NUMERE ŞI FORME, SAU DESPRE ARITMETICĂ SI TOPOLOGIE

LOUIS FUNAR

Omul pre-istoric înţelege empiric noţiunea de cantitate şi implicit a numărului ca măsură a cantităţii. Dacă la început numărul este concret, fiind asociat cu realitatea, el devine o reprezentare abstractă odată cu utilizarea aceloraşi simboluri pentru a număra lucruri complet diferite. Această mutaţie se accentuează din momentul în care apare scrierea şi primele elemente de aritmetică şi continuă pînă astăzi.

Formele de natură geometrică au apărut poate chiar înaintea numerelor, fiind parte integrantă din arta pre-istorică, cum se poate observa analizînd modelele in ceramică din perioada neoliticului. Cu toate acestea, noţiunea de formă a rămas un artefact de-a lungul istoriei, pînă cînd matematica a evoluat suficient pentru a o putea asimila în cadrul unor concepte moderne precum geometria riemanniană si topologia.

Scopul acestei dizertaţii este de a argumenta existenţa unei dualităţi fundamentale între conceptul abstract de număr si cel intuitiv de formă. Acest principiu transcendent constituie fundamentul unei noi metafizici şi a avut un impact major asupra dezvoltării matematicii moderne începînd cu sec XX, care continuă in ziua de azi.

1. Numere naturale si fracţii

Numărul este un concept fundamental ce stă la baza construcţiei aritmeticii. Euclid (300 î.e.n.) menţionează "alcătuirea compusă din mai multe unitaţi", în cartea VII din Elemente; cîte unităţi sunt nu depinde de natura sau forma lor, dacă sunt lucruri sau fiinţe. Ce le distinge de alte alcătuiri este numărul lor. Numărul in accepţiunea lui Euclid nu putea fi decît un număr intreg pozitiv (natural). Cu toate

Date: April 15, 2021.

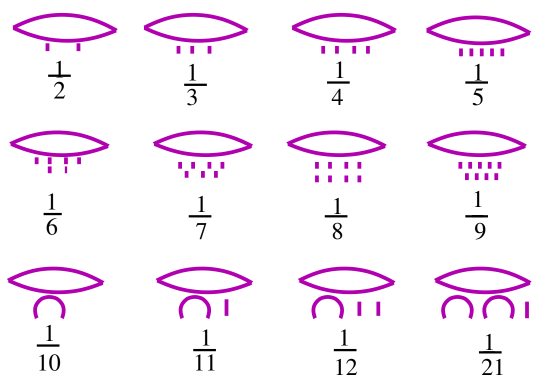
acestea diverse alte cantitaţi apar in problemele de natură geometrică abordate de matematicienii Greciei antice, precum pi, raportul între lungimea circumferinţei unui cerc şi diametrul său, rădăcina pătrată a lui 2 reprezentînd lungimea diagonalei unui pătrat avînd latura o unitate, numărul de aur, şamd.

Este de remarcat că civilizaţia babiloniană (mileniul 3 î.e.n) cunostea notaţia poziţională ce permite descrierea numerelor mari prin intermediul operaţiilor matematice elementare (adunare, scădere şi înmulţire).

Operaţia de împărţire permite introducerea fracţiilor, utilizate in Egiptul antic în special în cadrul măsurătorilor, însa doar a celor ce aveau o formă particulară numite fracţii egiptene (sau unitare în limbaj modern), sau şi mai precis cele de forma:

$$\frac{1}{n},$$

unde n este un număr natural adică întreg şi pozitiv. Astfel egiptenii foloseau hieroglife corespunzătoare unei jumătăti, unei treimi, unui sfert, unei cincimi, etc., si deci numai fracţiile unitare, cum se poate vedea din tabelul de mai jos:



Papirusul Rhind (sau Ahmesu, 1650 î.e.n.) conţine nu doar probleme rezolvate dar şi tabele ce explică descompunerea unor fracţii ne-unitare in sume de fracţii unitare, de exemplu:

$$\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$$

sau

$$\frac{2}{101} = \frac{1}{101} + \frac{1}{202} + \frac{1}{303} + \frac{1}{606}$$

