XXIII. NEMZETKÖZI MAGYAR MATEMATIKAVERSENY

Feladatok és megoldások

STÁTUS KIADÓ
CSÍKSZEREDA, 2014

Borítóterv: Ráduly Margit

Műszaki szerkesztés: András Szilárd, Lukács Andor, Zsombori Gabriella
A szervezőbizottság részéről a kiadványért felel: Tamási Csaba

Kiadja a Státus Könyvkiadó
Felelős kiadó Birtók József igazgató

ISBN: 978-978-606-661-006-3

Készült a Tipographic Nyomdában
http://www.tipographic.ro

Olimpiada de Matematică pentru Liceele Maghiare din Europa,
ediţia XXIII (lb. magh.)

Editura Status, Miercurea-Ciuc

Tartalomjegyzék

Talán senki sem fogta meg olyan hatásosan a matematika szerepét a természettudományokban, mint Wigner Jenő egy 1960-ban írott cikkének címében: „A matematika ésszerűtlen hatékonysága a természettudományokban”. Valóban, matematika nélkül nehéz lenne elképzelni a természettudományokat, mint a fizika vagy a hálózatelmélet. Bár újfent rácsodálkozunk a matematika ésszerűtlen sikerére a tudomány és a technika különböző ágaiban, ahhoz, hogy ezt a csodát fenn tudjuk tartani, friss elmékre van szükség. Nagyon örvendek, hogy a nagyhírű magyar matematikai iskola utódjai épp otthonomban, Csíkszeredában mérik össze tudásukat 2014-ben! Ne álljatok meg itt, legyen ez a székelyföldi verseny egy lépcső számotokra, amin keresztül a nagyhírű magyar matematikusoknak és fizikusoknak méltó utódjaivá válhattok.

Barabási Albert László
a XXIII. NMMV fővédnöke

Előszó

A Nemzetközi Magyar Matematikaverseny célrendszere a kezdetektől fogva igen sokrétű volt: szakmai megmérettetés a Kárpát-medencében magyarul tanuló középiskolás diákok számára, tapasztalatcsere matematikatanároknak, a több ország határain átívelő magyar kultúra alaposabb megismerése, ápolása, a magyarságtudat erősítése, az utánpótlás kinevelése úgy a kutatás, mint a tanári pálya tekintetében. Az elmúlt 23 év alatt e célok mögött rejlő problémák sok tekintetben átalakultak, a súlypontok áthelyeződtek, a célok elérésére több más lehetőség is kialakult. Ma a legtöbb korábbi problémára van hatékony megoldás, ugyanakkor egyre több olyan problémával szembesülünk az oktatásban, ami korábban egyáltalán nem jelentett gondot. Ezelőtt 20 évvel Kolozsváron a Babeş-Bolyai Tudományegyetem Matematika és Informatika Karán közel 60 végzős hallgató volt a matematika szakon, tavaly 6. Ez a jelenség máshol is érezhető, a BBTE helyzete azért kiemelten fontos, mert Romániában csak itt zajlik magyar nyelvű tanárképzés matematikából. Másrészt a romániai matematikatanárok életkorának átlaga nagyobb, mint 50 év, így néhány éven belül igen komoly hiányra számíthatunk a matematikatanári pályán. Ugyanez a jelenség érezhető a Kárpát-medence más régióiban is. Mindezt csak tetézi az oktatási rendszerekben végbemenő, a minőségbiztosítás jelszavával cégjelzett átalakítás, amely az egyén, a független, alkotóképes és felelősségteljes szakember szintjére lebontva paradoxális helyzeteket eredményez. Ez azért különösen súlyos, mert a didaktikai kutatások egyértelműen azt támasztják alá, hogy a hiteles, jól képzett, független szakemberként működő tanár a hatékony oktatás kulcsa. A rendszer nem a szabályok által válik jobbá, hanem a benne tevékenykedő szakemberek által. Az NMMV történetére visszatekintve azt látjuk, hogy több régióban is sikerült fontos utánpótlást biztosítani, úgy a tanári pályára, mint a kutatási területekre.

Ezzel párhuzamosan sikerült elérni azt, hogy a versenyt Romániában a tanügyminisztérium támogatja, a díjazottak és a felkészítő tanáraik külön jutalmat és bizonyos tekintetben előjogokat élvezhetnek a rendszeren belül. Ezt a gyakorlatot érdemes lenne kiterjeszteni a többi régióra is, sőt az országok közti átjárhatóságot is biztosítani. Ennek érdekében a szakmai színvonal további fokozására lenne szükség, az előválogatás átláthatóságára minden régióban, természetesen anélkül, hogy a létező, működőképes, szakmailag indokolt viszonyrendszert felülírnánk.

A verseny folytonosságának biztosítása mellett érdemes lenne a diákokkal rendszeresen dolgozó tanárok támogatását is megoldani, arányaiban legalább kétszer annyi támogatást fordítani a folyamatos készülés segítésére, mint a rendezvényekre. Ebben a tekintetben a Magyarországon elindult tehetségtámogató rendszert lenne érdemes kiterjeszteni a többi régióra is, természetesen a pályázati rendszer szigorúan szakmai ellenőrzöttsége mellett.

Bízom abban, hogy a továbbiakban is sikerül majd az aktuális problémákat megoldani, a nehézségeken felülkerekedni, a kihívásokra érdemben válaszolni. Ezáltal az NMMV továbbra is fontos szerepet tölthet be a középiskolai matematikai életben. Mindehhez természetesen a diákok kitartó munkája is szükséges, hisz ne feledjük, hogy a versenyt elsősorban a diákokért szervezzük és mindez értelmét vesztené a diákok által befektetett munka nélkül. Mindeddig azt tapasztaltam, hogy az itt résztvevő diákok zöme komolyan készül a versenyre is és azon túlmenően is foglalkozik matematikával. Éppen ezért mindenkinek jó versenyzést, minőségi időtöltést és további sikereket kívánok.

András Szilárd, Kolozsvár

9. osztály

1. Feladat. Egy könyvtárban megszámozták az összes könyvet. A számozáshoz 1-től kezdődően egymást követő természetes számokat használtak, és ugyanazt a számot nem írták rá két könyvre. A megszámozás során a könyvekre háromszor annyi számjegyet kellett ráírni, mint ahány könyv volt a könyvtárban. Hány könyv volt a könyvtárban?

Oláh György, Révkomárom

2. Feladat. Határozd meg az $(a+b)(b+c)(c+a) = 1144$ egyenlet összes nullától különböző természetes megoldását!

dr. Hraskó András, Budapest

3. Feladat. Az $ABCD$ konvex négyszögben $AB = 1$, $BC = 2$, $AD = \sqrt{2}$, $\widehat{A} = 105°$ és $\widehat{B} = 60°$. Számítsd ki a CD oldal hosszát!

Kovács Lajos, Székelyudvarhely
dr. András Szilárd, Kolozsvár

4. Feladat. Hány valós megoldása van a $3\,[x] = 2x^2 + x - 4$ egyenletnek? ($[x]$ az x valós szám egészrészét jelenti.)

Szabó Magda, Szabadka
Longáver Lajos, Nagybánya

5. Feladat. Egy számítógép segítségével kinyomtatták a 2^{2014} és az 5^{2014} hatványok értékét tízes számrendszerben. Összesen hány számjegyet nyomtattak? (Pl. a 11231 szám kinyomtatásánál 5 számjegyet nyomtatnának.)

dr. Katz Sándor, Bonyhád

6. Feladat. a) Határozd meg a síknak egységoldalú szabályos háromszögekkel és egységoldalú szabályos hatszögekkel való összes szabályos lefödését! Egy lefödés azt jelenti, hogy a sokszögek hézag és átfödés nélkül (egyrétűen) lefödik a síkot. A lefödés szabályos, ha léteznek olyan a és b nullától különböző természetes számok, amelyekre minden keletkező csúcs körül pontosan a darab háromszög és b darab hatszög van, valamilyen rögzített sorrendben.

b) Bizonyítsd be, hogy van olyan, nem feltétlenül szabályos lefödés is (az előbbi háromszögekkel és hatszögekkel), amelyben létezik végtelen sok, páronként különböző mintázat, amely véges sokszor jelenik meg! (Mintázat alatt a lefödés véges sok sokszöge által meghatározott összefüggő alakzatot értünk.)

Zsombori Gabriella, Csíkszereda
dr. András Szilárd, dr. Lukács Andor, Kolozsvár

10. osztály

1. Feladat. Oldd meg a prímszámok halmazán a

$$3x^2 - y^2 = 22y - 12x$$

egyenletet!

Olosz Ferenc, Szatmárnémeti

2. Feladat. Négy Tudós Matematikus egy egyenlő szárú trapéz alakú birtokon él, házaik a trapéz csúcsaira épültek. A trapéz hosszabb alapjának hossza a, az alapon fekvő szögek nagysága 50°, az átlók által bezárt szög pedig 76°. A Tudósok szeretik a szabályos dolgokat, így elhatározták, hogy olyan kutat építenek, amely mindannyiuk házától ugyanolyan távolságra helyezkedik el. Milyen távolságra kell építeniük házaiktól a kutat? Vajon a kút a birtokukon lesz-e?

dr. Péics Hajnalka, Szabadka

3. Feladat. Oldd meg a pozitív valós számok halmazán a

$$2^{4x+1} + 2^{\frac{1}{2x^2}} = 12$$

egyenletet!

Koczinger Éva és Kovács Béla, Szatmárnémeti

4. Feladat. Adott az ABC háromszög, amelyben feltételezzük, hogy $AB < BC < AC$. A BC oldalon felvesszük a B' pontot úgy, hogy $CB' = AB$. Hasonlóan felvesszük az AC oldalon az A' és a C' pontot úgy, hogy $CA' = AB$ és $AC' = BC$. Jelöljük az AA', BB', illetve CC' szakaszok felezőpontját rendre D-vel, E-vel és F-fel. Bizonyítsd be, hogy ha A_1 a BC szakasz, B_1 az AC szakasz és C_1 az AB szakasz felezőpontja, valamint $\{G\} = A_1D \cap AB$, $\{H\} = B_1E \cap AB$ és $\{I\} = C_1F \cap BC$, akkor:

a) $BI = GH$;

b) az A_1D, C_1F és B_1E egyeneseknek van közös pontja;

c) ha J az ABC háromszögbe, K az $A_1B_1C_1$ háromszögbe írt kör középpontja, L pedig az ABC háromszög súlypontja, akkor a J, K és L pontok egy egyenesen helyezkednek el és $JL = 2KL$.

Pálhegyi Farkas László, Nagyvárad

5. Feladat. Bizonyítsd be, hogy az összes $\frac{1}{m \cdot n}$ alakú szám összege nem egész szám, ahol $1 \leq m < n \leq 2014$, illetve m és n természetes számok.

dr. Kántor Sándor, Debrecen

6. Feladat. a) Határozd meg a síknak egységoldalú szabályos hatszögekkel, egységoldalú négyzetekkel és egységoldalú szabályos tizenkétszögekkel való összes szabályos lefödését! Egy lefödés azt jelenti, hogy a sokszögek hézag és átfödés nélkül (egyrétűen) lefödik a síkot. A lefödés szabályos, ha léteznek olyan a, b, c nullától különböző természetes számok, amelyekre minden keletkező csúcs körül pontosan a darab hatszög, b darab négyzet és c darab tizenkétszög van, valamilyen rögzített sorrendben.

b) Bizonyítsd be, hogy az előbbi hatszögekkel, négyzetekkel, tizenkétszögekkel, valamint egységoldalú szabályos háromszögekkel létre lehet hozni olyan, nem feltétlenül szabályos lefödést, amelyben mind a négy típusú alakzatot végtelen sokszor használjuk, és amelyben létezik végtelen sok páronként különböző mintázat, amely véges sokszor jelenik meg! (Mintázat alatt a lefödés véges sok sokszöge által meghatározott összefüggő alakzatot értünk.)

Zsombori Gabriella, Csíkszereda
dr. András Szilárd, dr. Lukács Andor, Kolozsvár

11. osztály

1. Feladat. Milyen szabály szerint írtuk le a

$$2, 10, 16, 32, 42, 66, 80, 112, 130, 170$$

számokat? Ezt a szabályt folytatva, add meg a

$$2, 10, 16, 32, 42, 66, 80, 112, 130, 170, \ldots$$

sorozat általános tagjának a képletét!

dr. Kántor Sándorné, Debrecen

2. Feladat. Oldd meg az $x^{\log_3 64} = x^2 \cdot 8^{\log_3 x} - x^{\log_3 8}$ egyenletet a valós számok halmazán!

Balázsi Borbála, Beregszász

3. Feladat. Legfeljebb hány elemet tartalmazhat a

$$H = \{1, 2, 3, \ldots, 25\}$$

halmaznak az a részhalmaza, amelyben bármely két szám szorzata nem négyzetszám? Adj meg egy ilyen részhalmazt!

Bíró Béla, Sepsiszentgyörgy

4. Feladat. Az e és f egyenesek párhuzamosak és egymástól egységnyi távolságra vannak. Vedd fel az e egyenesen az A_1, A_2, A_3, $\ldots, A_n, A_{n+1}$ pontokat és az f egyenesen a $B_1, B_2, \ldots, B_n$, B_{n+1} pontokat úgy, hogy mindkét egyenesen bármely két szomszédos pont távolsága egységnyi, és minden $i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq n+1$ számra az A_iB_i szakasz merőleges az e és f egyenesekre. Kösd össze az A_1 pontot a B_n és B_{n+1} pontokkal. Az összekötő szakaszok az A_2B_2 szakaszt rendre a P és Q pontokban metszik.

a) Van-e olyan pozitív egész n szám, amelyre az A_1PQ háromszög területe $\frac{1}{1802}$ területegység?

b) Van-e olyan pozitív egész n szám, amelyre az A_1PQ háromszög területe $\frac{1}{1860}$ területegység?

Bíró Bálint, Eger

5. Feladat. Egy szabályos kilencszögben meghúztuk az összes átlót. Van-e a kilencszög belsejében olyan pont, amelyre legalább három átló illeszkedik?

Zsombori Gabriella, Csíkszereda
dr. András Szilárd, Kolozsvár

6. Feladat. a) Határozd meg a síknak egységoldalú szabályos háromszögekkel, egységoldalú négyzetekkel és egységoldalú szabályos hatszögekkel való összes szabályos lefödését! Egy lefödés azt jelenti, hogy a sokszögek hézag és átfödés nélkül (egyrétűen) lefödik a síkot. A lefödés szabályos, ha léteznek olyan a, b és c nullától különböző természetes számok, amelyekre minden keletkező csúcs körül pontosan a darab háromszög, b darab négyzet és c darab hatszög van, valamilyen rögzített sorrendben.

b) Bizonyítsd be, hogy létezik végtelen sok olyan, nem feltétlenül szabályos lefödés, amelyhez hozzárendelhető valamilyen a, b és c nullától különböző természetes szám úgy, hogy minden keletkező csúcs körül pontosan a darab háromszög, b darab négyzet és c darab hatszög legyen!

