

NUMERE ȘI FORME SAU DESPRE ARITMETICĂ ȘI TOPOLOGIE

Louis Funar

CNRS, Institut Fourier, Université Grenoble Alpes

Prezentare PRHC Universitatea Babeș-Bolyai 25 Mai 2021

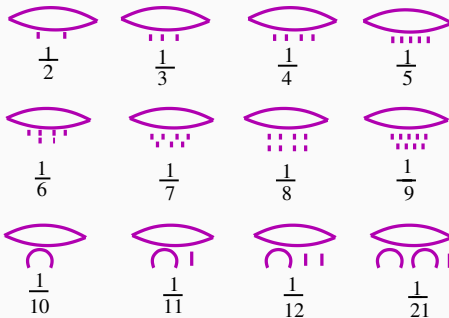
- ① Numere naturale și fracții
- ② Numere și proporții
- ③ Numere și ecuații
- ④ Ecuații și geometrie
- ⑤ Despre forma sau topologia suprafețelor
- ⑥ Formele controlează numerele
- ⑦ Topologia geometrică în dimensiuni mari
- ⑧ Pot numerele descrie formele?

- Numere : de la concret la abstract
- Forme : Artă



NUMERE NATURALE ȘI FRAȚII

- **Fracții egiptene** (unitare) : $\frac{1}{n}$, unde n este un număr natural.



- Papirusul Rhind (sau Ahmesu, 1650 î.e.n.)

$$\frac{2}{101} = \frac{1}{101} + \frac{1}{202} + \frac{1}{303} + \frac{1}{606}$$

- **Conjectura Erdős-Strauss** : Pentru orice număr natural n fracția $\frac{4}{n}$ este suma a 3 fracții unitare, adică putem găsi trei numere naturale x, y și z astfel încât să avem :

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$$

NUMERE ȘI PROPORȚII

- **Numere :** naturale $\mathbb{N}$, întregi $\mathbb{Z}$, raționale $\mathbb{Q}$.
- $\sqrt{2}$ este irațional

Prin reducere la absurd. Să presupunem că

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q},$$

unde p și q numere naturale ce sunt prime între ele. Din relația :

$$p^2 = 2q^2$$

deducem că p este par, și deci $p = 2r$, unde r este un număr întreg.

Atunci :

$$2r^2 = q^2$$

Ca și mai sus q este la rândul său par. Prin urmare 2 divide atât p cât și q , ceea ce constituie o contradicție. $\square$

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

NUMERE SI ECUAȚII

- Diophantus : orice număr prim care dă restul 1 la împărțirea cu 4 se poate scrie ca suma a două pătrate perfecte
- J.-L. Lagrange : orice număr natural este suma a 4 pătrate perfecte.
- Necunoscute în ecuații diofantice
- Număr algebric : soluție a unei ecuații algebrice (polinomiale) avînd coeficienți raționali
- Mulțimea numerelor algebrice : $\overline{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{C}$.

$$\sqrt[3]{7 + 13\sqrt[5]{5} - 2\sqrt{3}\sqrt[67]{19}} + \sqrt[100]{12 + 23\sqrt[17]{51} - 12\sqrt[3]{6}} \in \overline{\mathbb{Q}}$$

$$x^2 + ax + b = 0$$

- Formulă explicită prin radicali, obținută de S.Stevin și R. Descartes :

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- E. Galois, N. H. Abel : Nu există formule pentru rezolvarea prin radicali ale tuturor ecuațiilor de grad $d \geq 5$.

ECUAȚII SI GEOMETRIE

- Teorema fundamentală a algebrei : Orice ecuație polinomială de gradul n cu coeficienți în $\mathbb{C}$ are n soluții în $\mathbb{C}$.
- Mulțime algebrică : soluțiile unui sistem de ecuații

$$x^5 + y^5 = 1$$

$x = a + ib$, $y = c + id$, unde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$; atunci