Pare să fi fost cunoscut acestora că o fracţie arbitrară poate fi scrisă ca o sumă de fracţii unitare, însa numărul de termeni poate sa fie arbitrar de mare. Peste 3 milenii mai tîrziu Paul Erdös (1913-1996) studiază numărul de termeni necesari şi în anii 1950 formuleaza problema următoare:

Este adevărat că pentru orice număr natural n fracţia $\frac{4}{n}$ este suma a 3 fracţii unitare, adică putem găsi trei numere naturale x, y şi z astfel încît să avem:

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$$

Oricît ar părea de surprinzător, aceasta problemă elementară ale cărei rădăcini sunt milenare nu este înca rezolvată, deşi ştim că răspunsul este pozitiv pentru toate valorile numărului n mai mici decit 10^{17}, folosind calculatorul. Afirmaţia din enunţ este cunoscută ca una din *conjecturile Erdös-Strauss.*

2. Numere si proporţii

Pentru scoala greacă de matematică din î.e.n. numărul nu avea sens decît ca un număr natural iar acesta era definit prin proprietăţile sale aritmetice. Un concept alternativ apare în perioada dintre sec V- sec II î.e.n. în geometrie, prin introducerea mai întîi a lungimilor (sau mărimilor) segmentelor, şi mai tîrziu a curbelor, prin aproximare. Nevoia tratării unor probleme de natură practică impulsionează studiul rapoartelor între diverse lungimi (să ne aducem aminte de teorema lui Thales) şi astfel apar proporţiile. Lungimile a două segmente sunt comensurabile dacă putem fabrica doua baghete de lungimi egale punînd cap la cap mai multe bastonaşe identice cu cele doua segmente, respectiv. Astfel proporţiile între mărimi comensurabile corespund a ceea ce astazi am numi *numere rationale.* Proporţiile între mărimi incomensurabile reprezintă numere reale iraţionale.

Iraţionalitatea unor numere explicite precum $\sqrt{2}$ apare deja în *Elementele* lui Euclid în cartea X, însa rezultatul pare cunoscut de mai multă vreme, Platon făcînd deja referire în dialogul *Menon - despre virtute*, estimat 385 i.e.n. la acesta. Argumentul cel mai cunoscut este prin reducere la absurd. Dacă

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

atunci putem considera p si q numere naturale ce sunt prime între ele, adică nu au divizori comuni mai mari decit 1. Din relaţia:

$$p^2 = 2q^2$$

deducem că p este par, şi deci putem scrie:

$$p = 2r,$$

unde r este un număr întreg. Relaţia de mai sus este echivalentă cu:

$$2r^2 = q^2.$$

Ca şi mai sus q este la rîndul său par. Prin urmare 2 divide atît p cît şi q, ceea ce constituie o contradicţie.

Timp de cîteva secole cele doua teorii, cea a numerelor – implicit naturale şi deci de natură aritmetică – şi cea a proporţiilor – cu alte cuvinte a numerelor de natură geometrică – evoluează oarecum independent în lipsa unei teorii unificatoare care sa le înglobeze pe amîndouă.

Numărul 0 apare sub forma actuală doar în sec VII, în matematica indiană, şi este adus în Europa în jurul sec X prin intermediul civilizaţiei islamice ce numără matematicieni de prim plan. Acestia dezvoltă elemente de bază ale algebrei în sec XII, în particular conceptul de număr algebric pozitiv, precum şi aproximările acestora în notaţia decimală. Şcoala italiană de matematică menţionează deja în sec XIV numerele imaginare, dar o construcţie satisfăcătoare a lor nu apare înainte de sec XVIII. Construcţia axiomatică şi riguroasă a corpului numerelor reale va fi realizată însa doar în a doua jumătate a sec XIX prin contribuţiile esenţiale ale lui R. Dedekind (1831-1916), K. Weierstrass (1815-1897), G. Cantor (1845-1918) şi C. Meray (1835-1911).