Zsombori Gabriella, Csíkszereda
dr. András Szilárd, dr. Lukács Andor, Kolozsvár

12. osztály

1. Feladat. Az ABC háromszögben $\widehat{ACB} = 60°$ és $AC \leq BC$. Legyen D az AC oldal egy belső pontja. Vedd fel az E pontot a BC oldal belsejében úgy, hogy $AD = BE$ teljesüljön. A DE szakasz fölé rajzold meg a DEF szabályos háromszöget úgy, hogy DEF és ABC azonos körüljárásúak legyenek. Bizonyítsd be, hogy az F pont illeszkedik az ABC háromszög köré írt körre!

Nemecskó István, Budapest

2. Feladat. Az $ABCDEFGH$ kocka élének a hossza 1 cm. Egy hangya az A csúcsból indulva egy 2014 cm hosszúságú utat jár be úgy, hogy csak az éleken közlekedik (egy élen végig mehet többször is). Melyik útból van több: amelyik az A csúcsban, vagy amelyik a C csúcsban végződik?

Kekeňák Szilvia, Kassa

3. Feladat. Adottak az $a, b, c \in \{0, 1, 2, ..., 9\}$ számjegyek úgy, hogy az $\overline{abc}$ háromjegyű szám prímszám. Bizonyítsd be, hogy az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenletnek nincsenek racionális gyökei!

dr. Bencze Mihály, Bukarest

4. Feladat. Az $\dfrac{1}{2014! \cdot 2015!}$ racionális szám tizedes tört alakja

$$0, a_1 a_2 \dots a_n (b_1 b_2 \dots b_k),$$

ahol $(b_1 b_2 \dots b_k)$ az ismétlődő szakasz és az n, illetve k értéke a lehető legkisebb. Mennyi az n értéke?

dr. Gecse Frigyes, Kisvárda

5. Feladat. Adott a p prímszám és a darab számozott doboz, ahol $a \geq 2$. Felírtuk p darab golyóra a számokat 1-től p-ig és a golyókat valahogyan elhelyeztük a dobozokban. Számold meg, hogy hány különböző elhelyezésre lesz az első dobozban található golyókon szereplő számok összege osztható p-vel! (Egy üres dobozban a golyókon szereplő számok összege egyezményesen 0.)

dr. András Szilárd, dr. Lukács Andor, Kolozsvár

6. Feladat. a) Határozd meg a síknak egységoldalú szabályos háromszögekkel és egységoldalú négyzetekkel való összes szabályos lefödését! Egy lefödés azt jelenti, hogy a sokszögek hézag és átfödés nélkül (egyrétűen) lefödik a síkot. A lefödés szabályos, ha léteznek olyan a, b nullától különböző természetes számok, amelyekre minden keletkező csúcs körül pontosan a darab háromszög és b darab négyzet van, valamilyen rögzített sorrendben.

b) Bizonyítsd be, hogy létezik végtelen sok, páronként különböző, nem feltétlenül szabályos lefödés (az előbbi háromszögekkel és négyzetekkel), amelyekhez hozzárendelhetők az a, b nullától különböző természetes számok úgy, hogy minden keletkező csúcs körül pontosan a darab háromszög és b darab négyzet legyen, de ezeknek a sokszögeknek a sorrendje ne legyen minden csúcspontban ugyanolyan.

Zsombori Gabriella, Csíkszereda
dr. András Szilárd, dr. Lukács Andor, Kolozsvár

Megoldások

9. osztály

1. Feladat. Egy könyvtárban megszámozták az összes könyvet. A számozáshoz 1-től kezdődően egymást követő természetes számokat használtak, és ugyanazt a számot nem írták rá két könyvre. A megszámozás során a könyvekre háromszor annyi számjegyet kellett ráírni, mint ahány könyv volt a könyvtárban. Hány könyv volt a könyvtárban?

Oláh György, Révkomárom

Első megoldás. Legyen a keresett kötetek száma x. Ez a szám nem lehet egyjegyű, mert $x > 0$ esetén $x \neq 3x$. Ha x kétjegyű, akkor $9 + 2(x - 9) = 3x$, mert az egyjegyű számjegyek száma 9, a kétjegyű számok számjegyeinek száma pedig $2(x - 9)$. Ennek az egyenletnek nincs megoldása a természetes számok halmazán.

Ha x háromjegyű, akkor $9 + 2 \cdot 90 + 3(x - 99) = 3x$, és ennek az egyenletnek sincs megoldása.

Ha x négyjegyű, akkor az egyenlet:

$$9 + 2 \cdot 90 + 3 \cdot 900 + 4(x - 999) = 3x,$$

és ennek az egyetlen megoldása $x = 1107$.

Ha a kötetek száma $1107 + y$ is lehetne, ahol y pozitív egész, akkor a könyvek megjelölésére legalább $3 \cdot 1107 + 4y$ számjegyet kellene felhasználni. (Az első 1107 kötethez $3 \cdot 1107$ számjegyet és minden további kötethez legalább 4 számjegyet.) Másrészt $y > 0$ esetén $3 \cdot 1107 + 4y > 3(1107 + y)$, tehát 1107 az egyedüli megoldása a feladatnak.

$\circledast$

Második megoldás. Legyen a keresett kötetek száma x. Jelöljük az x szám számjegyeinek számát $(k + 1)$-gyel. Ekkor az előbbiekben is felírtuk, hogy $k \geq 1$ (azaz a szám legalább kétjegyű kell legyen) és a számozás során felhasznált számjegyek száma:

$$9 + 2 \cdot 90 + 3 \cdot 900 + \ldots + k \cdot 9 \cdot 10^{k-1} + (k+1)(x - 10^k + 1).$$

Az első összeget a következőképpen alakíthatjuk:

$$9\left(1 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 10^2 + \ldots + k \cdot 10^{k-1}\right) =$$

$$9\left[\left(1 + \ldots + 10^{k-1}\right) + 10\left(1 + \ldots + 10^{k-2}\right) + \ldots + 10^{k-1}\right] =$$

$$9\left[\frac{10^k - 1}{9} + 10 \cdot \frac{10^{k-1} - 1}{9} + \ldots + 10^{k-1} \cdot \frac{10 - 1}{9}\right] =$$

$$\left[\left(10^k - 1\right) + \left(10^k - 10\right) + \ldots + \left(10^k - 10^{k-1}\right)\right] =$$

$$k \cdot 10^k - \frac{10^k - 1}{9},$$

tehát a számjegyek száma

$$k + (k+1)x - \frac{10^{k+1} - 10}{9}.$$

Így

$$3x = k + (k+1)x - \frac{10^{k+1} - 10}{9},$$

azaz

$$(k-2)x = \frac{10(10^k - 1)}{9} - k,$$

vagy

$$(k-2)x = \underbrace{111\ldots1}_{k \text{ darab}}0 - k.$$

A fenti összefüggés jobb oldala egy 1-gyel kezdődő $(k+1)$-jegyű szám. A bal oldalon ott van a $(k+1)$-jegyű x és így $k > 3$ esetén a baloldal nem lehet 1-gyel kezdődő $(k+1)$-jegyű szám. A $k = 3$ esetben pedig $x = 1107$. ⊛

2. Feladat. Határozd meg az $(a+b)(b+c)(c+a) = 1144$ egyenlet összes nullától különböző természetes megoldását!

dr. Hraskó András, Budapest

Megoldás. $1144 = 8 \cdot 11 \cdot 13$. Mivel az $(a+b)$, $(b+c)$, $(c+a)$ tényezők összege páros, ha közülük kettő páros, akkor a harmadik is az. Így vagy csak egyikük páros, vagy mind párosak.

Ha mind párosak, akkor legalább az egyik közülük 2, mert a prímtényezős felbontásban nincs három páratlan prím. Mivel 2 egyetlen felbontása pozitív egészek összegére az $1+1$, a szorzat további két tényezője egymással egyenlő lenne. Ez nem lehetséges, tehát ebben az esetben nincs megoldás.

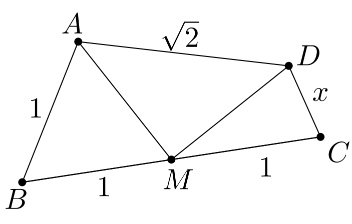
Ha csak egyikük páros, akkor szükségképpen 8, 11 és 13 a három kéttagú összeg, tehát a számok valamilyen sorrendben 3, 5 és 8.

$\otimes$

3. Feladat. Az $ABCD$ konvex négyszögben $AB = 1$, $BC = 2$, $AD = \sqrt{2}$, $\widehat{A} = 105°$ és $\widehat{B} = 60°$. Számítsd ki a CD oldal hosszát!

Kovács Lajos, Székelyudvarhely
dr. András Szilárd, Kolozsvár

Első megoldás. Jelöljük a DC oldal hosszát x-szel és a BC oldal felezőpontját M-mel.

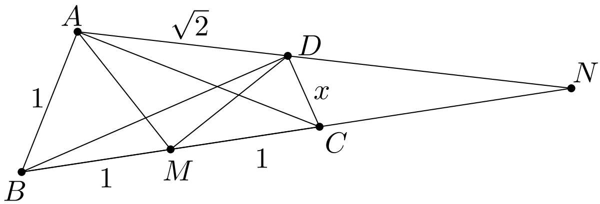


A feltételek alapján $BM = MC = 1$, tehát az ABM háromszög egyenlő oldalú, és ezért $\widehat{MAD} = 45°$. Az MAD háromszögben viszont $AD = \sqrt{2}$ és $AM = 1$ is teljesül, így az MAD háromszög M-ben derékszögű és egyenlő szárú, tehát $MD = 1$. Következik, hogy $\widehat{DMC} = 180° - 60° - 90° = 30°$. Tehát a DMC háromszög egyenlő szárú, $DM = MC = 1$ és az M csúcsnál levő szög 30°-os. Ha ebben a háromszögben felvesszük az M csúcsból kiinduló magasságot (ami egyben szögfelező és oldalfelező is), akkor következik, hogy

$$x = 2\sin 15° = 2\sqrt{\frac{1-\cos 30°}{2}} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{1-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{2-\sqrt{3}}.$$

$\otimes$

Második megoldás. Jelöljük a DC oldal hosszát x-szel, a BC oldal felezőpontját M-mel, és az AD és BC egyenesek metszéspontját N-nel.



Az előző megoldáshoz hasonlóan megkapjuk, hogy $\widehat{BCD} = 75°$ és $\widehat{CDA} = 75° + 45° = 120°$. Tehát az $ABCD$ négyszög szemközti szögeinek az összege 180° és így a négyszög körbeírható. A négyszög köré írt kör középpontja az M pont (és a kör sugara 1), ezért a $\widehat{BAC}$ és $\widehat{BDC}$ szögek 90°-osak. Pitagorasz tétele alapján az

$$AC = \sqrt{3} \quad \text{és} \quad x^2 = 4 - BD^2 \tag{1}$$

összefüggéseket kapjuk.

Másrészt, $\widehat{AMD} = 90°$, $\widehat{BMA} = 60°$ és a BMD háromszög egyenlő szárú, tehát $\widehat{MBD} = 15°$. Viszont az $ABCD$ négyszög körbeírható, ezért a $\widehat{CAD}$ is $15°$. De az ANB háromszögben az $\widehat{ANB}$ is $15°$-os így az ACN háromszög egyenlő szárú és

$$CN = AC = \sqrt{3} \tag{2}$$

az (1) összefüggés alapján.

Mivel a BDN háromszög is egyenlő szárú (a BN oldalon fekvő szögek $15°$-osak), ezért

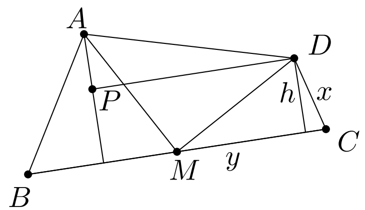
$$BD = DN = y. \tag{3}$$

Ha felírjuk az N pontnak az $ABCD$ négyszög köré írt körre vonatkozó hatványát (vagy direkt hasonlóságból), a (2) és (3) összefüggések alapján az

$$ND \cdot NA = NC \cdot NB \quad \Longleftrightarrow \quad y(y + \sqrt{2}) = \sqrt{3}(\sqrt{3} + 2)$$

összefüggéshez jutunk. Az y-ban másodfokú egyenletnek csak az egyik megoldása lesz pozitív (csak ez lehet egyenlő egy szakasz hosszával), és mivel $BD = y$, az (1) egyenletből megkapjuk az x értékét. $\circledast$

Harmadik megoldás. Legyen a DC szakasz hossza x, a BC oldal felezőpontja M, a DCM háromszög D-ből húzott magasságának a hossza h és ez a magasság a CM szakaszt ossza y és $1 - y$ részekre (lásd az ábrát).



Az első megoldáshoz hasonlóan $DM = 1$ és ezért Pitagorasz tétele alapján a

$$h^2 + y^2 = 1 \quad \text{és} \quad h^2 + (1-y)^2 = x^2 \tag{4}$$

egyenletekhez jutunk.

Szükségünk van még egy egyenletre, ezért rajzoljuk be az ABM egyenlő oldalú háromszögben az A csúcsból húzott magasságot (aminek a hossza $\frac{\sqrt{3}}{2}$), majd állítsunk a D pontból egy merőlegest erre a magasságra (és jelöljük ennek talppontját P-vel, lásd az ábrát). A harmadik egyenletünket az APD derékszögű háromszögben felírt Pitagorasz tételből kapjuk:

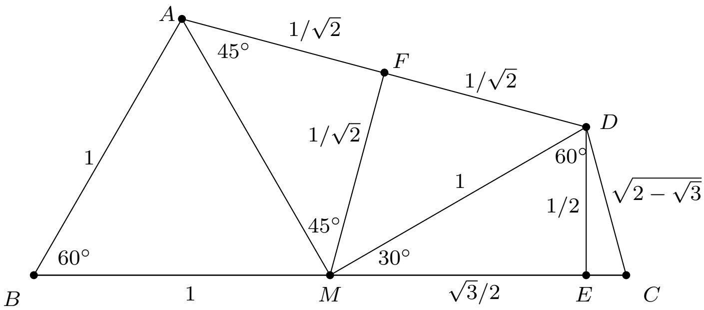
$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - h\right)^2 + \left(\frac{1}{2} + y\right)^2 = (\sqrt{2})^2. \tag{5}$$

A fenti három egyenletből átalakításokkal a

$$\begin{aligned} 2 - 2y &= x^2, \\ h^2 + y^2 &= 1, \\ \sqrt{3}h &= y \end{aligned}$$

egyenleteket kapjuk (a $h^2 + y^2 = 1$ összefüggést használtuk a másik két egyenlet egyszerűsítésére, az utolsó egyenlet felírható a $30°$-os szög tangenséből is). Az utolsó két egyenletből következik, hogy $h = \frac{1}{2}$ és így $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$, tehát az első egyenletből következik, hogy $x = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$. $\circledast$

1. Megjegyzés. A mellékelt ábra alapján látható, hogy lépésről-lépésre csak a Pitagorasz tétel alkalmazásával is kiszámolható a kért szakasz hossza.



