică în cazul în care triunghiul este echilateral.

1187. $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin x}} = \lim\limits_{x\to 0} e^{\ln(\cos x)^{\frac{1}{\sin x}}} = e^{\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x)}{\sin x}} = 1$, deoarece

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x)}{\sin x} \overset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{-\frac{\sin x}{\cos x}}{\cos x} = -\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{\cos^2 x} = 0$. Așadar, limita cerută este egală cu 1.

1188. $I = \int_0^{\pi^2/16} \frac{\mathrm{tg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x = \int_0^{\pi^2/16} \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}\cos\sqrt{x}} \mathrm{d}x$. Folosim substituţia $t = \cos\sqrt{x} \implies \mathrm{d}t = -\frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x$, avem $I = -2\int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{t}\mathrm{d}t = 2\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{1}{t}\mathrm{d}t = -2\ln\frac{\sqrt{2}}{2} = \ln 2.$

1189. Notăm cu $z = \frac{2+iw}{2-iw}$. Astfel, ecuația devine: $z^2+z+1 = 0 \Rightarrow z = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$

$\frac{2+iw}{2-iw} = \frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 4+2iw = -2 \pm 2i\sqrt{3} + iw \mp i^2 w\sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} 6 - w\sqrt{3} = 0 \\ w \pm 2\sqrt{3} = 0 \end{cases}$ Doar $w = 2\sqrt{3}$ satisface ambele condiții.

1190. $\log_2(2x+3) - \log_2\frac{x^2}{2^7} < 7 \Leftrightarrow \log_2 \frac{2x+3}{\frac{1}{2^7}\cdot x^2} < \log_2 2^7 \Leftrightarrow \frac{2x+3}{\frac{1}{2^7}\cdot x^2} < 2^7 \Leftrightarrow 2x+3 < x^2 \Leftrightarrow x^2-2x-3 < 0$ In concluzie, ţinând cont de condiţiile de existenţă impuse de logaritm, $x \in (3, \infty)$.

1191. $ord(x) = 2 \Rightarrow x^2 = e$. Avem $xy = y^2 \Rightarrow x^2y = xy^2 \Rightarrow y = xy^2 = y^3 \Rightarrow y^2 = e$. Cum $y^{6561} = y^{2 \cdot 3280+1} = y$.

1192. Pentru ca triunghiul ABC să fie dreptunghic în C, vectorii $\vec{CA}$ și $\vec{CB}$ trebuie să fie perpendiculari. Astfel, produsul scalar dintre acești vectori trebuie să fie zero: $\vec{CA} \cdot \vec{CB} = 0 \Rightarrow (2-x)(-x) + (3-4x)(-4x) = 0 \Rightarrow x = 0$ sau $x = \dfrac{14}{17} \Rightarrow\Rightarrow C\left(\dfrac{14}{17}, \dfrac{56}{17}\right)$. Dacă x ar fi 0, atunci și y ar fi 0 deci $B = C$ și triunghiul ar fi degenerat.