$$x^5 = (a^5 + 5ab^4 - 10a^3b^2) + (5a^4b + b^5 - 10a^2b^3)i,$$

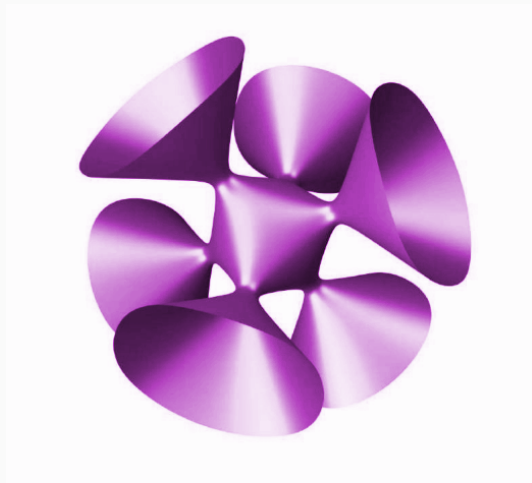
$$y^5 = (c^5 + 5cd^4 - 10c^3d^2) + (5c^4d + d^5 - 10c^2d^3)i,$$

- Varietatea soluțiilor în $\mathbb{R}^4$ este descrisă de sistemul :

$$a^5 + 5ab^4 - 10a^3b^2 + c^5 + 5cd^4 - 10c^3d^2 = 1$$

$$5a^4b + b^5 - 10a^2b^3 + 5c^4d + d^5 - 10c^2d^3 = 0$$

- Două ecuații în 4 necunoscute – mulțimea soluțiilor formează o *suprafață* în $\mathbb{R}^4$.
- Proiecția în $\mathbb{R}^3$ este asemănătoare cu desenul de mai jos, avînd 7 pînze sub formă de pîlnie ce pleacă spre infinit :

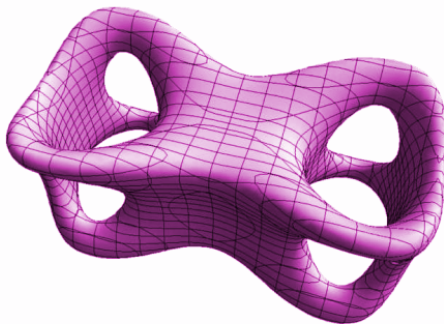


- Pentru a compactifica suprafața, se omogenizează ecuația :

$$x^5 + y^5 = z^5$$

și se consideră mulțimea soluțiilor în spațiul proiectiv $\mathbb{P}^2$.

- Acum ecuația omogenă definește o suprafață compactă, numită curbă complexă (algebrică) pentru a pune în evidență faptul că dimensiunea sa complexă este 1.



DESPRE FORMA SAU TOPOLOGIA SUPRAFETELOR

- Listing : "Topologia este teoria matematică ce studiază acele proprietăți calitative ale obiectelor ce sunt independente de măsură și cantitate". Cu alte cuvinte, topologia analizează formele obiectelor.
- **Teorema lui Euler** : *Dacă din numărul vîrfurilor unui poliedru convex scădem numărul muchiilor și apoi adunăm numărul fețelor atunci, independent de poliedrul considerat (cub, tetraedru, icosaedru, ș.a.m.d.), obținem întotdeauna numărul 2.*
- Pentru alte poliedre suma aceasta alternantă poate fi diferită de 2, și se numește *caracteristica Euler* χ .
- Două spații topologice sunt *homeomorfe* dacă pot fi deformat unul în celălalt în mod continuu, fără a utiliza tăieturi, lipituri sau transformări care să le altereze conținutul.

- Varietate topologică : spațiu pentru care orice punct al său situat în interior are o vecinătate homeomorfa cu $\mathbb{R}^k$, iar k se numește dimensiunea sa.
- Suprafețele sunt varietățile topologice de dimensiune $k = 2$.
- H. Poincaré a remarcat ca formula lui Euler se poate generaliza la poliedre ce sunt varietăți topologice, pentru că două poliedre homeomorfe au aceeași caracteristica Euler χ .
- Putem atunci defini *genul* unei suprafețe orientabile închise ca fiind

$$g = 1 - \frac{\chi}{2}$$

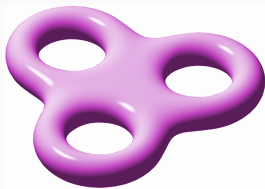
- Astfel sfera are genul zero, conform formulei lui Euler ;
- Torul, sau suprafața unui colac, are genul 1 :



- O suprafață de gen 2 :



- O suprafață de gen 3 :



- Putem construi în același mod suprafețe de gen g , pentru orice număr natural g .