4. Feladat. Hány valós megoldása van a $3[x] = 2x^2 + x - 4$ egyenletnek? ($[x]$ az x valós szám egészrészét jelenti.)

Szabó Magda, Szabadka
Longáver Lajos, Nagybánya

Első megoldás. Mivel $x - 1 < [x] \le x$, a következő egyenlőtlenségekhez jutunk:

$$3(x-1) < 2x^2 + x - 4 \le 3x.$$

Az így kapott egyenlőtlenségeket megoldjuk:

$$\begin{cases} 2x^2 - 2x - 1 > 0 \\ 2x^2 - 2x - 4 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left(-\infty, \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}, +\infty\right) \\ x \in [-1, 2] \end{cases}$$

Tehát $x \in \left[-1, \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}, 2\right]$ és így $[x] \in \{-1, 1, 2\}$.

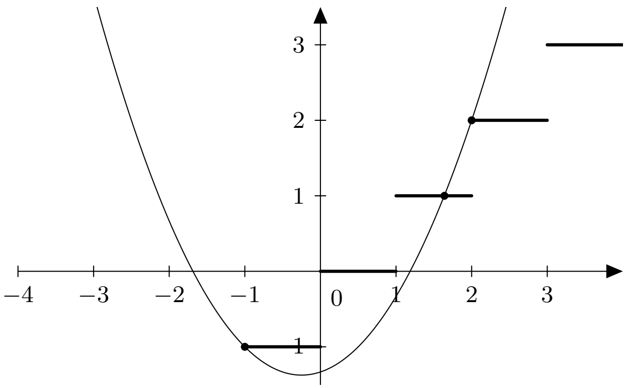
Ha $[x] = -1$, akkor a feladatbeli egyenlet $2x^2 + x - 1 = 0$, és ennek az egyetlen olyan megoldása, amelynek az egészrésze -1, az $x = -1$. (A másik megoldás $\frac{1}{2}$, ennek viszont az egészrésze 0.)

Ha $[x] = 1$, akkor a feladatbeli egyenlet $2x^2 + x - 7 = 0$, és ennek az egyetlen olyan megoldása, amelynek az egészrésze 1, az a $x = \frac{-1+\sqrt{57}}{4}$. (A másik megoldás $\frac{-1-\sqrt{57}}{4}$.)

Ha $[x] = 2$, akkor a feladatbeli egyenlet $2x^2 + x - 10 = 0$, és ennek az egyetlen olyan megoldása, amelynek az egészrésze 2, az $x = 2$. (A másik megoldás $-\frac{5}{2}$.)

A fentieket összefoglalva, az egyenletnek összesen 3 megoldása van, ezek pedig a -1, $\frac{-1+\sqrt{57}}{4}$ és a 2. $\circledast$

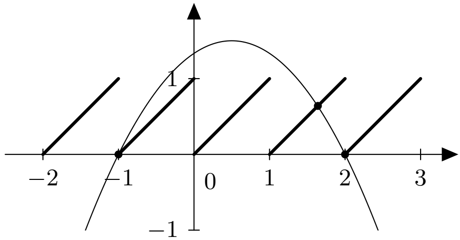
Második megoldás. Ábrázoljuk az $y = \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{4}{3}$ egyenletű parabolát, majd az $y = [x]$ függvény grafikus képét.



Az ábra alapján látható, hogy a megoldások $-1, 2$ és egy $(1, 2)$ intervallumbeli szám. Mivel a feladat nem kéri konkrétan a megoldásokat, csak a megoldások számát, ezért ez elégséges is. Hasonló, de talán jobban látható gondolatmenethez jutunk, ha az egészrész függvény helyett a törtrész függvény grafikus képét ábrázoljuk. Ehhez átalakítjuk az egyenletet:

$$3\,[x] = 2x^2 + x - 4 \Leftrightarrow 3\,(x - \{x\}) = 2x^2 + x - 4,$$

tehát a $\{x\} = -\dfrac{2}{3}x^2 + \dfrac{2}{3}x + \dfrac{4}{3}$ egyenlethez jutunk. Ha ábrázoljuk az $y = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$ egyenletű parabolát, majd az $y = \{x\}$ függvényt. Így sokkal jobban látszik a három megoldás.



⊛

Harmadik megoldás. Tekintsük az $f(x) = 2x^2 + x - (4+3k)$ függvényt, ahol $k = [x]$.

Ha $x \leq -2$, akkor $f(x) = x(x+2) - (4+3k) > 0$.

Az f függvény minden $x \in \left(0, -\frac{1}{4}\right)$ esetén szigorúan csökkenő, ha pedig $x \in \left(-\frac{1}{4}, +\infty\right)$, akkor szigorúan növekvő.

Ha $x \in \left(-\frac{1}{4}, +\infty\right)$, akkor - mivel szigorúan növekvő - f-nek minden $[k, k+1)$ intervallumban legfennebb egy gyöke van. Ez a gyök pontosan akkor létezik, ha $f(k) \leq 0$ és $f(k+1-\epsilon) > 0$, ha ϵ elég kicsi. Ha $\epsilon \to 0$, akkor

$$f(k+1-\epsilon) \to 2(k+1)^2 + (k+1) - (4+3k) = 2k^2 + 2k - 1$$

és ez nullánál szigorúan nagyobb kellene legyen.

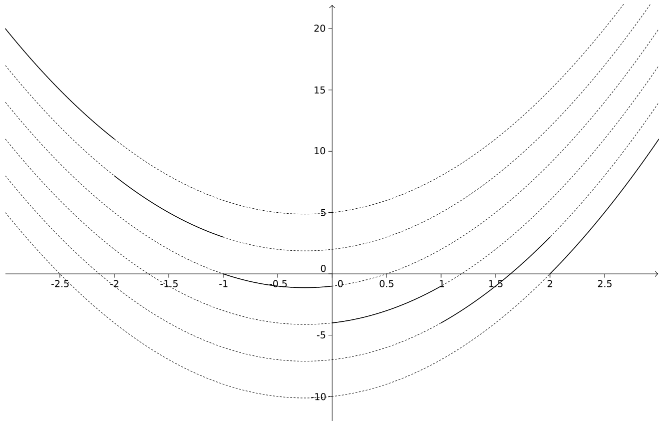
Az $f(k) \leq 0 \Leftrightarrow 2k^2 - 2k - 4 \leq 0 \Leftrightarrow k \in \{-1, 0, 1, 2\}$.
A $2k^2 + 2k - 1 > 0$ egyenlőtlenség viszont csak $k = 1$ és $k = 2$ esetén teljesül.

Ha $x \in \left(-2, -\frac{1}{4}\right)$, akkor $k \in \{-2, -1\}$ és f szigorúan csökkenő. A $k = -2$ és $k = -1$ értékeket egyszerű visszahelyettesítéssel ellenőrizhetjük. Az előzőekhez hasonlóan azt is ellenőrizhetjük, hogy a fordított egyenlőtlenségek teljesülnek-e, azaz:

$$\begin{cases} 2k^2 - 2k - 4 \geq 0 \\ 2k^2 + 2k - 1 < 0 \end{cases}.$$

Bármelyik úton is haladnánk tovább, közülük csak a $k = -1$ felel meg. Tehát három megoldás van. ⊛

2. Megjegyzés. Az f függvényt számítógép használata nélkül nagyon nehéz ábrázolni. Alább megtekinthető a grafikus képe.



5. Feladat. Egy számítógép segítségével kinyomtatták a 2^{2014} és az 5^{2014} hatványok értékét tízes számrendszerben. Összesen hány számjegyet nyomtattak? (Pl. a 11231 szám kinyomtatásánál 5 számjegyet nyomtatnának.)

dr. Katz Sándor, Bonyhád

Megoldás. Jelölje 2^{2014} jegyeinek számát k és 5^{2014} jegyeinek számát l. Ha az n természetes szám k jegyű, akkor $10^{k-1} \leq n < 10^k$, ezért

$$10^{k-1} \leq 2^{2014} < 10^k, \text{ illetve } 10^{l-1} \leq 5^{2014} < 10^l.$$

Mivel sem 2^{2014}, sem 5^{2014} nem lehet 10 hatvány, hiszen sem 2, sem 5 hatványai nem végződhetnek 0-ra, így egyik helyen sem állhat egyenlőség. Szorozzuk össze a két egyenlőtlenséget. Ezt megtehetjük, mert mindenhol pozitív számok állnak. Az előbbi észrevétel alapján mindkét egyenlőtlenség szigorú, tehát

$$10^{k+l-2} < 10^{2014} < 10^{k+l}.$$

A 10 hatványai a kitevő növekedésével növekednek, ezért az előbbiből következik, hogy

$$k + l - 2 < 2014 < k + l.$$

Mivel k és l egész számok, így ez csak $k + l = 2015$ esetén lehetséges. Tehát a két számnak összesen 2015 jegye van.

3. Megjegyzés. Az előbbiekhez hasonlóan belátható, hogy tetszőleges n pozitív egész szám esetén 2^n és 5^n számjegyei számának összege $n + 1$. Ebből következik, hogy ha n értékét eggyel növeljük, akkor 2^n és 5^n közül mindig pontosan az egyiknél nő a jegyek száma.

$\otimes$

6. Feladat. a) Határozd meg a síknak egységoldalú szabályos háromszögekkel és egységoldalú szabályos hatszögekkel való összes szabályos lefödését! Egy lefödés azt jelenti, hogy a sokszögek hézag és átfödés nélkül (egyrétűen) lefödik a síkot. A lefödés szabályos, ha léteznek olyan a és b nullától különböző természetes számok, amelyekre minden keletkező csúcs körül pontosan a darab háromszög és b darab hatszög van, valamilyen rögzített sorrendben.

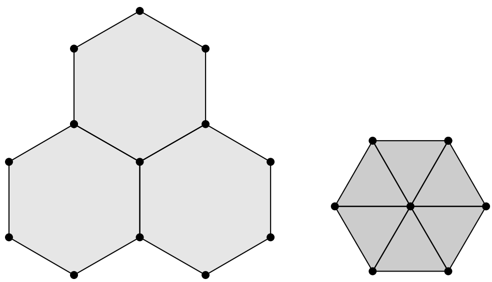
b) Bizonyítsd be, hogy van olyan, nem feltétlenül szabályos lefödés is (az előbbi háromszögekkel és hatszögekkel), amelyben létezik végtelen sok, páronként különböző mintázat, amely véges sokszor jelenik meg! (Mintázat alatt a lefödés véges sok sokszöge által meghatározott összefüggő alakzatot értünk.)

Zsombori Gabriella, Csíkszereda
dr. András Szilárd, dr. Lukács Andor, Kolozsvár

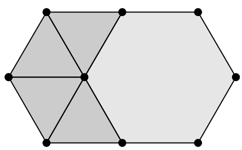
Megoldás. A szabályos háromszögnek egy szöge 60°-os, a szabályos hatszögnek pedig 120°. Egy csúcs körül az alakzatok szögeinek összege 360°, tehát egy csúcsban legalább három, de legfennebb hat alakzat találkozhat:

- ha három alakzat találkozna, akkor ezek mind hatszögek lennének, így nem tudnánk a szabályos lefödéshez háromszögeket használni:
- ha hat alakzat találkozna, akkor ezek mind háromszögek lennének, így a szabályos lefödéshez most nem tudnánk hatszöget használni:

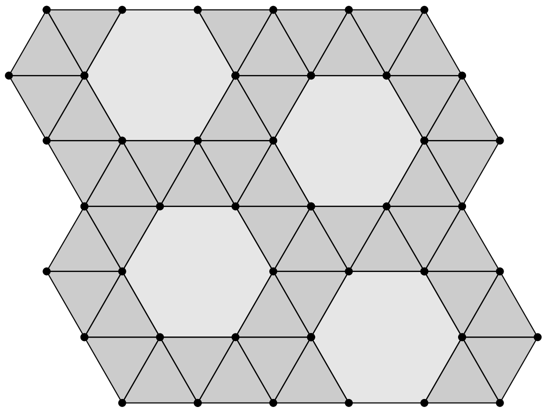
Ezt a két esetetet a következő ábrákon láthatjuk:



Ha egy csúcs körül csak egy hatszög lenne, akkor négy háromszög kell melléje ($1 \cdot 120^\circ + 4 \cdot 60^\circ = 360^\circ$). Az egyszerűbb hivatkozás érdekében a lefedéshez hozzárendeljük a csúcsok körül megjelenő sokszögek oldalszámaiból képezett rendezett számhalmazt egy rögzített körüljárás szerint. Így az előbbi lefödéshez hozzárendelhetjük a $(6, 3, 3, 3, 3)$ rendezett szám ötöst. Egy ilyen csúcspont látható a következő ábrán:

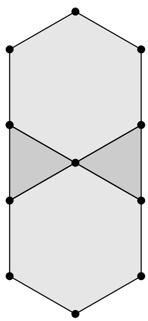


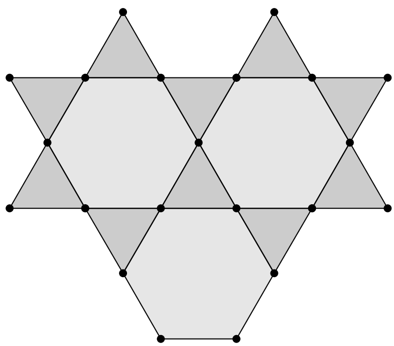
Szabályos lefödés csak a következő módon készíthető:



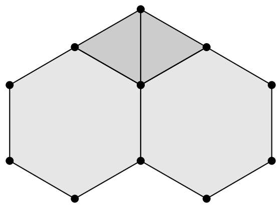
Ha egy csúcs körül két hatszög lenne, akkor két háromszög kell hozzá ($2 \cdot 120^\circ + 2 \cdot 60^\circ = 360^\circ$). Ez esetben kétféle csúcs lehetséges: $(6,3,6,3)$, illetve $(6,6,3,3)$.

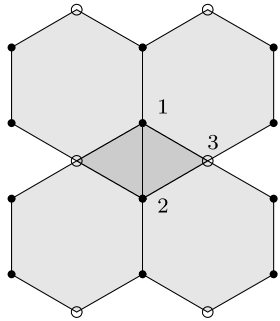
- A $(6,3,6,3)$ esetben egy csúcs körüli elhelyezés látható a bal oldalon, míg a szabályos lefödés a egy része jobb oldalon:





- A $(6,6,3,3)$ esetben egy csúcs körüli elhelyezést tüntettünk fel a következő bal oldali ábrán.