10

Propunători

1. Simion Breaz
2. Dorel Duca
3. Dorel Duca
4. Patricia Manciu
5. Patricia Manciu
6. Patricia Manciu
7. Patricia Manciu
8. Patricia Manciu
9. Patricia Manciu
10. Patricia Manciu
11. Patricia Manciu
12. Patricia Manciu
13. Patricia Manciu
14. Cosmin Pelea
15. István Szöllősi
16. Cosmin Pelea
17. Hannelore Lisei
18. Dorel Duca
19. Patricia Manciu
20. Patricia Manciu
21. Patricia Manciu
22. Patricia Manciu
23. Patricia Manciu
24. Gabriela Petruşel
25. Cristian Crețu
26. Adriana Buică
27. Natalia Roșca
28. Dorel Duca
29. Patricia Manciu
30. Patricia Manciu
31. Patricia Manciu
32. Patricia Manciu
33. Patricia Manciu
34. Patricia Manciu
35. Cristian Crețu
36. Adriana Buică
37. Adriana Buică
38. Patricia Manciu
39. Cristian Crețu
40. Patricia Manciu
41. Cristian Crețu
42. Cristian Crețu
44. Adriana Buică
45. Adriana Buică
46. Adriana Buică
47. Adriana Buică
48. Cristian Crețu
49. Cristian Crețu
50. Adriana Buică
51. Adriana Buică
52. Adriana Buică
53. Adriana Buică
54. Natalia Roșca
55. Rareș Cotoi
56. Rareș Cotoi
57. Dorel Duca
58. Dorel Duca
59. Dorel Duca
60. Dorel Duca
61. Rareș Cotoi
62. Dorel Duca
63. Dorel Duca
64. Rareș Cotoi
65. Gabriela Petrușel
66. Gabriela Petrușel
67. Gabriela Petrușel
68. Cosmin Pelea
69. Septimiu Crivei
70. Tamás László
71. Dorel Duca
72. Ariana Ilieș
73. Ariana Ilieș
74. Rareș Cotoi
75. Cristian Crețu
76. Mara Ielciu
77. Mara Ielciu
78. Mara Ielciu
79. Mara Ielciu
80. Mara Ielciu
81. Mara Ielciu
82. Mara Ielciu
83. Mara Ielciu
84. Mara Ielciu
85. Mara Ielciu
86. Mara Ielciu
87. Mara Ielciu
88. Mara Ielciu
89. Mara Ielciu
90. Mara Ielciu
91. Mara Ielciu
92. Mara Ielciu
93. Mara Ielciu
94. Mara Ielciu
95. Mara Ielciu
96. Mara Ielciu
97. Mara Ielciu
98. Mara Ielciu
99. Mara Ielciu
100. Mara Ielciu
101. Mara Ielciu
102. Mara Ielciu
103. Cosmin Pelea
104. Cosmin Pelea
105. Cosmin Pelea
106. Adrian Petrușel
107. Simion Breaz
108. Paul Blaga
109. István Szöllősi
110. Mara Ielciu
111. Mara Ielciu
112. Mara Ielciu
113. Mara Ielciu
114. Mara Ielciu
115. Mara Ielciu
116. Mara Ielciu
117. Gabriela Petrușel
118. Gabriela Petrușel
119. Mara Ielciu
120. Andrei Mărcuș
121. Andrei Mărcuș
122. Andrei Mărcuș
123. Andrei Mărcuș
124. Andrei Mărcuș
125. Andrei Mărcuș
126. Andrei Mărcuș
127. Cosmin Pelea
128. Cosmin Pelea
129. Dorel Duca
130. Mara Ielciu
131. Mara Ielciu
132. Mara Ielciu
133. Mara Ielciu