Acum, dacă considerăm acum ecuația omogenă de grad superior :

$$x^n + y^n = z^n$$

unde $n \geq 3$ este un număr natural, așa cum apare în conjectura lui Fermat, vom obține o curbă complexă (deci o suprafață reală) ireductibilă netedă în $\mathbb{P}^2$, al cărui gen g este dat de formula :

$$g = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

FORMELE CONTROLEAZĂ NUMERELE

- **Conjectura Mordell :** *Dacă suprafața asociată unui sistem de ecuații are genul cel puțin egal cu 2, atunci nu există decît un număr finit de soluții raționale. Dacă genul este zero, atunci odată ce există o soluție rațională, există o infinitate.*
- Conjectura lui Mordell a fost demonstrată de către G. Faltings în 1983.
- Ecuația

$$x^n + y^n = z^n$$

are asociată o suprafața de genul $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$. Deci pentru $n > 3$ ecuația lui Fermat nu poate avea decît un număr finit de soluții întregi.

- Descrierea completă în cazul cînd genul este 1 și suprafața este un tor (o curbă eliptică) este subiectul unei conjecturi a lui B. Birch și P. Swinnerton-Dyer.

TOPOLOGIA GEOMETRICĂ ÎN DIMENSIUNI MAI MARI

- 1956 J. Milnor inventează sferele exotice în dimensiune 7, care sunt homeomorfe dar nu difeomorfe.
- 1960 S. Smale demonstrează Conjectura lui Poincaré în $\dim n \geq 5$.
- 1982 M. Freedman demonstrează Conjectura lui Poincaré în $\dim n = 4$.
- 1980 W. Thurston formulează Conjectura de geometrizare în $\dim 3$:
Orice varietate poate fi decupată prin sfere și toruri în varietăți avînd o structură geometrică.
- 2003 G. Perelman rezolvă Conjectura lui Thurston, și deci conjectura lui Poincaré în dimensiune 3, folosind metode analitice, și anume deformările metricii date de fluxul Ricci.
- Conjectura Poincaré diferențiabilă în $\dim 4$: Orice varietate topologică homeomorfă cu sfera de $\dim 4$ este difeomorfă cu sfera.
- consecința a Conjecturii Schoenflies : Orice sferă de $\dim 3$ scufundată într-o sferă de $\dim 4$ o divide pe aceasta în două varietăți cu bord difeomorfe cu bila de $\dim 4$.

POT NUMERELE DESCRIE
FORMELE ?

- 1955 S. Adian, 1958 M.O. Rabin : Nu există nici un algoritm ce ar permite să decidem că două prezentari finite reprezintă același grup, sau că o prezentare corespunde grupului trivial cu un singur element, în particular dacă două varietăți compacte de dimensiune 4 (sau mai mare) sunt homeomorfe, sau dacă grupul fundamental al unei astfel de varietăți este trivial.
- 1955 P.S. Novikov, 1958 W. Boone : Nu există nici un algoritm finit care să decidă dacă o varietate compactă este homeomorfă cu sfera.
- Categoria $\varphi(M)$ este numărul minim de puncte critice ale unei funcții netede

$$f : M \rightarrow \mathbb{R}$$

definite pe o varietate diferențiabilă compactă M fără bord.

- 1946 G. Reeb : Orice varietate compactă fără bord M cu proprietatea că $\varphi(M) = 2$ este homeomorfă cu sfera de aceeași dimensiune. Deci un singur număr permite să recunoaștem sfera printre toate varietățile compacte.
- Generalizări în colaborare cu D. Andrica și C. Pinteș

- 1950 C. Papakyriakopoulos : nodul trivial este singurul nod al carui grup fundamental este izomorf cu grupul numerelor întregi $\mathbb{Z}$.
- 1994 S. Matveev, J.H. Rubinstein, A. Thompson : Există algoritmi care să recunoască sfera de dimensiune 3.
- 1989 Invarianți cuantici în dim 3 : E.Witten, N.Reshetikhin, V.Turaev și O.Viro folosind grupuri cuantice (V.Drinfeld, M.Jimbo, G.Lusztig)
- 2013 Forma (topologia) unei varietăți nu este unic determinată de invarianții cuantici. Numărul de varietăți ce pot avea aceiași invarianți cuantici poate fi oricât de mare.
- Cazul generic al varietăților hiperbolice este în continuare nerezolvat.
- Varietăți de dimensiune 4 care sunt algebrice?