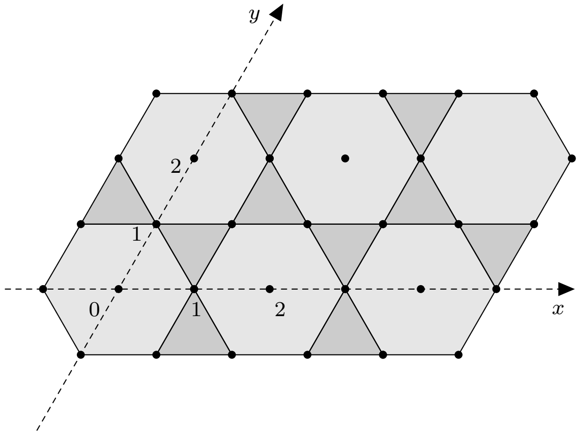


Ebben az esetben szabályos lefödés nem létezik, amit az előbbi ábra jobb oldala is bizonyít. Valóban, ha kiindulunk az 1-el jelölt $(6,6,3,3)$ típusú csúcsból, akkor a 2-es csúcs is szükségszerűen $(6,6,3,3)$ típusú lesz. Viszont ez azt jelenti, hogy a 3-as csúcs már csak $(6,3,6,3)$ típusú lehet. Ez a folyamat folytatódik, két fajta csúcsunk lesz: a teli csúcsok típusa az ábrán $(6,6,3,3)$, míg az üres csúcsok $(6,3,6,3)$ típusúak.

Áttérünk a b) alpont megoldására. Vegyük fel a következő ábrán látható szabályos lefödést és a hozzá tartozó, nem derékszögű koordináta-rendszert.

A lefödésben szereplő hatszögek középpontjainak a koordinátái $(2k, 2l)$ alakúak, ahol $k, l \in \mathbb{Z}$.

Az összes olyan hatszöget, amely középpontjának a koordinátái nem $(2^k, 2^k)$, $k \in \mathbb{N}, k \geq 1$ alakúak, cseréljük ki a hatszög egyértelmű háromszög-lefödésére.



Az így keletkezett síklefödés esetén végtelen sok olyan mintázat létezik, amelyik véges sokszor fordul csak elő: az összes olyan mintázat, amelyik tartalmaz két egymást követő megmaradt hatszöget és a köztük levő szabályos sokszögek által kitöltött alakzatot tartalmazza, csak egyszer fordul elő mert a két hatszög középpontja közti távolság csak egyszer fordul elő.

4. Megjegyzés. Javasoljuk elolvasni mind a négy évfolyam utolsó feladatának a megoldását az évfolyamok sorszámának növekvő sorrendjében.

⊛

10. osztály

1. Feladat. Oldd meg a prímszámok halmazán a

$$3x^2 - y^2 = 22y - 12x$$

egyenletet!

Olosz Ferenc, Szatmárnémeti

Első megoldás. Az egyenletet rendezzük az ismeretlenek szerint és mindkét oldalt szorzattá alakítjuk:

$$3x(x+4) = y(y+22).$$

A bal oldal osztható 3-mal. Ha $y = 3$, akkor az $x^2 + 4x - 25 = 0$ egyenlethez jutunk és ennek nincs egész megoldása. Ha $x = y$, akkor $3x + 12 = x + 22$, ahonnan $x = y = 5$ prímszám, tehát megoldás. Az x és y prímszám volta miatt csak $3x \mid (y+22)$ és $y \mid (x+4)$ lehetséges. Ekkor $y \leq x+4 \leq \frac{y+22}{3} + 4$ és kapjuk, hogy $y \leq 17$. Másrészt $3 \mid (y+22)$, így csak az

$$y \in \{2, 5, 11, 17\}$$

értékek lehetségesek. Ezeket kipróbálva, az $(5,5)$ és $(13,17)$ megoldásokhoz jutunk. ⊛

Második megoldás. $x = y$ esetén az egyenlet egyetlen megoldása $x = y = 5$. Ha $x \neq y$, akkor az egyenletet átírva, a $p \in \mathbb{N}$ változó bevezetésével írhatjuk, hogy

$$\frac{3(x+4)}{y} = \frac{y+22}{x} = p,$$

ahonnan

$$x = \frac{22p+12}{p^2-3} \text{ és } y = \frac{12p+66}{p^2-3}.$$

Itt $p = 3$ esetben megkapjuk az $x = 13, y = 17$ megfelelő megoldást, a többi p értékekre 1- től 16-ig nem kapunk jó megoldást. Ha $p \geq 17$, akkor már $y < 1$, ezért nincs több megoldás. $\circledast$

5. Megjegyzés. Az előbb kapott kifejezések $p \in \mathbb{Q}$ esetén az egyenlet végtelen sok racionális megoldását adják, közöttük végtelen sok egész megoldás is van.

2. Feladat. Négy Tudós Matematikus egy egyenlő szárú trapéz alakú birtokon él, házaik a trapéz csúcsaira épültek. A trapéz hosszabb alapjának hossza a, az alapon fekvő szögek nagysága $50°$, az átlók által bezárt szög pedig $76°$. A Tudósok szeretik a szabályos dolgokat, így elhatározták, hogy olyan kutat építenek, amely mindannyiuk házától ugyanolyan távolságra helyezkedik el. Milyen távolságra kell építeniük házaiktól a kutat? Vajon a kút a birtokukon lesz-e?

dr. Péics Hajnalka, Szabadka

Megoldás. Ahhoz, hogy minden háztól ugyanolyan távolságra legyen, a kutat a trapéz köré írt kör középpontjába kell elhelyezni.

Jelölje A, B, C, D a trapéz csúcspontjait, E a trapéz átlóinak metszéspontját, O pedig a trapéz köré írható körének középpontját. Legyen AB a trapéz hosszabb alapja. Tudjuk, hogy $\widehat{CEB}$ vagy $\widehat{AEB}$ $76°$-os. Az $\widehat{AEB}$ azonban nem lehet $76°$, mert ellenkező esetben az $\widehat{EAB}$ és $\widehat{EBA}$ nagysága $52°$ lenne (az $ABE\Delta$ egyenlő szárú), ami nem lehetséges, mert ezek a szögek a trapéz alapon fekvő szögeinél, a $\widehat{DAB}$-nél és $\widehat{CBA}$-nél kisebbek, tehát $50°$-nál kisebbek kell legyenek. Eszerint $\widehat{CEB} = 76°$, ahonnan $\widehat{AEB} = 180° - 76° = 104°$, valamint $\widehat{ABE} = \frac{180°-104°}{2} = 38°$. Továbbá az AB húr kerületi szöge

$$\widehat{ADB} = 180° - (\widehat{DAB} + \widehat{ABE}) = 92°,$$

ami szerint az AB húr középponti szöge

$$\widehat{AOB} = 2\widehat{ADB} = 184° > 180°.$$

Ebből az következik, hogy a trapéz köré írt kör O középpontja a trapéz belső tartományán kívül esik. Ez azt jelenti, hogy a kutat nem lehet úgy megépíteni a Négy Tudós matematikus birtokára, hogy mindannyiuktól ugyanolyan távolságra legyen. Mivel $\widehat{BAO} = 2°$ és $\cos 2° = \frac{\frac{a}{2}}{r}$, ahol r a trapéz köré írt kör sugara, következik, hogy $r = \frac{a}{2\cos 2°}$. Ez azt jelenti, hogy a kút minden háztól $r = \frac{a}{2\cos 2°}$ távolságra kell legyen.

$\circledast$

6. Megjegyzés. Az $ABCD$ trapéz köré írható kör megegyezik az ABD háromszög köré írható körrel. A szinusz tétel alapján

$$\frac{AB}{\sin\widehat{ADB}} = 2r,$$

ami az $\frac{a}{\sin 92°} = 2r$ egyenlőséghez vezet. Innen következik, hogy

$$r = \frac{a}{2\cos 2°}.$$

3. Feladat. Oldd meg a pozitív valós számok halmazán a

$$2^{4x+1} + 2^{\frac{1}{2x^2}} = 12$$

egyenletet!

Koczinger Éva és Kovács Béla, Szatmárnémeti

Első megoldás. Az egyenlet bal oldalát úgy alakítjuk, hogy alkalmazhassuk három pozitív szám számtani és mértani középarányosa közötti egyenlőtlenséget.

$$2^{4x+1} + 2^{\frac{1}{2x^2}} = 2\cdot 2^{4x} + 2^{\frac{1}{2x^2}} = 2^{4x} + 2^{4x} + 2^{\frac{1}{2x^2}} \geq$$

$$\geq 3 \cdot \sqrt[3]{2^{4x+4x+\frac{1}{2x^2}}} = 3 \cdot 2^{\frac{4x+4x+\frac{1}{2x^2}}{3}} \geq$$
$$\geq 3 \cdot 2^{\sqrt[3]{4x \cdot 4x \cdot \frac{1}{2x^2}}} = 3 \cdot 2^2 = 12$$

és ez pontosan az egyenlet jobb oldala. Egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha a középarányosok közötti egyenlőtlenséget egyenlő számokra alkalmaztuk. Ezért $2^{4x} = 2^{\frac{1}{2x^2}}$, és így

$$4x = \frac{1}{2x^2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Ez valóban megoldása az adott egyenletnek. $\circledast$

Második megoldás. Átalakítjuk az egyenletet:

$$2^{4x} + 2^{4x} + 2^{\frac{1}{2x^2}} + 2^2 = 2^4,$$

majd a bal oldalon kétszer alkalmazzuk a számtani és mértani közepek közti egyenlőtlenséget:

$$16 = 2^{4x} + 2^{4x} + 2^{\frac{1}{2x^2}} + 2^2 \geqslant 2\sqrt{2^{8x}} + 2\sqrt{2^{\frac{1}{2x^2}+2}} \geqslant$$
$$\geqslant 4\sqrt[4]{2^{8x+\frac{1}{2x^2}+2}} = 2^{\frac{8x+\frac{1}{2x^2}+2}{4}+2} = 2^{\frac{8x+\frac{1}{2x^2}+10}{4}}.$$

Ez ekvivalens a

$$8x + \frac{1}{2x^2} + 10 \leqslant 16$$

egyenlőtlenséggel és ebből

$$\frac{16x^3 - 12x^2 + 1}{2x^2} \leqslant 0.$$

Tényezőkre bontva: $\frac{(2x-1)^2(4x+1)}{2x^2} \leqslant 0$. Ez csak akkor lehetséges, ha $x = \frac{1}{2}$. Ezt az értéket visszahelyettesítve az eredeti egyenletbe, igaz egyenlőséghez jutunk, tehát $x = \frac{1}{2}$ az egyetlen pozitív megoldása az adott egyenletnek. $\circledast$

7. Megjegyzés. A számolás közben a következő felbontást végeztük:

$$16x^3-12x^2+1=16x^3-2-12x^2+3=$$

$$=2\left(8x^3-1\right)-3\left(4x^2-1\right)=(2x-1)\left(8x^2+4x+2-6x-3\right)=$$

$$=(2x-1)\left(8x^2-2x-1\right)=(2x-1)^2(4x+1)\,.$$

8. Megjegyzés. Az egyenletnek van még egy negatív megoldása a

$$\left(-\frac{1}{2}\,,\,-\frac{1}{4}\right)$$

intervallumban, ami irracionális szám, közelítő értéke $-0,378$.

9. Megjegyzés. Hasonlóan igazolható, hogy a

$$p^{p^2x+1}+p^{\frac{1}{p^{p-1}\cdot x^p}}=(p+1)p^p$$

egyenletnek ($p\in\mathbb{N}$, $p\geq 2$, $x>0$) az egyetlen megoldása $x=\dfrac{1}{p}$ és a

$$p\cdot a^{p^2x}+a^{\frac{1}{p^{p-1}x^p}}=(p+1)\cdot a^p$$

egyenlet ($a,p\in\mathbb{N}$ és $a,p\geq 2$, $x>0$) egyetlen megoldása $x=\dfrac{1}{p}$.

4. Feladat. Adott az ABC háromszög, amelyben feltételezzük, hogy $AB<BC<AC$. A BC oldalon felvesszük a B' pontot úgy, hogy $CB'=AB$. Hasonlóan felvesszük az AC oldalon az A' és a C' pontot úgy, hogy $CA'=AB$ és $AC'=BC$. Jelöljük az AA', BB', illetve CC' szakaszok felezőpontját rendre D-vel, E-vel és F-fel. Bizonyítsd be, hogy ha A_1 a BC szakasz, B_1 az AC szakasz és C_1 az AB szakasz felezőpontja, valamint $\{G\}=A_1D\cap AB$, $\{H\}=B_1E\cap AB$ és $\{I\}=C_1F\cap BC$, akkor:

a) $BI = GH$;

b) az A_1D, C_1F és B_1E egyeneseknek van közös pontja;

c) ha J az ABC háromszögbe, K az $A_1B_1C_1$ háromszögbe írt kör középpontja, L pedig az ABC háromszög súlypontja, akkor a J, K és L pontok egy egyenesen helyezkednek el és $JL = 2KL$.

Pálhegyi Farkas László, Nagyvárad

Megoldás. a) Használjuk a szokásos jelöléseket: $AB = c$, $BC = a$ és $AC = b$. Következik, hogy

$$AD = \frac{AC - AB}{2} = \frac{b-c}{2} \text{ és } DC = AC - AD = \frac{b+c}{2}.$$

Legyen $AG = x$. Alkalmazzuk Menelaosz tételét az ABC háromszög és GA_1 szelő esetén: mivel $\frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BG}{GA} \cdot \frac{AD}{DC} = 1$, következik, hogy $\frac{c+x}{x} \cdot \frac{\frac{b-c}{2}}{\frac{b+c}{2}} = 1$, tehát $\frac{c+x}{x} = \frac{b+c}{b-c}$, innen pedig $x = \frac{b-c}{2}$. Hasonlóan alkalmazva Menelaosz tételét az ABC háromszög és B_1H, illetve C_1I szelők esetén, kapjuk, hogy $BH = \frac{a-c}{2}$ és $CI = \frac{b-a}{2}$. De $GH = GA + AB + BH = \frac{b-c}{2} + c + \frac{a-c}{2} = \frac{a+b}{2}$, illetve $BI = BC + CI = a + \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2}$, tehát valóban $BI = GH$.

b) Mivel $AG = AD$, következik, hogy GD párhuzamos a $\widehat{BAC}$ belső szögfelezőjével. De mivel $A_1B_1 \| AB$ és $A_1C_1 \| AC$, következik, hogy az $A_1B_1C_1$ háromszög szögeinek belső szögfelezői rendre: az A_1 szögnek A_1D, a B_1 szögnek B_1E és a C_1 szögnek C_1F. Ezeknek a szögfelezőknek van közös pontjuk.

c) Az ABC és az $A_1B_1C_1$ háromszögek hasonlóak, hasonlósági arányuk $\frac{1}{2}$ és AA_1 súlyvonal, amit az L ugyancsak $\frac{1}{2}$ arányban oszt. Ebből következik a kért állítás.