134. Andrei Mărcuș
135. Mara Ielciu
136. Mara Ielciu
137. Mara Ielciu
138. Mara Ielciu
139. Rareș Cotoi
140. Rareș Cotoi
141. Cosmin Pelea
142. Mara Ielciu
143. Andrei Mărcuș
144. Andrei Mărcuș
145. Rareș Cotoi
146. Rareș Cotoi
147. Rareș Cotoi
148. Rareș Cotoi
149. Rareș Cotoi
150. Tudor Micu
151. Tudor Micu
152. Tudor Micu
153. Adrian Petrușel
154. Adrian Petrușel
155. Kajántó Sándor
156. Tudor Micu
157. Rareș Cotoi
158. Rareș Cotoi
159. Rareș Cotoi
160. Rareș Cotoi
161. Rareș Cotoi
162. Rareș Cotoi
163. Rareș Cotoi
164. Rareș Cotoi
165. Tudor Micu
166. Cosmin Pelea
167. Rareș Cotoi
168. Cosmin Pelea
169. Cosmin Pelea
170. Adrian Petrușel
171. Adrian Petrușel
172. Cristian Crețu
173. Cristian Crețu
174. Rareș Cotoi
175. Rareș Cotoi
176. Rareș Cotoi
177. Rareș Cotoi
178. Rareș Cotoi
179. Rareș Cotoi
180. Ioana Gavrilă
181. Ioana Gavrilă
182. Ioana Gavrilă
183. Ioana Gavrilă
184. Ioana Gavrilă
185. Ioana Gavrilă
186. Cristian Crețu
187. Ioana Gavrilă
188. Ioana Gavrilă
190. Hannelore Lisei
191. Dorel Duca
192. Dorel Duca
193. Dorel Duca
194. Dorel Duca
195. Dorel Duca
196. Dorel Duca
197. Cristian Crețu
198. Dorel Duca
199. Dorel Duca
200. Cristian Crețu
201. Ariana Ilieș
202. Ariana Ilieș
203. Ariana Ilieș
204. Ariana Ilieș
205. Ariana Ilieș
206. Ariana Ilieș
207. Ariana Ilieș
208. Ariana Ilieș
209. Patricia Manciu
210. Ariana Ilieș
211. Ariana Ilieș
212. Ariana Ilieș
213. Ariana Ilieș
214. Ariana Ilieș
215. Ariana Ilieș
216. Ariana Ilieș
217. Mihai Iancu
218. Mihai Iancu
219. Hannelore Lisei
220. Ștefan Berinde
221. Ștefan Berinde
222. Ștefan Berinde
223. Brigitte Breckner
224. Brigitte Breckner
225. Sanda Micula
226. Dorel Duca
227. Dorel Duca
228. Dorel Duca
229. Dorel Duca
230. Mihai Nechita
231. Rareș Răhăian
232. Rareș Răhăian
233. Rareș Răhăian
234. Rareș Răhăian
235. Rareș Răhăian
236. Rareș Răhăian
237. Rareș Răhăian
238. Rareș Cotoi
239. Rareș Cotoi
240. Ariana Ilieș
241. Ariana Ilieș
242. Ariana Ilieș
243. Ariana Ilieș
244. Cristian Crețu
245. Cristian Crețu
246. Mihai Iancu
247. Mihai Iancu
248. Brigitte Breckner
249. Brigitte Breckner
250. Florin Albișoru
251. Ariana Ilieș
252. Ariana Ilieș
253. Ariana Ilieș
254. Ștefan Berinde
255. Ștefan Berinde
256. Brigitte Breckner
257. Brigitte Breckner
258. Dorel Duca
259. Dorel Duca
260. Mihai Nechita
261. Mihai Nechita
262. Mihai Nechita
263. Mihai Nechita
264. Ariana Ilieș
265. Luca Crețu
266. Cristian Crețu
267. Ariana Ilieș
268. Mihai Iancu
269. Ariana Ilieș
270. Hannelore Lisei
271. Brigitte Breckner
272. Brigitte Breckner
273. Brigitte Breckner
274. Sanda Micula
275. Dorel Duca
276. Ștefan Berinde
277. Teodora Cătinaș
278. Nicolae Popovici
279. Dorel Duca
280. Dorel Duca
281. Cosmin Pelea
282. Gabriela Petrușel
283. Gabriela Petrușel
284. Gabriela Petrușel
285. Cosmin Pelea
286. Mihai Iancu
287. Anca Grad
288. Anca Grad
289. Ștefan Berinde
290. Brigitte Breckner
291. Cristian Crețu
292. Cristian Crețu
293. Rareș Răhăian
294. Rareș Răhăian
295. Rareș Răhăian
296. Rareș Răhăian
297. Rareș Răhăian
298. Rareș Răhăian
299. Rareș Cotoi
300. Cristian Crețu
301. Cristian Crețu
302. Cristian Crețu
303. Cristian Crețu
304. Luca Crețu
305. Luca Crețu
306. Luca Crețu
307. Luca Crețu
308. Luca Crețu
309. Luca Crețu
310. Luca Crețu
311. Luca Crețu
312. Luca Crețu
313. Luca Crețu
314. Luca Crețu
315. Luca Crețu
316. Luca Crețu
317. Luca Crețu
318. Luca Crețu
319. Luca Crețu
320. Luca Crețu
321. Luca Crețu
322. Luca Crețu
323. Luca Crețu
324. Teodora Cătinaș
325. Zoltan Finta
326. Brigitte Breckner
327. Brigitte Breckner
328. Brigitte Breckner
329. Brigitte Breckner
330. Cristian Crețu
331. Cristian Crețu
332. Rareș Cotoi
333. Cristian Crețu
334. Cristian Crețu
335. Cristian Crețu
336. Cristian Crețu
337. Cristian Crețu
338. Cristian Crețu
339. Cristian Crețu
340. Cristian Crețu
341. Cristian Crețu
342. Cristian Crețu
343. Cristian Crețu
344. Cristian Crețu
345. Ștefan Berinde
346. Ștefan Berinde
347. Ștefan Berinde
348. Cristian Crețu
349. Cristian Crețu
350. Cristian Crețu