Astfel, au apărut mai întîi mulţimea numerelor naturale $\mathbb{N}$ şi apoi a numerelor întregi $\mathbb{Z}$, ce conţine în plus numerele negative. A urmat mulţimea numerelor raţionale $\mathbb{Q}$ care a permis să se definească cea a numerelor reale $\mathbb{R}$ şi, în sfîrşit mulţimea numerelor complexe $\mathbb{C}$:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

3. Numere si ecuaţii

Diophantus, matematician grec ce a trăit în sec III in Alexandria, a lăsat o puternică amprentă în teoria numerelor. Printre alte contribuţii, el a demonstrat că orice număr prim care dă restul 1 la împărtirea cu 4 se poate scrie ca suma a două patrate perfecte; acest rezultat intervine in demonstraţia teoremei celor patru pătrate a lui J.-L. Lagrange (1736-1813), care spune că orice număr natural este suma a 4 pătrate perfecte.

Opera sa, în mare parte neînteleasă de către contemporani, a avut o influenţă majoră în dezvoltarea ulterioară a algebrei pînă in sec XVIII. Este prima dată cînd se vehiculează ideea că se pot folosi metode algebrice pentru a rezolva ecuaţiile, în opoziţie cu metodele exclusiv geometrice folosite pînă atunci de matematicienii greci.

Diophantus introduce noţiunea de *necunoscută* sau numar indeterminat (arithme). El enunţă probleme în care necunoscutele apar la puteri mai mari decit 2, pentru care interpretarea de natură geometrică lipseşte. Numărul-proporţie, concret, devine printr-o schimbare esenţială de paradigmă un număr învăluit de mister, abstract şi a priori necunoscut. Un număr este revelat doar prin prisma unor deducţii logice, ca soluţie a unor ecuaţii. Astfel 7 este singurul număr ce verifică:

$$x^2 - 14x + 49 = 0$$

Diophantus era interesat de soluţiile întregi ale ecuaţiilor. Însă multe ecuaţii simple nu posedă nici o soluţie întreagă, de exemplu:

$$x^2 = 2$$

căci $\sqrt{2}$ nu este nici măcar raţional.

N. H. Abel (1802-1829) a considerat mulţimea soluţiilor tuturor ecuaţiilor algebrice (polinomiale) avînd coeficienţi raţionali şi a numit-o mulţimea numerelor algebrice, uzual notată $\overline{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{C}$.

Nu numai $\sqrt{2}$ este un număr algebric, ci orice combinaţie de radicali de orice ordin, cum ar fi:

$$\sqrt[3]{7 + 13\sqrt[5]{5} - 2\sqrt{3}\ \sqrt[67]{19}} + \sqrt[100]{12 + 23\ \sqrt[17]{51} - 12\sqrt[3]{6}} \in \overline{\mathbb{Q}}$$

Pentru a rezolva ecuaţiile de gradul 2, precum:

$$x^2 + ax + b = 0$$

avem o formulă explicită prin radicali, obtinută de S.Stevin (1548-1620) şi R. Descartes (1596-1650) în cazul general:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Formule asemănătoare există şi pentru ecuaţiile de gradul 3 sau 4.

Însă rezultatele fundamentale ale lui E. Galois (1811-1832) et N. H. Abel (1802-1829) arată că nu pot exista formule generale pentru rezolvarea prin radicali ale tuturor ecuaţiilor de gradul 5 sau mai mare. În particular, numerele formate cu ajutorul radicalilor, adunării, înmulţirii şi împărţirii pornind de la numere raţionale nu sunt suficiente pentru a completa multimea $\overline{\mathbb{Q}}$ a numerelor algebrice.

4. Ecuaţii si geometrie

Înainte de a afla dacă o ecuaţie are soluţii întregi, putem analiza soluţiile în numere complexe $\mathbb{C}$ sau reale $\mathbb{R}$. Această abordare ne reîntoarce la geometrie. Submulţimile unui spaţiu Euclidian determinate de un sistem de ecuaţii algebrice au fost intens studiate în cadrul geometriei analitice între sec XVI şi XIX.