⊛

5. Feladat. Bizonyítsd be, hogy az összes $\frac{1}{m \cdot n}$ alakú szám összege nem egész szám, ahol $1 \leq m < n \leq 2014$, illetve m és n természetes számok.

dr. Kántor Sándor, Debrecen

Megoldás. Az 1-től 2014-ig terjedő egész számok között pontosan kettő (729 és 1458) osztható 3^6-nal, a többi 3-nak legfeljebb ötödik hatványával. Így az összes lehetséges $m \cdot n$ szorzat legfeljebb 3-nak 11-edik hatványával osztható, kivéve a $729 \cdot 1458 = 2 \cdot 3^{12}$ számot.

Adjuk össze $\dfrac{1}{729 \cdot 1458}$ kivételével az összes $\dfrac{1}{m \cdot n}$ alakú számot, és hozzuk őket közös nevezőre. Az eredmény $\dfrac{a}{3^{11} \cdot b}$ alakú tört, ahol a és b pozitív egész, b nem osztható 3-mal. Tehát $S = \dfrac{a}{3^{11} \cdot b} + \dfrac{1}{2 \cdot 3^{12}}$, és ezért $2 \cdot 3^{12} \cdot S \cdot b - 6a = b$.

Egész S esetén a bal oldal osztható lenne hárommal, míg a jobb oldal nem, tehát S nem lehet egész.

$\otimes$

10. Megjegyzés. Megoldhatjuk a feladatot úgy is, hogy a 3^6 helyett egy tetszőleges, jól megválasztott p prímszámot használunk, amelyre $p \in (672, 1007)$. A prímszám megválasztásakor arra figyelünk, hogy a kétszerese legyen 2014-nél kisebb és a háromszorosa 2014-nél nagyobb. Az S összeget a fenti módszerrel $S = \frac{a}{pb} + \frac{1}{2p^2}$ alakba írjuk. Beszorozva a közös nevezővel, majd átrendezve az egyenlőséget, azt kapjuk, hogy $2p^2bS - 2pa = b$. Ennek a kifejezésnek a bal oldala osztható p-vel, a jobb oldala pedig nem. Tehát az S nem lehet egész szám.

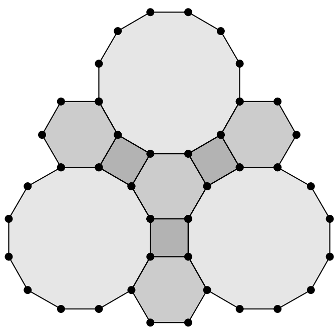
6. Feladat. a) Határozd meg a síknak egységoldalú szabályos hatszögekkel, egységoldalú négyzetekkel és egységoldalú szabályos tizenkétszögekkel való összes szabályos lefödését! Egy lefödés azt jelenti, hogy a sokszögek hézag és átfödés nélkül (egyrétűen) lefödik a síkot. A lefödés szabályos, ha léteznek olyan a, b, c nullától különböző természetes számok, amelyekre minden keletkező csúcs körül pontosan a darab hatszög, b darab négyzet és c darab tizenkétszög van, valamilyen rögzített sorrendben.

b) Bizonyítsd be, hogy az előbbi hatszögekkel, négyzetekkel, tizenkétszögekkel, valamint egységoldalú szabályos háromszögekkel létre lehet hozni olyan, nem feltétlenül szabályos lefödést, amelyben mind a négy típusú alakzatot végtelen sokszor használjuk, és amelyben létezik végtelen sok páronként különböző mintázat, amely véges sokszor jelenik meg! (Mintázat alatt a lefödés véges sok sokszöge által meghatározott összefüggő alakzatot értünk.)

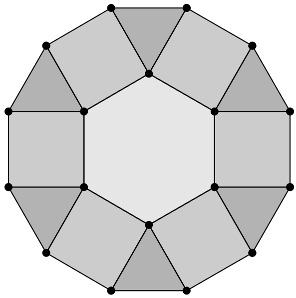
Zsombori Gabriella, Csíkszereda
dr. András Szilárd, dr. Lukács Andor, Kolozsvár

Megoldás. Javasoljuk elolvasni mind a négy évfolyam utolsó feladatának a megoldását az évfolyamok sorszámának növekvő sorrendjében.

a) Egy csúcs köré minden alakzatból kell kerüljön legalább egy. Mivel $120° + 90° + 150° = 360°$, ezért pontosan egy kell kerüljön mindegyikből. Következik, hogy minden csúcs szerkezete $(6, 4, 12)$ kell legyen. Egy ilyen csúcsból kiindulva, az összes többi egyértelműen meghatározott lesz és az egyetlen lefödés a következő:



b) A tizenkétszög felbontható háromszögekre, négyszögekre és hatszögekre a következő módon:



A megoldáshoz a továbbiakban használjuk a 11. osztály hatodik feladatának a megoldásához készített utolsó ábrát: a koordinátarendszert, amelyben egy tizenkétszög középpontja az origó és két szomszédos vízszintes tizenkétszög középpontja között a távolság egy egység.

Megadunk egy lehetséges szerkesztést. Az összes olyan tizenkétszögre, amelyek középpontjának a koordinátái nem $(2^k, 2^k)$ alakúak ($k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$) használjuk az előző felbontást. Az így keletkezett síklefödés esetén végtelen sok olyan mintázat létezik, amelyik véges sokszor fordul csak elő: az összes olyan mintázat, amelyik pontosan két megmaradt, egymást követő tizenkétszöget és a köztük levő szabályos sokszögek által kitöltött alakzatot tartalmazza, csak egyszer fordul elő. Valóban, a szerkesztésünk következménye, hogy két ilyen tizenkétszög középpontjának a távolsága egyre nagyobb. $\circledast$

11. osztály

1. Feladat. Milyen szabály szerint írtuk le a

$$2, 10, 16, 32, 42, 66, 80, 112, 130, 170$$

számokat? Ezt a szabályt folytatva, add meg a

$$2, 10, 16, 32, 42, 66, 80, 112, 130, 170, \ldots$$

sorozat általános tagjának a képletét!

dr. Kántor Sándorné, Debrecen

Megoldás. Írjuk fel az adott sorozat szomszédos tagjai különbségének a sorozatát, vagyis a differenciasorozatot:

$$8, 6, 16, 10, 24, 14, 32, 18, 40, \ldots$$

A differenciasorozat páratlan sorszámú tagjai a $8, 16, 24, \ldots$ számtani sorozat tagjai. A differenciasorozat páros sorszámú tagjai a $6, 10, 14, \ldots$ számtani sorozat tagjai. Az eredetileg adott sorozat n-edik tagja

$$a_n = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 8 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 8 + 5 \cdot 2 + 3 \cdot 8 + \ldots.$$

Ha n páratlan, azaz ha $n = 2k + 1$, alakú, akkor

$$a_{2k+1} = 2[(1 + 3 + \ldots + (2k + 1)] + 8(1 + 2 + 3 + \ldots + k) =$$

$$= 2(k+1)^2 + 8\frac{k^2 + k}{2} = 6k^2 + 8k + 2 = 6\left(\frac{n-1}{2}\right)^2 + 8\frac{n-1}{2} + 2,$$

mivel $k = \frac{n-1}{2}$. Így páratlan n-re

$$a_n = \frac{3}{2}n^2 + n - \frac{1}{2}.$$

Páros n-ekre, azaz $n = 2k$, esetén

$$a_{2k} = 2[1 + 3 + \ldots + (2k - 1)] + 8(1 + 2 + \ldots + k).$$

Innen az előzőhöz hasonlóan kapjuk, hogy

$$a_{2k} = 2k^2 + 8\frac{k^2 + k}{2} = 6k^2 + 4k.$$

Itt $n = 2k$ miatt k helyére $\frac{n}{2}$-t írva, páros n-ekre

$$a_n = \frac{3}{2}n^2 + 2n.$$

⊛

11. Megjegyzés. Az a_n képlet egységes formában is felírható, figyelembe véve, hogy a páros és a páratlan sorszámú tagok közti különbség $\frac{2n+1}{2}$. Az általános tag tehát:

$$a_n = \frac{3}{2}n^2 + \frac{3}{2}n - \frac{1}{4} + (-1)^n \left(\frac{2n+1}{4}\right).$$

2. Feladat. Oldd meg az $x^{\log_3 64} = x^2 \cdot 8^{\log_3 x} - x^{\log_3 8}$ egyenletet a valós számok halmazán!

Balázsi Borbála, Beregszász

Megoldás. Az egyenlet értelmezési tartománya a pozitív valós számok halmaza. Mivel $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$, ha $a, b, c > 0$ és $b \neq 1$, az egyenlet átírható

$$8^{\log_3 x} = x^2 - 1$$

alakba. Az $y = \log_3 x$ jelöléssel $x^2 = 9^y$, tehát az egyenlet

$$8^y = 9^y - 1.$$

Innen
$$\left(\frac{8}{9}\right)^y + \left(\frac{1}{9}\right)^y = 1.$$
A bal oldalon egy szigorúan csökkenő függvény van, ezért az egyenletnek legfeljebb egy gyöke lehet. Ez a gyök $y = 1$, és így az eredeti egyenletnek $x = 3$ az egyetlen megoldása. $\circledast$

3. Feladat. Legfeljebb hány elemet tartalmazhat a

$$H = \{1, 2, 3, \dots, 25\}$$

halmaznak az a részhalmaza, amelyben bármely két szám szorzata nem négyzetszám? Adj meg egy ilyen részhalmazt!

Bíró Béla, Sepsiszentgyörgy

Megoldás. Legyen K a keresett részhalmaz. Mivel bármely két teljes négyzet szorzata is teljes négyzet, ezért a K-ban legfennebb egyetlen négyzetszám lehet. Vagyis az $1, 4, 9, 16, 25$ számok közül pontosan egy szerepelhet K-ban. Az általánosság leszűkítése nélkül feltételezhetjük, hogy $1 \in K$. Másrészt az $\{5, 20\}$, $\{3, 12\}$ illetve $\{6, 24\}$ számpárok komponensei közül legfennebb egy-egy szerepelhet K-ban, mert a párok komponenseinek szorzata teljes négyzet. Harmadrészt a $2, 8, 18$ számhármasból legfennebb egy komponens szerepelhet K-ban, mert közülük bármely kettőnek a szorzata teljes négyzet. Innen következik, hogy a K-ban legfennebb $25 - 4 - 3 - 2 = 16$ szám szerepelhet. Negyedrészt bizonyítható, hogy ez a 16-os elemszám elérhető. Például a

$$K = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 19, 21, 22, 23\}$$

részhalmaz teljesíti a feladat feltételeit. $\circledast$

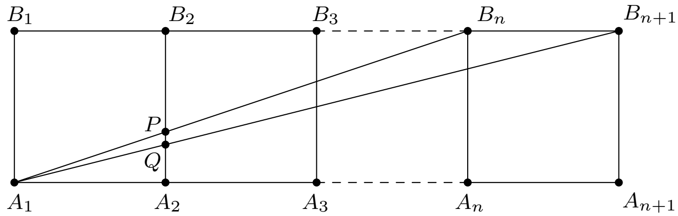
4. Feladat. Az e és f egyenesek párhuzamosak és egymástól egységnyi távolságra vannak. Vedd fel az e egyenesen az A_1, A_2, $A_3, \ldots, A_n, A_{n+1}$ pontokat és az f egyenesen a $B_1, B_2, \ldots, B_n$, B_{n+1} pontokat úgy, hogy mindkét egyenesen bármely két szomszédos pont távolsága egységnyi, és minden $i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq n+1$ számra az A_iB_i szakasz merőleges az e és f egyenesekre. Kösd össze az A_1 pontot a B_n és B_{n+1} pontokkal. Az összekötő szakaszok az A_2B_2 szakaszt rendre a P és Q pontokban metszik.

a) Van-e olyan pozitív egész n szám, amelyre az A_1PQ háromszög területe $\dfrac{1}{1802}$ területegység?

b) Van-e olyan pozitív egész n szám, amelyre az A_1PQ háromszög területe $\dfrac{1}{1860}$ területegység?

Bíró Bálint, Eger

Megoldás. a) A szöveg alapján $A_iA_{i+1}B_{i+1}B_i$ egységnyi oldalú négyzetek, amelyek a következő vázlatos ábrának megfelelően helyezkednek el.



A megfelelő szögek egyenlősége miatt az A_1A_2P és $A_1A_nB_n$ háromszögek hasonlók, ezért megfelelő oldalaik aránya egyenlő, azaz $\frac{A_1A_2}{PA_2} = \frac{A_1A_n}{A_nB_n}$. Ebből $A_1A_2 = A_nB_n = 1$ és $A_1A_n = n-1$ miatt $PA_2 = \frac{1}{n-1}$. Nyilvánvaló, hogy $n \neq 1$, hiszen ha csak egy négyzet szerepelne az ábrán, akkor a P, Q pontok nem jöhetnének létre. A megfelelő szögek egyenlősége miatt az A_1A_2Q és

$A_1A_{n+1}B_{n+1}$ háromszögek szintén hasonlók, ezért megfelelő oldalaik aránya egyenlő, vagyis

$$\frac{A_1A_2}{QA_2} = \frac{A_1A_{n+1}}{A_{n+1}B_{n+1}}.$$

Ez alapján $QA_2 = \frac{1}{n}$, tehát

$$PQ = PA_2 - QA_2 = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{n \cdot (n-1)}.$$

Az A_1PQ háromszögnek a PQ oldalhoz tartozó magassága az $A_1A_2 = 1$ szakasz, ezért a háromszög területére azt kapjuk, hogy

$$T = \frac{PQ \cdot A_1A_2}{2} = \frac{1}{2n \cdot (n-1)}.$$

Ha az A_1PQ háromszög területe $\dfrac{1}{1802}$, akkor

$$2n \cdot (n-1) = 1802.$$

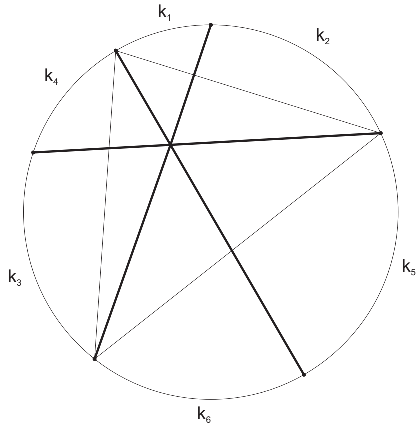
Ennek az egyenletnek nincs pozitív egész megoldása, mert $n \cdot (n-1)$ páros szám, így a bal oldala 4-gyel osztható, míg 1802 nem osztható 4-gyel, tehát az a) kérdésre a válasz az, hogy ilyen n nem létezik.