351. Cristian Crețu
352. Cristian Crețu
353. Cristian Crețu
354. Cristian Crețu
355. Cristian Crețu
356. Cristian Crețu
357. Cristian Crețu
358. Cristian Crețu
359. Brigitte Breckner
360. Brigitte Breckner
361. Cristian Crețu
362. Rareș Cotoi
363. Rareș Cotoi
364. Mihai Iancu
365. Mihai Iancu
366. Mihai Iancu
367. Florin Albișoru
368. Cristian Crețu
369. Zoltan Finta
370. Brigitte Breckner
371. Brigitte Breckner
372. Brigitte Breckner
373. Brigitte Breckner
374. Sanda Micula
375. Brigitte Breckner
376. Brigitte Breckner
377. Brigitte Breckner
378. Brigitte Breckner
379. Brigitte Breckner
380. Brigitte Breckner
381. Brigitte Breckner
382. Luca Crețu
383. Luca Crețu
384. Luca Crețu
385. Luca Crețu
386. Luca Crețu
387. Luca Crețu
388. Luca Crețu
389. Luca Crețu
390. Luca Crețu
391. Luca Crețu
392. Luca Crețu
393. Luca Crețu
394. Gabriela Petrușel
395. Gabriela Petrușel
396. Gabriela Petrușel
397. Gabriela Petrușel
398. Mirela Kohr
399. Rareș Cotoi
400. Rareș Răhăian
401. Rareș Răhăian
402. Rareș Răhăian
403. Rareș Răhăian
404. Rareș Răhăian
405. Rareș Răhăian
406. Rareș Răhăian
407. Rareș Răhăian
408. Cristian Crețu
409. Rareș Răhăian
410. Rareș Răhăian
411. Rareș Cotoi
412. Brigitte Breckner
413. Mara Ielciu
414. Mara Ielciu
415. Mara Ielciu
416. Iulian Simion
417. Róth Ágoston
418. Róth Ágoston
419. Róth Ágoston
420. Róth Ágoston
421. Rareș Răhăian
422. Rareș Răhăian
423. Rareș Răhăian
424. Rareș Răhăian
425. Claudiu Pop
426. Claudiu Pop
427. Ioana Gavrilă
428. Ioana Gavrilă
429. Ioana Gavrilă
430. Ioana Gavrilă
431. Ioana Gavrilă
432. Ioana Gavrilă
433. Ioana Gavrilă
434. Ioana Gavrilă
435. Ioana Gavrilă
436. Ioana Gavrilă
437. Ariana Ilieș
438. Cristina Blaga
439. Florin Grigore
440. Florin Grigore
441. Florin Grigore
442. Florin Grigore
443. Florin Grigore
444. Florin Grigore
445. Florin Grigore
446. Florin Grigore
447. Florin Grigore
448. Florin Grigore
449. Florin Grigore
450. Florin Grigore
451. Florin Grigore
452. Florin Grigore
453. Florin Grigore
454. Florin Grigore
455. Florin Grigore
456. Florin Grigore
457. Ariana Ilieș
458. Florin Grigore
459. Florin Grigore
460. Florin Grigore
461. Florin Grigore
462. Florin Grigore
463. Florin Grigore
464. Florin Grigore
465. Florin Grigore
466. Florin Grigore
467. Claudiu Pop
468. Claudiu Pop
469. Claudiu Pop
470. Claudiu Pop
471. Claudiu Pop
472. Claudiu Pop
473. Claudiu Pop
474. Claudiu Pop
475. Claudiu Pop
476. Cristian Crețu
477. Mihai Iancu
478. Mihai Iancu
479. Claudiu Pop
480. Claudiu Pop
481. Claudiu Pop
482. Claudiu Pop
483. Claudiu Pop
484. Claudiu Pop
485. Claudiu Pop
486. Veronica Nechita
487. Veronica Nechita
488. Mihai Iancu
489. Cornel Pintea
490. Rareș Cotoi
491. Dorel Duca
492. Ioana Gavrilă
493. Claudiu Pop
494. Claudiu Pop
495. Claudiu Pop
496. Claudiu Pop
497. Claudiu Pop
498. Claudiu Pop
499. Claudiu Pop
500. Claudiu Pop
501. Claudiu Pop
502. Claudiu Pop
503. Claudiu Pop
504. Ioana Gavrilă
505. Ioana Gavrilă
506. Ioana Gavrilă
507. Ioana Gavrilă
508. Veronica Nechita
509. Veronica Nechita
510. Veronica Nechita
511. Veronica Nechita
512. Mihai Iancu
513. Róth Ágoston
514. Ioana Gavrilă
515. Rareș Răhăian
516. Ioana Gavrilă
517. Ioana Gavrilă
518. Rareș Răhăian
519. Rareș Răhăian
520. Rareș Răhăian
521. Rareș Răhăian
522. Veronica Nechita
523. Veronica Nechita
524. Veronica Nechita
525. Cristina Blaga
526. Mihai Iancu
527. Mihai Iancu
528. Cornel Pintea
529. Cornel Pintea
530. Iulian Simion
531. Rareș Răhăian
532. Rareș Răhăian
533. Paul Blaga
534. Rareș Răhăian
535. Mihai Iancu
536. Mihai Iancu
537. Mihai Iancu
538. Tudor Micu
539. Róth Ágoston
540. Rareș Cotoi
541. Ioana Gavrilă
542. Ioana Gavrilă
543. Rareș Răhăian
544. Rareș Răhăian
545. Rareș Răhăian
546. Rareș Răhăian
547. Rareș Răhăian
548. Rareș Răhăian
549. Rareș Răhăian
550. Gabriela Petrușel
551. George Lung
552. George Lung
553. George Lung
554. Rareș Răhăian
555. Rareș Răhăian
556. Rareș Răhăian
557. Rareș Răhăian
558. Zsolt Szilágyi
559. Mara Ielciu
560. Cristian Crețu
561. Rareș Cotoi
562. Cristian Crețu
563. Mara Ielciu
564. Rareș Cotoi
565. Rareș Cotoi
566. George Lung