Teorema fundamentală a algebrei spune că orice ecuaţie polinomială de gradul n cu coeficienţi în $\mathbb{C}$ are n soluţii în $\mathbb{C}$. Prima demonstraţie riguroasă a fost dată de un matematician amator, J.-R. Argand (1768-1822). Urmează că un sistem de k ecuaţii algebrice în n necunoscute determină o mulţime de soluţii de dimensiune cel putin $(n-k)$ în numere complexe. Aşadar unui sistem de ecuaţii algebrice vom asocia mulţimea soluţiilor peste $\mathbb{C}$, ce se vor numi varietăţi algebrice.

Să considerăm varietatea algebrică formată din punctele $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ ce verifică ecuaţia:

$$x^5 + y^5 = 1$$

Pentru a vizualiza varietatea obţinută în $\mathbb{C}^2$ trebuie să identificăm $\mathbb{C}$ cu un plan real $\mathbb{R}^2$ cu ajutorul unui sistem de coordonate. Acesta asociază fiecărui număr complex $x \in \mathbb{C}$, de forma $x = a + ib$, perechea $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ formată din partea reală a şi partea imaginară b. Aşadar $\mathbb{C}^2$ poate fi identificat cu un spaţiu Euclidian real 4-dimensional $\mathbb{R}^4$.

Ecuaţia $x^5 + y^5 = 1$ peste corpul numerelor complexe corespunde la două ecuaţii reale, mai precis partea reală, respectiv imaginară a numarului complex $x^n + y^n$ este egală cu partea reală si respectiv imaginară a lui 1, adică:

$$Re(x^5 + y^5) = 1, Im(x^5 + y^5) = 0$$

Să scriem $x = a + ib$, $y = c + id$, unde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$; atunci

$$x^5 = (a^5 + 5ab^4 - 10a^3b^2) + (5a^4b + b^5 - 10a^2b^3)i,$$

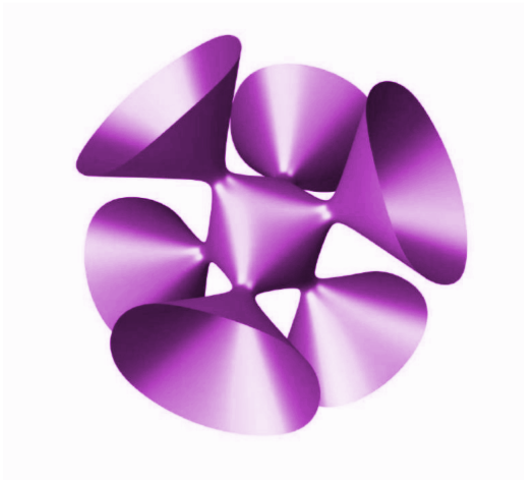
$$y^5 = (c^5 + 5cd^4 - 10c^3d^2) + (5c^4d + d^5 - 10c^2d^3)i,$$

astfel încît varietatea în $\mathbb{R}^4$ este descrisă de sistemul:

$$a^5 + 5ab^4 - 10a^3b^2 + c^5 + 5cd^4 - 10c^3d^2 = 1$$

$$5a^4b + b^5 - 10a^2b^3 + 5c^4d + d^5 - 10c^2d^3 = 0$$

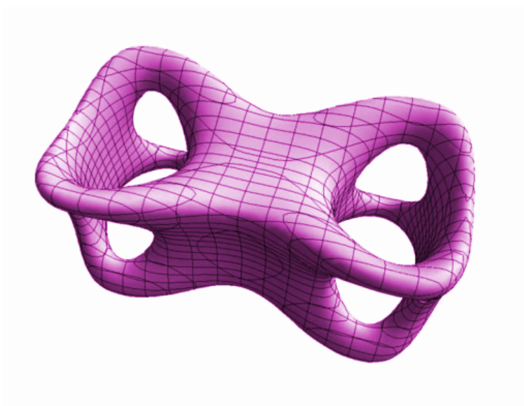
Cum avem doua ecuaţii în 4 necunoscute putem sa ne gîndim că mulţimea soluţiilor formează o *suprafaţă* în $\mathbb{R}^4$. Daca vrem să o reprezentăm printr-un desen, aceasta ar fi foarte asemănătoare cu desenul de mai jos, avînd 7 pînze sub formă de pîlnie ce pleacă spre infinit:



Observăm ca această varietate nu este compactă doarece conţine puncte din ce în ce mai depărtate de origine. Pentru a o compactifica, se omogenizează ecuaţia:

$$x^5 + y^5 = z^5$$

şi se consideră mulţimea soluţiilor în spaţiul proiectiv $\mathbb{P}^2$. Acum ecuaţia omogena defineşte o suprafaţă compactă, numită curbă complexă (algebrică) pentru a pune în evidenţă faptul că dimensiunea sa complexă este 1. Intersecţia acestei suprafeţe cu planul complex $\mathbb{C}^2 \subset \mathbb{P}^2$ este exact suprafaţa necompactă de dinainte, şi se reprezintă grafic astfel:



5. Despre formă sau topologia suprafeţelor

Termenul "topologie" apare pentru prima dată într-o scrisoare din anul 1834 a lui J.B.Listing (1808-1892) sintetizînd unele idei sugerate de marele matematician C.F.Gauss (1777-1855) astfel: "Topologia este teoria matematică ce studiază acele proprietăţi calitative ale obiectelor ce sunt independente de măsură şi cantitate". Cu alte cuvinte, topologia analizează formele obiectelor.

Prima teoremă cu caracter topologic fusese demonstrată de L.Euler (1707-1782) cu un secol înainte. Este un rezultat de o profunzime rară şi de o simplitate deconcertantă:

Dacă din numarul vîrfurilor unui poliedru convex scădem numărul muchiilor şi apoi adunăm numarul feţelor atunci, independent de poliedrul considerat (cub, tetraedru, icosaedru, ş.a.m.d.), obţinem întotdeauna numărul 2.

Pentru alte poliedre suma aceasta alternantă este diferită de 2, si se numeşte *caracteristica Euler*, notată χ a poliedrului.

H.Poincaré (1854-1912), unul din geniile timpurilor moderne, este considerat ultimul universalist printre matematicieni. Contribuţiile sale acoperă numeroase ramuri ale matematicii, mecanicii celeste, mecanicii fluidelor şi teoriei relativităţii. Cartea sa "Analysis situs", apărută în 1895, conţine prima tratare sistematică a topologiei. Majoritatea ideilor şi tehnicilor utilizate mai tîrziu îşi au originea în articolele sale de fundamentare a topologiei algebrice, publicate în anii 1890.

Spunem că două spaţii topologice sunt *homeomorfe* dacă pot fi deformate unul în celălalt în mod continuu, fără a utiliza tăieturi, lipituri sau transformări care să le altereze conţinutul. Prin urmare sunt homeomorfe mingea de fotbal perfect sferică cu o minge pe jumătate dezumflată, cît şi cu suprafaţa unui cub, dar nu cu un colac.

Obiectele fundamentale în cadrul topologiei geometrice sunt varietaţile topologice, adică spaţiile pentru care orice punct al său situat în interior are o vecinătate homeomorfă cu $\mathbb{R}^k$, iar k se numeşte dimensiunea sa.

Poincaré a remarcat că formula lui Euler se poate generaliza la poliedre ce sunt varietăţi topologice, pentru că două poliedre homeomorfe au aceeaşi caracteristică Euler χ. Putem atunci defini *genul*, unei suprafeţe orientabile închise ca fiind

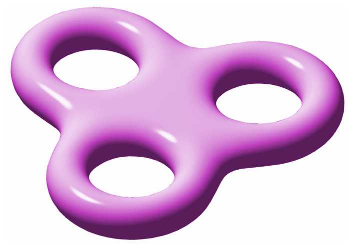
$$g = 1 - \frac{\chi}{2}$$

Suprafaţele sunt varietăţile topologice de dimensiune $k = 2$. Să vedem cîteva exemple:

(1) Sfera are genul zero, conform formulei lui Euler;
(2) Torul, sau suprafaţa unui colac, are genul 1:

(3) O suprafaţă de gen 2:

(4) O suprafaţă de gen 3:



Şi putem continua în acelaşi mod pentru a obţine suprafeţe de gen g, pentru orice număr natural g.