Ha az A_1PQ háromszög területe $\frac{1}{1860}$, akkor $\frac{1}{2n \cdot (n-1)} = \frac{1}{1860}$, vagyis $2n \cdot (n-1) = 1860$, ahonnan $n^2 - n - 930 = 0$. A megoldások $n_1 = 31$ és $n_2 = -30$. Az $n_2 = -30$ nyilván nem felel meg a feltételeknek, tehát a b) kérdésre $n = 31$ a válasz. $\circledast$

5. Feladat. Egy szabályos kilencszögben meghúztuk az összes átlót. Van-e a kilencszög belsejében olyan pont, amelyre legalább három átló illeszkedik?

Zsombori Gabriella, Csíkszereda
dr. András Szilárd, Kolozsvár

Első megoldás. A szabályos kilencszög szögei 140°-osak. (Egy szabályos n-oldalú sokszög szögeinek összege $(n-2)\cdot 180°$, tehát egyik szöge $\frac{(n-2)\cdot 180°}{n}$.) Ekkor egy oldalt közrefogó kerületi szög mértéke $\alpha = 20°$. Tételezzük fel, hogy van három olyan átló, amelyek a kilencszög belsejében összefutnak. Ekkor ezek közül semelyik kettő nem találkozhat ugyanabban a csúcsban. A mellékelt ábrán vastagítva látható ez a három átló. Ugyanakkor az ábrán két csúcs közé beírt k_i nullától különböző természetes szám jelentse azt, hogy az $\alpha = 20°$ hányszorosát fogja közre ehhez a két csúcshoz tartozó kerületi szög ($i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$).



Ekkor

$$k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5 + k_6 = 9$$

és a Ceva-tétel trigonometrikus alakját felírva:

$$\frac{\sin(k_1\alpha)}{\sin(k_2\alpha)} \cdot \frac{\sin(k_3\alpha)}{\sin(k_4\alpha)} \cdot \frac{\sin(k_5\alpha)}{\sin(k_6\alpha)} = 1.$$

A $k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6$ nullától különböző természetes számokat rendezzük növekvő sorrendbe. Ekkor az első nem lehet 1-nél nagyobb (ha legalább 2 lenne, akkor a hat szám összege legalább 12 lenne). Hasonló meggondolásból a második és a harmadik szám sem lehet 1-nél nagyobb. Ekkor $k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6$ lehetséges - növekvő sorrendbe szedett - értékei:

$$\{1,1,1,1,1,4\} \quad \{1,1,1,1,2,3\} \quad \{1,1,1,2,2,2\}$$

• $\{1,1,1,1,1,4\}$ esetén a trigonometrikus összefüggés

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha}\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha}\cdot\frac{\sin 4\alpha}{\sin\alpha}=1 \text{ vagy } \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha}\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha}\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin 4\alpha}=1$$

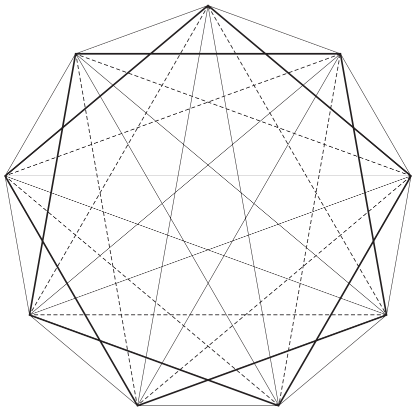
lenne és mindkettő a $\sin 80^\circ = \sin 20^\circ$ egyenlőséget eredményezné, ami nem igaz.

• $\{1,1,1,1,2,3\}$ esetén a trigonometrikus összefüggésből $\sin 40^\circ = \sin 60^\circ$ vagy $\sin 40^\circ \sin 60^\circ = \sin 20^\circ \sin 20^\circ$ következne, ami szintén lehetetlen. (A szinusz függvény 0° és 90° között szigorúan növekvő és pozitív értékeket vesz fel.)

• $\{1,1,1,2,2,2\}$ esetén szintén a trigonometrikus összefüggésből $(\sin 20^\circ)^3 = (\sin 40^\circ)^3$ vagy $\sin 20^\circ = \sin 40^\circ$ következne, ami nem igaz.

Tehát nincs három olyan átló, amelyek a kilencszög belsejében összefutnak. $\circledast$

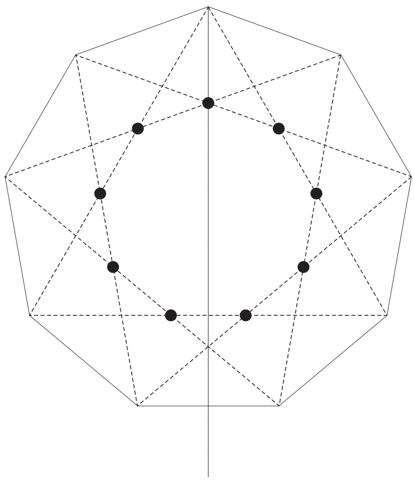
Második megoldás. A mellékelt ábrán megfigyelhető, hogy három típusú átlója van egy szabályos kilencszögnek.



Nevezzük 1-es típusúnak azokat az átlókat (az ábrán a vastagított szakaszok), amelyeknek egyik oldalán pontosan egy csúcspont található. Legyenek 2-es típusúak azok az átlók (az ábrán a szaggatott szakaszok), amelyeknek egyik oldalán pontosan két csúcspont található és 3-as típusúak azok az átlók, amelyeknek egyik oldalán pontosan három csúcspont van.

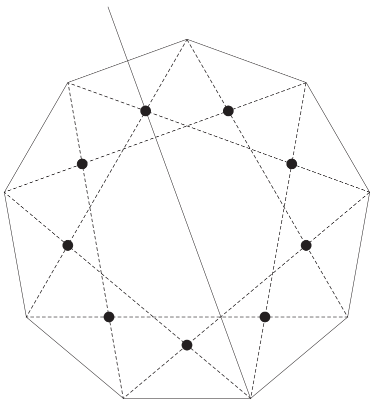
Mivel az 1-es típusú átlók egyik oldalán pontosan egy csúcspont van, ebből a csúcspontból kell egy másik (ezt metsző) átló kiinduljon. Viszont így nem marad csúcspont, amiből egy harmadik is kiinduljon és az első kettővel összefusson. Tehát az $\{1,1\}$, $\{1,2\}$, illetve $\{1,3\}$ metszéspontok nem lehetnek összefutási pontok.

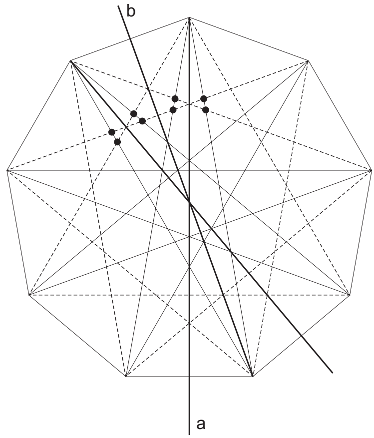
Vizsgáljuk most a $\{2,2\}$ metszéspontokat. Ezek a metszéspontok mind rajta vannak a kilencszög egy-egy olyan szimmetriatengelyén, amelyek áthaladnak egy csúcson. Ha a $\{2,2\}$ metszéspont az ábrán látható típusú, akkor ez nem lehet összefutási pont.



Valóban, ha kiválasztunk egy csúcsot és ezen a csúcson keresztül behúzzuk a kilencszögnek a szimmetriatengelyét, akkor az ehhez a csúcshoz legközelebb eső csúcsok által meghatározott 2-es típusú átlók ezen szimmetriatengelyen való metszéspontjáról van szó, így ez nem lehet összefutási pont.
Ebből következik, hogy a $\{2,2\}$ másik típusú metszéspontok sem lehetnek összefutási pontok (nem eshetnek egybe az első típusú $\{2,2\}$ metszéspontokkal és szimmetriatengelyen vannak - lásd az ábrát). Hasonlóan tárgyalható le az is, hogy a $\{3,3\}$ metszéspontok sem lehetnek összefutási pontok. Hátra van még a $\{2,3\}$ metszéspontok vizsgálata. Ezek a metszéspontok eddigi egyetlen metszésponttal sem eshetnek egybe. Ezen kívül, ha megfigyeljük a mellékelt ábrát, egy kiválasztott csúcsból húzott, a szimmetriatengelyen találkozó 2-es típusú átlók (azok, amelyeknek a találkozási pontja a csúcshoz a lehető legközelebb esik, de nem esik egybe azzal) ugyanabból a csúcsból induló 3-as típusú átlókkal négy különböző metszéspontot határoznak meg. Tükrözzük ezt a négy metszéspontot a b szimmetriatengelyre nézve, az ábrán

látható módon. Ekkor négy újabb $\{2,3\}$ metszéspontot kapunk.





A két-két - b tengelyhez közelebb eső - metszéspont egyike sem eshet a b tengelyre (ezáltal egybeesve egy másikkal), mivel ezen pontok b tengelyen találkozó tartóegyenesei azonos típusúak (ezek pedig nem lehetnek összefutási pontok).
Tehát nincs három olyan átló, amelyek összefutnának. $\circledast$

12. Megjegyzés. P. L. Wantzel bizonyította be 1837-ben, hogy ha az n természetes szám páratlan prímtényezői nem különböző Fermat-prímek, akkor a szabályos n-szög nem szerkeszthető meg körzővel és vonalzóval. Mivel a 9 prímtényezői nem különbözőek, ezért a szabályos kilencszög nem szerkeszthető meg euklideszi eszközökkel. (Fermat-prímeknek az $F_n = 2^{2^n} + 1$ alakú prímszámokat nevezzük, ahol n természetes szám. A jelenleg ismert Fermat-prímek: $F_0 = 3$, $F_1 = 5$, $F_2 = 17$, $F_3 = 257$, és $F_4 = 65537$.)

6. Feladat. a) Határozd meg a síknak egységoldalú szabályos háromszögekkel, egységoldalú négyzetekkel és egységoldalú szabályos hatszögekkel való összes szabályos lefödését! Egy lefödés azt jelenti, hogy a sokszögek hézag és átfödés nélkül (egyrétűen) lefödik a síkot. A lefödés szabályos, ha léteznek olyan a, b és c nullától különböző természetes számok, amelyekre minden keletkező csúcs körül pontosan a darab háromszög, b darab négyzet és c darab hatszög van, valamilyen rögzített sorrendben.

b) Bizonyítsd be, hogy létezik végtelen sok olyan, nem feltétlenül szabályos lefödés, amelyhez hozzárendelhető valamilyen a, b és c nullától különböző természetes szám úgy, hogy minden keletkező csúcs körül pontosan a darab háromszög, b darab négyzet és c darab hatszög legyen!

Zsombori Gabriella, Csíkszereda
dr. András Szilárd, dr. Lukács Andor, Kolozsvár

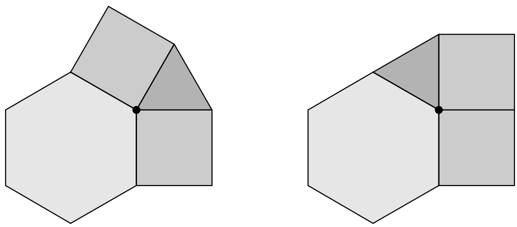
Megoldás. Javasoljuk elolvasni mind a négy évfolyam utolsó feladatának a megoldását az évfolyamok sorszámának növekvő sorrendjében. Az a) pont megoldásához észrevesszük, hogy egy csúcspontban négy vagy öt alakzat találkozhat.

Abban az esetben, ha csak négy alakzat találkozik, a következő eseteket különböztetjük meg:

• Ha ezek között egy hatszög, a darab háromszög és b darab négyzet, akkor

$$a \cdot 60^\circ + b \cdot 90^\circ + 120^\circ = 360^\circ.$$

Így a $\begin{cases} 2a + 3b &= 8 \\ a + b &= 3 \end{cases}$ egyenletrendszert kell megoldanunk a pozitív egész számok halmazán, aminek a megoldása $a = 1$ és $b = 2$. Tehát csak a $(3, 4, 4, 6)$ és $(4, 3, 4, 6)$ elrendezések lehetségesek egy csúcs körül:



Ha két hatszög van, akkor az előbbi jelöléseket alkalmazva

$$a \cdot 60^\circ + b \cdot 90^\circ + 240^\circ = 360^\circ$$

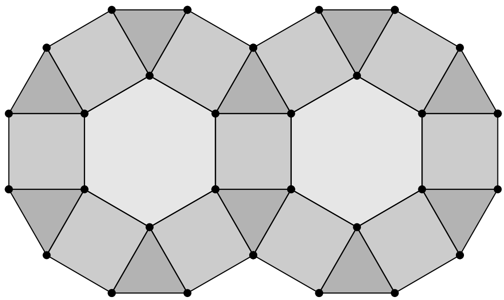
összefüggés kell teljesüljön. Mivel ebben az esetben $a + b = 2$ is fennáll, nincs megoldásunk.

• Abban az esetben, ha egy csúcspontban öt alakzat találkozik, mivel az alakzatok között kell legyen háromszög, négyzet és hatszög is, a fennmaradt két alakzat szögeinek összege

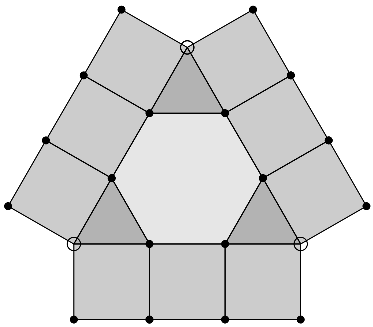
$$360^\circ - (60^\circ + 90^\circ + 120^\circ) = 90^\circ$$

és ez nem lehetséges.