567. George Lung
568. George Lung
569. George Lung
570. George Lung
571. George Lung
572. George Lung
573. George Lung
574. George Lung
575. George Lung
576. George Lung
577. George Lung
578. George Lung
579. Ariana Ilieș
580. Hannelore Lisei
581. Ariana Ilieș
582. Gabriela Petrușel
583. Cristian Crețu
584. Rareș Răhăian
585. Rareș Răhăian
586. Ioana Gavrilă
587. Ioana Gavrilă
588. Ariana Ilieș
589. Ariana Ilieș
589. Ariana Ilieș
590. Ariana Ilieș
591. Ariana Ilieș
592. Ariana Ilieș
593. Ariana Ilieș
594. Ariana Ilieș
595. Ariana Ilieș
596. Ariana Ilieș
597. Ariana Ilieș
598. Ariana Ilieș
599. Ariana Ilieș
600. Ariana Ilieș
601. Ariana Ilieș
602. Ariana Ilieș
603. Ariana Ilieș
604. Ariana Ilieș
605. Ariana Ilieș
607. Ildikó Mezei
608. Ildikó Mezei
609. Rareș Cotoi
610. Cristian Crețu
611. Ariana Ilieș
612. Ariana Ilieș
613. Ariana Ilieș
614. Ariana Ilieș
615. Ariana Ilieș
616. Ariana Ilieș
617. Ariana Ilieș
618. Ariana Ilieș
619. Ariana Ilieș
620. Ariana Ilieș
621. Ariana Ilieș
622. Ariana Ilieș
623. Ariana Ilieș
624. Ariana Ilieș
625. Ariana Ilieș
626. Ariana Ilieș
627. Gabriela Petrușel
628. Gabriela Petrușel
629-952. Comisie
953. Rareș Cotoi
954. Rareș Cotoi
955. Rareș Cotoi
956. Rareș Cotoi
957. Rareș Cotoi
958. Nicolae Popovici
959. Rareș Cotoi
960. Cosmin Pelea
961. Ștefan Berinde
962. Teodora Cătinaș
963. Rareș Cotoi
964. Cristian Crețu
965. Septimiu Crivei
966. Kajántó Sándor
967. Cristian Crețu
968. Adriana Buică
969. Adrian Petrușel
970. Rareș Cotoi
971. Iulian Simion
972. Cristian Crețu
973. Tudor Micu
974. Rareș Cotoi
975. Mara Ielciu
976. Rareș Răhăian
977. Rareș Cotoi
978. Mirela Kohr
979. Ioana Gavrilă
980. Cristian Crețu
981. Cristian Crețu
982. Cristian Crețu
983. Cristian Crețu
984. Cristian Crețu
985. Cristian Crețu
986. Cristian Crețu
987. Cristian Crețu
988. Cristian Crețu
989. Cristian Crețu
990. Cristian Crețu
991. Cristian Crețu
992. Cristian Crețu
993. Cristian Crețu
994. Cristian Crețu
995. Cristian Crețu
996. Cristian Crețu
997. Cristian Crețu