T.Radó (1895-1965) prezintă prima demonstraţie completă în 1925 a faptului că două suprafeţe orientabile închise sunt homeomorfe dacă şi numai dacă au acelaşi gen. Aceasta este o consecinţă a triangulabilităţii suprafeţelor, adica a faptului că orice suprafaţă se obţine dintr-un număr finit de triunghiuri prin lipirea lor de-a lungul muchiilor.

Aşadar, din punct de vedere topologic, forma unei suprafeţe compacte este complet determinată de un singur număr, genul, ce poate lua toate valorile naturale.

Dacă considerăm acum ecuaţia omogenă de grad superior:

$$x^n + y^n = z^n$$

unde $n \geq 3$ este un număr natural, aşa cum apare în conjectura lui Fermat, vom obţine o curbă complexă (deci o suprafaţă reală) ireductibilă netedă în $\mathbb{P}^2$, al cărui gen g este dat de formula:

$$g = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

6. Formele controlează numerele

O parte importantă din rezultatele asupra ecuaţiilor diofantice este punerea în evidenţă a unor legături strînse între numărul şi organizarea soluţiilor în numere raţionale ale acestora şi forma varietăţilor asociate. O problemă fundamentală în aritmetică cere să se arate că soluţiile în numere raţionale ale unui sistem de ecuaţii algebrice depind în mod esenţial doar de topologia varietăţii ce îi este ataşată.

În cazul în care acest sistem determină o curbă algebrică (netedă) complexă, deci o suprafată reală, L. Mordell (1888-1962) a emis ipoteza următoare:

Dacă suprafaţa asociată unui sistem de ecuaţii are genul cel puţin egal cu 2, atunci nu există decît un număr finit de soluţii raţionale. Dacă genul este zero, atunci odată ce există o soluţie raţională, există o infinitate.

Conjectura lui Mordell a fost demonstrată de către G. Faltings (n. 1954) în 1983.

Din ce am văzut mai sus, ecuaţia

$$x^n + y^n = z^n$$

are asociată o suprafaţă de genul $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$. Deci pentru $n > 3$ ecuaţia lui Fermat nu poate avea decît un număr finit de soluţii întregi.

Descrierea completă în cazul cînd genul este 1 şi suprafaţa este un tor (o curbă eliptică) este subiectul unei conjecturi a lui B. Birch (n. 1931) şi P. Swinnerton-Dyer (1927-2018).

În anul 2000, nou înfiinţatul institut Clay, una dintre cele mai prestigioase instituţii americane de matematică, a lansat un apel personalităţilor ce au marcat ultimii cincizeci de ani ai acestei ştiinţe. Era vorba de alegerea celor mai importante şapte probleme rămase nerezolvate pînă acum, ce se vor a fi atît motiv de inspiraţie, cît şi deschizătoare de noi direcţii şi perspective. Pentru a-şi dovedi implicarea şi a răsplăti eforturile celor ce s-ar încumeta în atacarea unor întrebări ce au surescitat deja generaţii de cercetători, institutul oferă un milion de dolari pentru soluţia fiecărei probleme. Conjectura Birch-Swinnerton-Dyer figurează printre cele 7 probleme alese, şi este în continuare nerezolvată.

7. Topologia geometrică în dimensiuni mai mari decît 2

O parte importantă din topologia geometrică a fost impulsionată de Conjectura lui Poincaré care cere să se arate că nu există alte varietăţi topologice avînd tipul de omotopie al sferei înafara sferei. Tipul de omotopie al sferei corespunde cu anularea grupului fundamental şi a tuturor grupurilor de omologie în codimensiune pozitivă.