Tehát egy csúcspontban csak négy alakzat találkozhat. A $(4, 3, 4, 6)$ elrendezés esetén lehet szabályos lefödést szerkeszteni, és ez a lefödés egyértelmű. Valóban, kiindulva a hatszög egyik $(4, 3, 4, 6)$ típusú csúcsából, ez a hatszög minden további csúcsát egyértelműen meghatározza (mind $(4, 3, 4, 6)$ típusúak lesznek). De így a kialakult tizenkétszög csúcsai is egyértelműen meghatározottak:

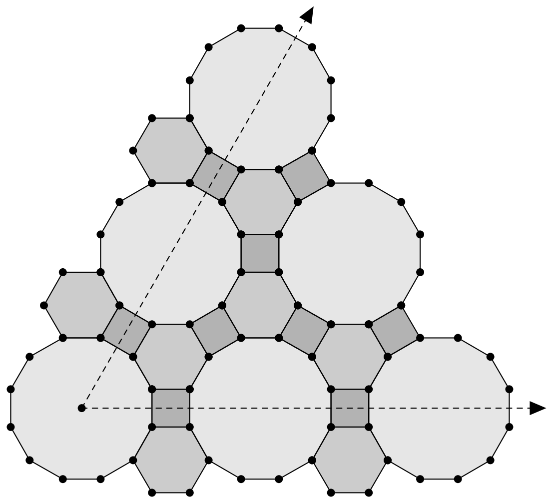


Ha a $(3, 4, 4, 6)$ csúcs körüli elrendezésből indulunk ki és egy hatszög csúcsait körbejárjuk, szükségszerűen az összes többi csúcs is $(3, 4, 4, 6)$ típusú lesz. Viszont így a felhasznált háromszögek harmadik csúcsai $(4, 3, 4, 6)$ típusúak lesznek:



Összegezve az eredményeket, egyedül a $(4, 3, 4, 6)$ típusú lefödés ad szabályos lefödést.

Áttérünk a b) alpont megoldására. A következő ábrán látható lefödés szabályos, ha tizenkétszögekben, négyzetekben és hatszögekben gondolkodunk (minden csúcs $(4, 6, 12)$ típusú).



Viszont minden tizenkétszöget az a) alpont alapján egyértelműen háromszögekre, négyzetekre és hatszögekre bonthatunk. Ez a felbontás lehet olyan, hogy egy tizenkétszög belsejében elhelyezkedő négyzet egy kinti négyzettel csak csúcsban, vagy élben is érintkezzen. Ezt minden tizenkétszög esetén tetszőlegesen megválaszthatjuk, és ezért végtelen sok kért lefödést kapunk. Valóban, induljunk ki az egyetlen szabályos lefödésből és azonosítsunk be egy tizenkétszöget. Ezután, kúp alakban az ábra szerint haladva azonosítsunk be további tizenkétszögeket az előző ábra szerint (egy speciális "háromszögrácsot" kapunk, amelynek csúcsai a tizenkétszögek, és az őket összekötő alakzatok a négyzetek). Mindegyik kiválasztott tizenkétszög kétféle színezést határoz meg, de végtelen sok tizenkétszöget választottunk. $\circledast$

12. osztály

1. Feladat. Az ABC háromszögben $\widehat{ACB} = 60°$ és $AC \leq BC$. Legyen D az AC oldal egy belső pontja. Vedd fel az E pontot a BC oldal belsejében úgy, hogy $AD = BE$ teljesüljön. A DE szakasz fölé rajzold meg a DEF szabályos háromszöget úgy, hogy DEF és ABC azonos körüljárásúak legyenek. Bizonyítsd be, hogy az F pont illeszkedik az ABC háromszög köré írt körre!

Nemecskó István, Budapest

Megoldás. Mivel $AC \leq BC$, következik, hogy $CD \leq CE$. Ha $CD = CE$, akkor az ABC háromszög egyenlő oldalú, és ekkor F egybeesik C-vel, azaz rajta van az ABC háromszög köré írt körön. Ha pedig $CD < CE$, akkor a CDE háromszögben $\widehat{CED} < 60°$ ($\widehat{DCE} = 60°$), azaz F a CDE háromszögön kívül esik.
Mivel $\widehat{DCE} = \widehat{DFE} = 60°$, ezért a $CDEF$ négyszög körbeírható. Ekkor $\widehat{CEF} = \widehat{CDF}$, és így $\widehat{BEF} = \widehat{ADF}$. Következik, hogy a DAF háromszög egybevágó az EBF háromszöggel ($AD = BE$, és $DF = EF$), és így $\widehat{DAF} = \widehat{EBF}$, azaz az $ABFC$ négyszög körbeírható. Tehát az F pont rajta van az ABC háromszög köré írt körön. $\otimes$

13. Megjegyzés. Az előbbi gondolatmenetből látható, hogy a tulajdonság fordítottja is igaz, tehát ha F illeszkedik a háromszög köré írt körre, akkor $AD = BE$.

2. Feladat. Az $ABCDEFGH$ kocka élének a hossza 1 cm. Egy hangya az A csúcsból indulva egy 2014 cm hosszúságú utat jár be úgy, hogy csak az éleken közlekedik (egy élen végig mehet többször is). Melyik útból van több: amelyik az A csúcsban, vagy amelyik a C csúcsban végződik?

Kekeňák Szilvia, Kassa

Megoldás. Jelentse X_i az A-ból az X pontba érkező i hosszúságú utak számát, ahol $X \in \{A, B, C, D, E, F, G, H\}$, tehát A_{2014}-et kellene összehasonlítani C_{2014}-gyel. $E_1 = 1$ és $G_1 = 0$ (az A pontból induló és az E pontba érkező 1 hosszúságú utak száma 1, míg az A pontból induló és a G pontba érkező 1 hosszúságú utak száma 0). Következik, hogy

$$A_2 = B_1 + D_1 + E_1 > B_1 + D_1 + G_1 = C_2.$$

De ekkor

$$E_3 = A_2 + F_2 + H_2 > C_2 + F_2 + H_2 = G_3,$$

azaz

$$A_4 = B_3 + D_3 + E_3 > B_3 + D_3 + G_3 = C_4.$$

Ezt a gondolatmenetet folytatva matematikai indukcióval igazolhatjuk, hogy $A_{2n} > C_{2n}$, bármely n nullától különböző természetes számra. Valóban, ha bizonyos k természetes számra ($k \geq 2$) elfogadjuk, hogy $A_{2k} > C_{2k}$, akkor

$$E_{2k+1} = A_{2k} + F_{2k} + H_{2k} > C_{2k} + F_{2k} + H_{2k} = G_{2k+1},$$

azaz

$$\begin{aligned} A_{2k+2} &= B_{2k+1} + D_{2k+1} + E_{2k+1} > \\ &> B_{2k+1} + D_{2k+1} + G_{2k+1} = C_{2k+2}. \end{aligned}$$

Tehát $A_{2014} > C_{2014}$. ⊛

3. Feladat. Adottak az $a, b, c \in \{0, 1, 2, ..., 9\}$ számjegyek úgy, hogy az $\overline{abc}$ háromjegyű szám prímszám. Bizonyítsd be, hogy az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenletnek nincsenek racionális gyökei!

dr. Bencze Mihály, Bukarest

Megoldás. A tízes számrendszerbeli reprezentáció alapján

$$\overline{abc} = 100a + 10b + c.$$

Ha a feladatban megjelenő másodfokú egyenletnek van racionális megoldása, akkor létezik olyan $d \in \mathbb{N}$, amelyre $d^2 = b^2 - 4ac$. Világos, hogy $d < b$. Másrészt

$$4a \cdot \overline{abc} = 400a^2 + 40ab + 4ac = 400a^2 + 40ab + b^2 - d^2 =$$

$$= (20a + b)^2 - d^2 = (20a + b - d)(20a + b + d).$$

Mivel $\overline{abc}$ prímszám, osztja $(20a + b - d)$-t vagy $(20a + b + d)$-t. Ez ellentmondás, mert $\overline{abc} > 20a + b + d$ és $\overline{abc} > 20a + b - d$. Így $b^2 - 4ac$ nem lehet teljes négyzet, tehát

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \notin \mathbb{Q}. \qquad \otimes$$

14. Megjegyzés. A $b^2 - d^2 = 4ac$ egyenlet tárgyalásából is kiindulhatunk, ahol $c \in \{1, 3, 7, 9\}$ és a egy nemnulla számjegy. Ugyanakkor a tárgyalandó esetek számát lecsökkenti, ha az

$$\{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81\}$$

halmazban lévő teljes négyzetek közt fellépő 4-gyel osztható pozitív különbségeket állítjuk elő, és azokból határozzuk meg az a és c értékét.

4. Feladat. Az $\dfrac{1}{2014! \cdot 2015!}$ racionális szám tizedes tört alakja

$$0, a_1 a_2 \dots a_n (b_1 b_2 \dots b_k),$$

ahol $(b_1 b_2 \dots b_k)$ az ismétlődő szakasz és az n, illetve k értéke a lehető legkisebb. Mennyi az n értéke?

dr. Gecse Frigyes, Kisvárda

Megoldás. A vegyes szakaszos tizedes törtek átalakítási szabályát alkalmazva írhatjuk, hogy

$$0,a_1a_2\dots a_n(b_1b_2\dots b_k) = \frac{\overline{a_1a_2\dots a_nb_1b_2\dots b_k} - \overline{a_1a_2\dots a_n}}{\underbrace{99\dots 9}_{k}\underbrace{00\dots 0}_{n}}.$$

Ha $a_n = b_k$, akkor a szám felírható lenne

$$0,a_1a_2\dots a_{n-1}(a_nb_1b_2\dots b_{k-1})$$

alakban, és ez ellentmondana annak, hogy n a lehető legkisebb. Emiatt az előbbi tört számlálója nem osztható 10-zel, és így $2014!\cdot 2015!$ pontosan n nullában végződik.

$$2014! = 5^{402}\cdot 402!\cdot M_1 = 5^{402+80}\cdot 80!\cdot M_2 =$$

$$= 5^{402+80+16}\cdot 16!\cdot M_3 = 5^{402+80+16+3}\cdot 3!\cdot M_4,$$

ahol $M_1, M_2, M_3, M_4 \in \mathbb{N}$ és egyik sem osztható 5-tel. Ez alapján a 2014! prímtényezős felbontásában az 5 kitevője 501 (ez kiszámolható a Legendre tétel segítségével, az előbbi számolás lényegileg a Legendre tétel bizonyításának a gondolatmenete). Ebből következik, hogy a 2015! prímtényezős felbontásában az 5 kitevője 502, tehát a szorzat felbontásában az 5 hatványkitevője 1003. A 2-es hatványkitevője ennél nagyobb, tehát $n = 1003$. $\circledast$

5. Feladat. Adott a p prímszám és a darab számozott doboz, ahol $a \geq 2$. Felírtuk p darab golyóra a számokat 1-től p-ig és a golyókat valahogyan elhelyeztük a dobozokban. Számold meg, hogy hány különböző elhelyezésre lesz az első dobozban található golyókon szereplő számok összege osztható p-vel! (Egy üres dobozban a golyókon szereplő számok összege egyezményesen 0.)

dr. András Szilárd, dr. Lukács Andor, Kolozsvár

Megoldás. Ha $p = 2$, akkor pontosan azokban az esetekben lesz az első dobozban a golyókon levő számok összege páros, ha az első dobozban nincs golyó, vagy ha csak egyedül a 2-es számozású golyó van. Ez összesen $(a-1)^2 + (a-1)$ módon valósítható meg.

Ha $p \neq 2$, a feladatot a következő modell segítségével oldjuk meg. Egy adott elhelyezésnek feleltessünk meg egy szabályos p oldalú sokszöget a következő módon:

- a sokszög csúcsait ciklikusan megszámozzuk 1-től p-ig, tehát egy csúcs egy számozott golyónak fog megfelelni;
- minden csúcsot „kiszínezünk" az $1, 2, \dots, a$ színek valamelyikével.

Másrészt, ha felírjuk sorban az $1, 2, \dots, p$ számokat egy p oldalú szabályos sokszög csúcsaira, majd kiválasztunk a csúcsok közül k darabot és elforgatjuk a sokszöget a középpontja körül $\frac{360}{a}$ fokkal, akkor a kiválasztott csúcsokon szereplő számok mindegyike 1-gyel nő modulo p. Ez azt jelenti, hogy a kiválasztott k darab csúcson szereplő számok összege pontosan k-val fog növekedni modulo p. Végezzük el az előbbi forgatást $0, 1, 2, \dots, p-1$-szer. Ha eredetileg a kiválasztott csúcsokon levő számok összege s volt, akkor az egyes forgatások után a kapott összegek felveszik rendre az

$$s + 0, s + k, s + 2k, \dots, s + (p-1)k \tag{6}$$

értékeket modulo p. A következő három eset lehetséges:

- ha $k \in \{1, 2, \dots, p-1\}$, akkor az előbbi összegek közül pontosan egy lesz osztható p-vel;
- ha $k = 0$, akkor $s = 0$, és minden új forgatott összeg is 0, vagyis osztható p-vel;
- ha $k = p$, akkor $s = \frac{p(p+1)}{2}$ és minden új forgatott összeg is ugyanennyi (és s osztható p-vel, mert p páratlan).

A k kiválasztott csúcs az első dobozban elhelyezett k golyón szereplő számoknak felel meg.

Ha minden $k \in \{0, 1, 2, \ldots, p\}$ esetén a (6) összegekből pontosan egy lenne osztható p-vel, akkor ez azt jelentené hogy összesen $\frac{a^p}{p}$ olyan dobozolás van, amelyekre az első dobozban levő golyókon a számok összege osztható p-vel. Viszont az előbbi tárgyalás alapján a $k = 0$ és $k = p$ eseteket külön kell vizsgáljuk:

- ha $k = 0$, akkor a fennmaradó $a - 1$ dobozba akárhogyan elhelyezhetjük a p golyót, és ez összesen $(a-1)^p$ féleképpen lehetséges;
- ha $k = p$, akkor minden golyót az első dobozba helyeztünk, tehát összesen 1 lehetőségünk van.

Mivel minden egyes forgatás ezeket az eseteket önmagukba viszi, ezért ezeket le kell vonnunk a forgatások elvégzése előtt, és majd vissza is kell adnunk őket az összes lehetőség megszámolásához. Tehát összesen

$$\frac{a^p - (a-1)^p - 1}{p} + (a-1)^p + 1$$

lehetőségünk van a golyók elhelyezésére úgy, hogy az első dobozban levő golyókon a számok összege osztható legyen p-vel. $\circledast$

15. Megjegyzés. A feladat megoldását másképpen is befejezhetjük: megvizsgáljuk minden $k \in \{0, 1, 2, \ldots, p\}$-re, hogy hányféleképpen lehetséges, hogy az első dobozban pontosan k golyó van és az ezeken szereplő számok összege osztható p-vel. Már láttuk, hogy ez a szám $k = 0$ esetén $(a-1)^p$ és $k = p$ esetén 1. Minden más k értékre viszont $\frac{\binom{p}{k}}{p} \cdot (a-1)^{p-k}$ lehetőségünk van erre: összesen $\binom{p}{k}$ féle módon választhatunk ki k golyót az első dobozba, és minden egyes ilyen kiválasztás egyetlen „forgatása” lesz jó a sokszöges modell alapján. Viszont p ilyen forgatás van, ezért kell osztanunk p-vel. A fennmaradt $p-k$ golyót akárhogyan betehetjük a többi dobozba, innen adódik az $(a-1)^{p-k}$ szorzó. Tehát összesen

$$\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p-1}\binom{p}{k}(a-1)^{p-k}+(a-1)^p+1=\frac{a^p-(a-1)^p-1}{p}+(a-1)^p+1$$

lehetőségünk van a golyók kért dobozolására.