998. Cristian Crețu
999. Cristian Crețu
1000. Cristian Crețu
1001. Rareș Răhăian
1002. Rareș Răhăian
1003. Rareș Răhăian
1004. Rareș Răhăian
1005. Rareș Răhăian
1006. Luca Crețu
1007. Cristian Crețu
1008. Ariana Ilieș
1009. Luca Crețu
1010. Ariana Ilieș
1011. Ariana Ilieș
1012. Rareș Răhăian
1013. Ariana Ilieș
1014. Luca Crețu
1015. Mara Ielciu
1016. Mara Ielciu
1017. Mara Ielciu
1018. Rareș Răhăian
1019. Mara Ielciu
1020. Ariana Ilieș
1021. Mara Ielciu
1022. Luca Crețu
1023. Rareș Răhăian
1024. Luca Crețu
1025. Luca Crețu
1026. Mara Ielciu
1027. Mara Ielciu
1028. Ariana Ilieș
1029. Mara Ielciu
1030. Luca Crețu
1031. Rareș Răhăian
1032. Rareș Răhăian
1033. Rareș Răhăian
1034. Rareș Răhăian
1035. Rareș Răhăian
1036. Luca Crețu
1037. Rareș Răhăian
1038. Rareș Răhăian
1039. Mara Ielciu
1040. Rareș Răhăian
1041. Mara Ielciu
1042. Mara Ielciu
1043. Ariana Ilieș
1044. Ariana Ilieș
1045. Ariana Ilieș
1046. Luca Crețu
1047. Ariana Ilieș
1048. Luca Crețu
1049. Mara Ielciu
1050. Luca Crețu
1051. Mara Ielciu
1052. Mara Ielciu
1053. Rareș Răhăian
1054. Rareș Răhăian
1055. Mara Ielciu
1056. Luca Crețu
1057. Rareș Răhăian
1058. Rareș Răhăian
1059. Rareș Răhăian
1060. Luca Crețu
1061. Rareș Răhăian
1062. Rareș Răhăian
1063. Rareș Răhăian
1064. Mara Ielciu
1065. Luca Crețu
1066. Rareș Răhăian
1067. Rareș Răhăian
1068. Ariana Ilieș
1069. Ariana Ilieș
1070. Luca Crețu
1071. Mara Ielciu
1072. Ariana Ilieș
1073. Mara Ielciu
1074. Luca Crețu
1075. Rareș Răhăian
1076. Ariana Ilieș
1077. Mara Ielciu
1078. Luca Crețu
1079. Mara Ielciu
1080. Luca Crețu
1081. Mara Ielciu
1082. Luca Crețu
1083. Mara Ielciu
1084. Rareș Răhăian
1085. Mara Ielciu
1086. Mara Ielciu
1087. Luca Crețu
1088. Ariana Ilieș
1089. Rareș Răhăian
1090. Mara Ielciu
1091. Luca Crețu
1092. Rareș Răhăian
1093. Luca Crețu
1094. Ariana Ilieș
1095. Luca Crețu
1096. Ariana Ilieș
1097. Rareș Cotoi
1098. Ioana Gavrilă
1099. Ioana Gavrilă
1100. Ioana Gavrilă
1101. Rareș Cotoi
1102. Rareș Cotoi
1104. Cosmin Pelea
1105. Rareș Cotoi
1106. Rareș Cotoi