În 1956 J.Milnor (n.1936) inventează sferele exotice în dimensiune 7, care sunt homeomorfe dar nu difeomorfe. În 1960, după meditaţii fructuoase pe plajele din Rio, S.Smale (n.1930) face o descoperire surprinzătoare, ce va aduce cu sine o avalanşă de rezultate. Ideea este incredibil de simplă deşi poate părea paradoxală: este mult mai simplu de a lucra, clasifica şi înţelege varietăţile de dimensiuni mai mari decît 5 în raport cu cele de dimensiuni mici, în speţă 3 sau 4. În particular tehnicile sale îi permit rezolvarea conjecturii Poincaré în toate dimensiunile de la 5 în sus. Concluzia plutea de cîţiva ani în aer, nu lipsea decît această observaţie simplă dar genială, saltul la dimensiunea 5. Ca dovadă, imediat după anunţul lui Smale, fără sa aibă nevoie de detalii, J.Stallings (1935-2008) şi E.C.Zeeman (1925-2016) oferă o cu totul altă demonstraţie.

Dimensiunea 4 trebuie să mai aştepte încă 20 de ani. În 1982 M.Freedman (n.1951) publică o soluţie complicată şi subtilă, deosebit de tehnică şi dificilă. Aceasta este un adevărat "tour de force" ce utilizează rezultatele şcolii de topologie de tradiţie americană, începînd cu anii '30.

Anii '80 aduc în prim plan noua viziune a lui W.Thurston (1946-2012) asupra dimensiunii 3, în care lumea neeuclidiană joacă un rol esenţial. Este vorba de un program menit să dea o structură geometrică canonică fiecărei varietăţi de dimensiune 3. Geometria hiperbolică, sau neeuclidiană, ar fi cea mai prezentă. Mai degrabă complementar conjecturii Poincaré, acest program a fost partea cea mai activă a cercetării din ultimii douăzeci de ani ai sec XX în topologie. Conjectura lui Thurston, şi deci conjectura lui Poincaré în dimensiune 3, a fost rezolvată de G. Perelman în 2003, folosind metode analitice, şi anume deformările metricii date de fluxul Ricci.

Astăzi problema majoră în domeniul topologiei este dacă orice varietate topologică homeomorfă cu sfera de dimensiune 4 este şi difeomorfă. Aceasta este o consecinţă a conjecturii Schoenflies care spune că orice sferă de dimensiune 3 scufundată într-o sferă de dimensiune 4 o divide în două varietăţi cu bord difeomorfe cu bila de dimensiune 4.

8. Pot numerele descrie formele?

Un invariant topologic denotă o procedură matematică ce asociază fiecarui obiect dintr-o categorie fixată, de exemplu varietaţi compacte de dimensiune d, un număr, în aşa fel încît două obiecte echivalente printr-un homeomorphism să aibă asociat acelaşi număr. Primele exemple de invarianţi numerici, numerele Betti, au apărut odată cu fundamentarea topologiei. Aceştia nu depind decît de tipul de omotopie al spaţiilor considerate şi pot fi definiţi pentru spaţii topologice mult mai generale decît varietăţile, de exemplu pentru complexe simpliciale finite arbitrare. Relaţii de echivalenţă mai fine, precum cele induse de diffeomorfisme (netede, analitice etc) au fost considerate de-a lungul timpului, de exemplu în analiza sferelor exotice (homeomorfe între ele însa ne-diffeomorfe).

Pentru a descrie suprafeţele compacte orientabile este suficient să folosim un singur invariant numeric, genul suprafeţei, care coincide cu jumătatea primului numar Betti al suprafeţei. Acest invariant este complet, adică determină suprafaţa în mod unic, pîna la un homeomorphism.

Ce se intimplă însa în dimensiunea 4 sau mai mare? Răspunsul indirect este obţinut prin intermediul noţiunii de group (ne-abelian). Ştim că pentru orice grup cu un numar finit de generatori şi de relaţii există o varietate compactă avîndu-l ca grup fundamental. Pe de altă parte un rezultat celebru datorat lui P.S. Novikov (1901-1975), W. Boone (1920-1983)şi J.L. Britton (1927-1994) arată că există grupuri de prezentare finită a căror problemă a cuvîntului este nerezolvabilă algoritmic. Ca o consecinţă, nu există algoritmi pentru a decide dacă o varietate compactă este o sferă, în dimensiune 4 sau mai mare.

S.I. Adian (1931-2020) şi M.H. Rabin (n. 1931) au demonstrat că nu există nici un algoritm ce ar permite să decidem că două prezentări finite reprezintă acelaşi grup sau să decidem că o prezentare dată este de fapt prezentarea grupului trivial cu un singur element, sau un grup finit, şamd. În felul acesta se arată că nu există nici un algoritm finit care să decidă dacă două varietăţi compacte de dimensiune 4 (sau mai mare) sunt homeomorfe, sau să decidă dacă grupul fundamental este trivial sau nu. Aşadar problema descrierii unei varietăţi arbitrare cu ajutorul unor invarianţi numerici devine insolubilă, dacă ne restrîngem la acei invarianţi pentru care există un algoritm finit ce permite să-i calculăm.

Această restricţie nu este anodină. Într-adevăr putem considera un invariant de o cu totul altă natură, precum urmează. Categoria $\varphi(M)$ este numărul minim de puncte critice ale unei funcţii netede

$$f : M \to \mathbb{R}$$

definită pe o varietate diferenţiabila compactă M fără bord. Este cunoscut că există multe funcţii netede pe o varietate M, mai precis acestea formează o algebră comutativă de dimensiune infinită. Orice astfel de funcţie poate fi perturbată astfel încît să devină Morse şi deci să aibă doar un număr finit de puncte critice. Prin urmare categoria $\varphi(M)$ este un număr bine definit. O teoremă a lui G. Reeb ne arată că orice varietate compactă fără bord M cu proprietatea că $\varphi(M) = 2$ este de fapt homeomorfă cu sfera de aceeaşi dimensiune, deci un singur număr permite să recunoastem sfera printre toate varietăţile compacte. Bineînţeles că problema calculării acestui invariant nu este algoritmică. Astfel de invarianţi au fost studiaţi recent în colaborare cu D. Andrica şi C.Pintea de la Universitatea Babeş-Bolyai.

Dimensiunea 3 este însa un caz aparte. C. Papakyriakopoulos (1914-1976) în anii 1950 a arătat că nodul trivial este singurul nod al cărui grup fundamental este izomorf cu grupul numerelor întregi $\mathbb{Z}$. Cunoaştem deja că există algoritmi care să recunoască sfera de dimensiune 3 (J. Rubinstein, A. Thompson, S. Matveev). Este atunci plauzibil să existe invarianţi care să permită să distingem între varietăţi de dimensiune 3.

Interpretările geometrice ale teoriei cuantice a cîmpurilor au condus E. Witten la descrierea unei noi familii de invarianţi topologici numerici ai varietăţilor de dimensiune 3. Construcţia matematic riguroasă, este datorată lui N. Reshetikhin, V.Turaev şi O. Viro şi are ca punct de plecare structuri algebrice relativ complicate ce se numesc categorii modulare. Exemple explicite au apărut în cadrul teoriei grupurilor cuantice (V. Drinfeld, M. Jimbo, G. Lusztig).

Întrebarea naturală care se pune în acest context este dacă toţi aceşti invarianţi cuantici împreună descriu complet varietăţile de dimensiune 3. Progresele recente în clasificarea varietăţilor de dimensiune 3 fac ca problema să fie scindată în mai multe cazuri, în funcţie de geometria subiacentă.

În 2013 s-a demonstrat că forma sau topologia unei varietăţi nu este unic determinată de invarianţii cuantici, ceea ce este surprinzător; mai mult numărul de varietăţi ce pot avea aceaşi invarianţi poate fi oricît de mare, dar finit în cazul varietăţilor Seifert. Cazul generic al varietăţilor hiperbolice este în continuare nerezolvat.

Ne putem pune probleme similare pentru cazul în care considerăm varietăţi de dimensiune 4 care sunt complexe sau algebrice.

Institut Fourier BP74, UMR 5582 CNRS, Laboratoire de Mathématiques, Université Grenoble Alpes, CS 40700, 38058 Grenoble cedex 9, France

Email address: `louis.funar@univ-grenoble-alpes.fr`