1107. Rareș Cotoi
1108. Rareș Cotoi
1109. Rareș Cotoi
1110. Rareș Cotoi
1111. Rareș Cotoi
1112. Rareș Cotoi
1113. Rareș Cotoi
1114. Rareș Cotoi
1115. Rareș Cotoi
1116. Rareș Cotoi
1117. Rareș Cotoi
1118. Rareș Cotoi
1119. Rareș Cotoi
1120. Rareș Cotoi
1121. Cristian Crețu
1122. Cristian Crețu
1123. Cristian Crețu
1124. Cristian Crețu
1125. Cristian Crețu
1126. Cristian Crețu
1127. Cristian Crețu
1128. Cristian Crețu
1129. Cristian Crețu
1130. Cristian Crețu
1131. Cristian Crețu
1132. Cristian Crețu
1133. Cristian Crețu
1134. Cristian Crețu
1135. Cristian Crețu
1136. Cristian Crețu
1137. Cristian Crețu
1138. Cristian Crețu
1139. Cristian Crețu
1140. Cristian Crețu
1141. Ioana Gavrilă
1142. Cristian Crețu
1143. Cristian Crețu
1144. Cristian Crețu
1145. Rareș Cotoi
1146. Rareș Cotoi
1147. Rareș Cotoi
1148. Rareș Cotoi
1149. Rareș Cotoi
1150. Luca Crețu
1151. Rareș Cotoi
1152. Rareș Cotoi
1153. Rareș Cotoi
1154. Rareș Cotoi
1155. Rareș Răhăian
1156. Rareș Cotoi
1157. Rareș Cotoi
1158. Luca Crețu
1159. Rareș Cotoi
1160. Luca Crețu
1161. Rareș Cotoi
1162. Rareș Cotoi
1163. Luca Crețu
1164. Rareș Cotoi
1165. Rareș Cotoi
1166. Rareș Răhăian
1167. Rareș Cotoi
1168. Rareș Cotoi
1169. Luca Crețu
1170. Rareș Răhăian
1171. Rareș Răhăian
1172. Cristian Crețu
1173. Rareș Răhăian
1174. Luca Crețu
1175. Rareș Răhăian
1176. Luca Crețu
1177. Cristian Crețu
1178. Luca Crețu
1179. Cristian Crețu
1180. Cristian Crețu
1181. Cristian Crețu
1182. Rareș Răhăian
1183. Cristian Crețu
1184. Cristian Crețu
1185. Luca Crețu
1186. Rareș Răhăian
1187. Rareș Răhăian
1188. Luca Crețu
1189. Cristian Crețu
1190. Rareș Cotoi
1191. Rareș Cotoi
1192. Cristian Crețu

11

Erată

Față de prima ediție (tipărită și online), această versiune (12.03.2025) conține următoarele corecturi.

Algebră

- Problema **1.**, rezolvare: numărul de 6 cifre $n \in A$ este $n = 153846$.
- Problema **19.**, enunț: $\sum_{k=1}^{n} f(k)$ în loc de $\sum_{k=1}^{n} f(n)$.
- Problema **31.**, enunț $\log_3 x + \log_9 x^2 + \log_{27} x^3 + ...$ în loc de $\log_3 x + \log_6 x^2 + \log_{27} x^3 + ...$.

Analiză

- Problema **301.**, enunț: funcția este $f(x) = \dfrac{x^3 + x}{x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1}$.
- Problema **302.**, enunț: se cere valoarea limitei $\lim\limits_{n\to\infty} \left[e\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{2n^2} I(n)\right]$.
- Problema **302.**, rezolvarea a fost corectată (se folosește regula lui l'Hopital).
- Problema **313.**, enunț: prima ramură a funcției este dată prin $\sqrt{1 - x^2} + 1$.
- Problema **319.**, enunț: funcția corectă de la $\boxed{\text{C}}$ este $F(x) = \dfrac{1}{22\sqrt{37}} \ln \left|\dfrac{4\sin x + 5 - \sqrt{37}}{4\sin x + 5 + \sqrt{37}}\right|$.
- Problema **319.**, răspuns: pe domeniul de definiție funcția este continuă, deci răspunsul $\boxed{\text{A}}$ este defapt greșit. Răspunsurile corecte sunt $\boxed{\text{B}}$ $\boxed{\text{C}}$.
- Problem **334.**, enunț: valoarea corectă de la $\boxed{\text{D}}$ este $I = \dfrac{2 - \sqrt{2}}{2}$.

Geometrie

- Problema **414.**, enunț: se cere aria suprafeței colorate cu negru.

Teste

- Problema **890.**, enunț: graficele lipseau, au fost acum adăugate.
- Problema **982.**, răspuns: răspunsurile corecte sunt $\boxed{\text{B}}$ $\boxed{\text{C}}$.

- Problema **998.**, enunț: triunghiul este oarecare, nu ascuțitunghic.
- Problema **998.**, răspuns: răspunsurile au fost modificate, iar răspunsul corect este $-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ $\boxed{\text{D}}$.
- Problema **854.**, rezolvare: concluzia rezolvării este că răspunsurile corecte sunt $\boxed{\text{A}}$ $\boxed{\text{C}}$.
- Problema **868.**, rezolvare: în ultimul caz se consideră $a \in (-1, 0)$, iar soluția este $[-1, 0]$.
- Problema **1009.**, lipsea enunțul care a fost acum adăugat. După această problemă numărătoarea a fost decalată cu 1 în varianta actuală.
- Problema **1017.**, răspuns și rezolvare: răspunsurile corecte sunt $\boxed{\text{A}}$ $\boxed{\text{B}}$ $\boxed{\text{D}}$.