6. Feladat. a) Határozd meg a síknak egységoldalú szabályos háromszögekkel és egységoldalú négyzetekkel való összes szabályos lefödését! Egy lefödés azt jelenti, hogy a sokszögek hézag és átfödés nélkül (egyrétűen) lefödik a síkot. A lefödés szabályos, ha léteznek olyan a, b nullától különböző természetes számok, amelyekre minden keletkező csúcs körül pontosan a darab háromszög és b darab négyzet van, valamilyen rögzített sorrendben.

b) Bizonyítsd be, hogy létezik végtelen sok, páronként különböző, nem feltétlenül szabályos lefödés (az előbbi háromszögekkel és négyzetekkel), amelyekhez hozzárendelhetők az a, b nullától különböző természetes számok úgy, hogy minden keletkező csúcs körül pontosan a darab háromszög és b darab négyzet legyen, de ezeknek a sokszögeknek a sorrendje ne legyen minden csúcspontban ugyanolyan.

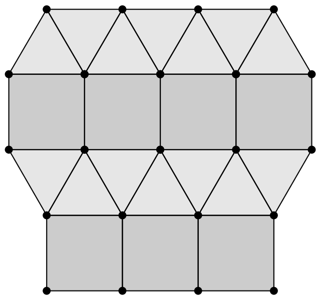
Zsombori Gabriella, Csíkszereda
dr. András Szilárd, dr. Lukács Andor, Kolozsvár

Megoldás. Javasoljuk elolvasni mind a négy évfolyam utolsó feladatának a megoldását az évfolyamok sorszámának növekvő sorrendjében.

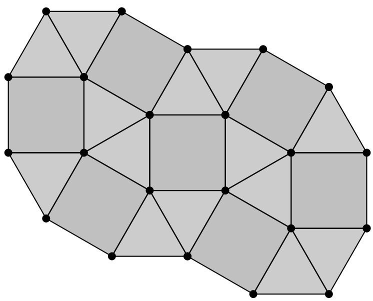
a) Egy csúcspontban négy vagy öt alakzat találkozhat, viszont ha négy találkozna – és lenne közöttük legalább egy háromszög, illetve legalább egy négyzet –, akkor a csúcs körül a megmaradt két szög összege

$$360^\circ - (60^\circ + 90^\circ) = 210^\circ$$

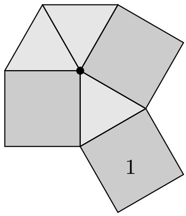
kellene legyen, ami lehetetlen. Tehát minden csúcs körül öt alakzatnak kell találkoznia, és ezért az $a \cdot 60^\circ + b \cdot 90^\circ = 360^\circ$ és $a + b = 5$ egyenletekből álló rendszert kell megoldanunk a pozitív természetes számok halmazán. Az egyetlen megoldás: $a = 3$ és $b = 2$. Következésképpen a csúcsok $(3, 3, 3, 4, 4)$ vagy $(3, 3, 4, 3, 4)$ típusúak lehetnek. Ha a csúcsok $(3, 3, 3, 4, 4)$ típusúak lennének, akkor az első felrajzolt ilyen szerkezetű csúcs egyértelműen meghatározza az összes többit, a szabályos lefödés pedig

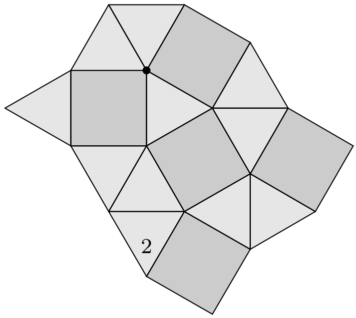


Ha a csúcsok mind $(3, 3, 4, 3, 4)$ típusúak, akkor az első felrajzolt csúcs ismét egyértelműen meghatározza az összes többit és a következő szabályos lefödést kapjuk:



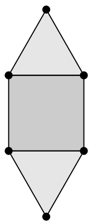
Az egyértelműség azért következik ebben az esetben, mert ha kiindulunk egy $(3, 3, 4, 3, 4)$ típusú csúcsból, akkor a következő bal oldali ábrán az 1-es helyre rajzolt négyzeten kívül minden berajzolt négyzet vagy háromszög egyértelműen meghatározott.



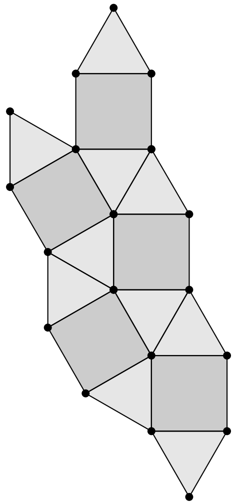


Ha viszont négyzetet választunk az 1-es helyre, utána ismét minden egyértelműen meghatározott, és a 2-es helyre szükségszerűen háromszög kell kerüljön. Ez viszont elrontja a szabályosságot.

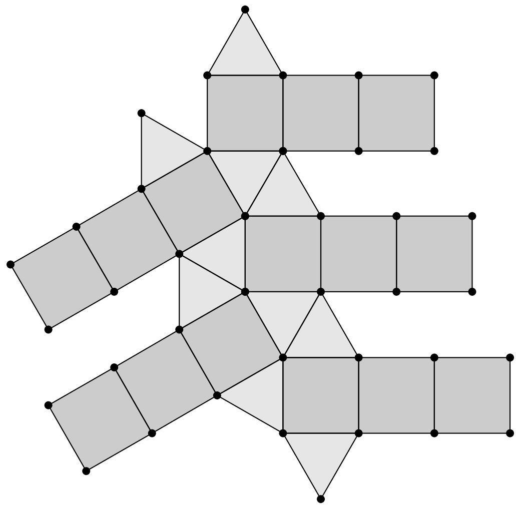
b) Induljunk ki az



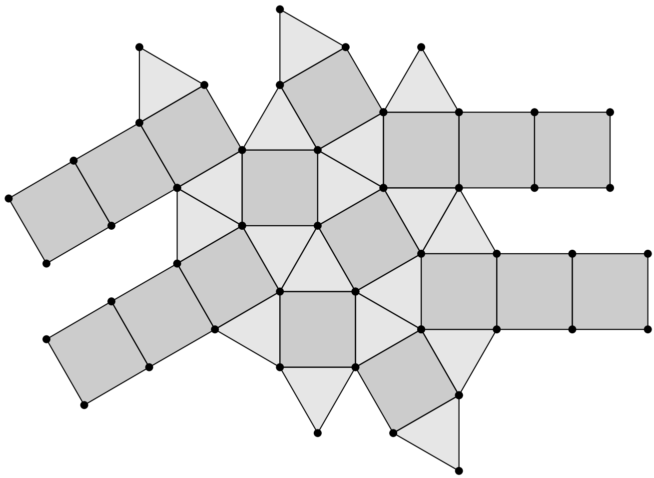
mintázatból és a segítségével hozzuk létre a következő, végtelen magas sávokat:



egy ilyen sáv bal- és jobb oldalát kiegészíthetjük most négyzetekkel (és a fennmaradó sávokban háromszögekkel) az alábbi módon:



Viszont készíthetünk olyan lefödéseket, amelyekben a kiinduló sávunkból $2, 3, 4, \ldots$ darab található egymás mellett:



Tehát végtelen sok különböző kért lefödés létezik. $\circledast$

A versenyen résztvevő diákok névsora Délvidék

IX. osztály

Dragity Teodóra	Zentai Gimnázium, Zenta
Farkas Krisztián	Svetozar Marković Gimnázium, Újvidék
Fenyvesi Abigél	Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta
Fodor Ádám	Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta
Lelik Márk	Svetozar Marković Gimnázium, Újvidék
Szili Emma	Svetozar Marković Gimnázium, Újvidék
Szögi Evelin	Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta
Toldi Teodóra	Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta
Tóth István	Műszaki Iskola, Ada
Tóth Tamás	Becsei Gimnázium, Óbecse

X. osztály

Apró Alexandra	Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta
Dobó Márk	Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta
Horti Katalin	Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta
Juhász Bence	Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta
Mucsi Edina	Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta
Szkocsovszki Zsolt	Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta
Terhes Balázs	Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta

XI. osztály

Csipak Levente	Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta
Kanalas Dávid	Belgrádi Gimnázium, Belgrád
Téglás Ervin	Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta

XII. osztály

Bíró Dominik	Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta
Horti Krisztina	Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta
Illés Miklós	Svetozar Marković Gimnázium, Szabadka
Mátéffy Kristóf	Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta
Tokity Rudolf	Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta

Erdély

IX. osztály

Baja Zsolt	Tamási Áron Gimnázium, Székelyudvarhely
Demény Andrea Bernadett	Márton Áron Gimnázium, Csíkszereda
Demeter Hunor	Tamási Áron Gimnázium, Székelyudvarhely
Fogarasi Levente	Brassai Sámuel Elméleti Líceum, Kolozsvár
Fógel Péter	Kölcsey Ferenc Főgimnázium, Szatmárnémeti
Kádár A. Attila	Baróti Szabó Dávid Középiskola, Barót
Kézdi Örs Sebestyén	Márton Áron Gimnázium, Csíkszereda
Lakatos Angéla	Silvania Főgimnázium, Zilah
Lukács Áron Zsolt	Márton Áron Gimnázium, Csíkszereda
Medgyesi Attila	Székely Mikó Kollégium, Sepsiszentgyörgy
Nagy-Galaczi Tamás	Márton Áron Gimnázium, Csíkszereda
Schefler Barna	Hám János Római Katolikus Teológiai Líceum, Szatmárnémeti
Szabó Ágnes-Kriszta	Bolyai Farkas Elméleti Líceum, Marosvásárhely

Szőcs Marianna	Tamási Áron Gimnázium, Székelyudvarhely
Tankó-Gábor Tihamér	Márton Áron Gimnázium, Csíkszereda
Tőtős György	Silvania Főgimnázium, Zilah
Veress Szilárd	Ady Ende Elméleti Líceum, Bukarest
Veres-Vitályos Álmos	Székely Mikó Kollégium, Sepsiszentgyörgy

X. osztály

Boldizsár Zoltán	Márton Áron Gimnázium, Csíkszereda
Boros Zoltán	Hám János Római Katolikus Teológiai Líceum, Szatmárnémeti
Burus Endre	Márton Áron Gimnázium, Csíkszereda
Élthes Zoltán Zsombor	Székely Mikó Kollégium, Sepsiszentgyörgy
Füstös Ágnes	Báthory István Elméleti Líceum, Kolozsvár
Gábor Csaba	Báthory István Elméleti Líceum, Kolozsvár
Gál Krisztina	Tamási Áron Gimnázium, Székelyudvarhely
Hegedüs Hunor	Tamási Árong Gimnázium, Székelyudvarhely
Máthé Orsolya	Bolyai Farkas Elméleti Líceum, Marosvásárhely
Miklós Botond	Zajzoni Rab István Középiskola, Négyfalu
Papp Andrea Kinga	Márton Áron Gimnázium, Csíkszereda
Rab Zsolt	Székely Mikó Kollégium, Sepsiszentgyörgy
Schefler Gergő	Hám János Római Katolikus Teológiai Líceum, Szatmárnémeti
Sütő Ágoston	Bolyai Farkas Elméleti Líceum, Marosvásárhely

XI. osztály

Beiland Arnold	Nagykárolyi Elméleti Líceum, Nagykároly
Csala Hunor	Márton Áron Gimnázium, Csíkszereda
Csutak Balázs	Székely Mikó Kollégium, Sepsiszentgyörgy
Erősdi Zakariás	Márton Áron Gimnázium, Csíkszereda
Farkas Eszter	Báthory István Elméleti Líceum, Kolozsvár
Gagyi Mátyás	Orbán Balázs Gimnázium, Székelykeresztúr
Gotha Güntter	Németh László Elméleti Liceum, Nagybánya
Gyarmathy Timea	Németh László Elméleti Liceum, Nagybánya
Horváth Ilka	Bolyai Farkas Elméleti Líceum, Marosvásárhely
Juhos Attila	Székely Mikó Kollégium, Sepsiszentgyörgy
Koncz Botond	Márton Áron Gimnázium, Csíkszereda
Kucsván Zsolt Levente	Bolyai Farkas Elméleti Líceum, Marosvásárhely
Lázár János	Kölcsey Ferenc Főgimnázium, Szatmárnémeti

Mester Attila	Székely Mikó Kollégium, Sepsiszentgyörgy
Nagy István	Silvania Főgimnázium, Zilah
Simon Ádám	Székely Mikó Kollégium, Sepsiszentgyörgy
Sólyom Gellért	Márton Áron Elméleti Líceum, Csíkszereda
Szász Apolka	Baróti Szabó Dávid Középiskola, Barót
Székely Attila	Salamon Ernő Gimnázium, Gyergyószentmiklós

XII. osztály

Buidin Thomas	Báthory István Elméleti Líceum, Kolozsvár
Csáki Tamás	Orbán Balázs Gimnázium, Székelykeresztúr
Csegzi Gergely	Bolyai Farkas Elméleti Líceum, Marosvásárhely
Farkas-Páll Kristóf	Ady Endre Elméleti Líceum, Nagyvárad
Forgács Ákos	Horváth János, Margitta
Gál Béni	Székely Mikó Kollégium, Sepsiszentgyörgy
Hegedüs Zsófia	Báthory István Elméleti Líceum, Kolozsvár
Kari Tamás-Zsolt	Báthory István Elméleti Líceum, Kolozsvár
Kelemen Szabolcs	Nagy Mózes Elméleti Líceum, Kézdivásárhely
Kolumbán-Antal György	Tamási Áron Gimnázium, Székelyudvarhely
Lántzky Anna	Márton Áron Gimnázium, Csíkszereda
Lorenzovici Zsombor	Bolyai Farkas Elméleti Líceum, Marosvásárhely
Mag István	Tamási Áron Gimnázium, Székelyudvarhely
Magdó Dorottya	Bolyai Farkas Elméleti Líceum, Marosvásárhely
Megyesfalvi Botond	Bolyai Farkas Elméleti Líceum, Marosvásárhely
Rétyi Dorottya	Márton Áron Gimnázium, Csíkszereda
Szász Tamás-Zsolt	Báthory István Elméleti Líceum, Kolozsvár
Tamási Tímea	Márton Áron Gimnázium, Csíkszereda

Felvidék

IX. osztály

Csenger Géza	Selye János Gimnázium, Komárom
Izsóf Ottó	Selye János Gimnázium, Komárom
Kis Kata Zsófia	Pázmány Péter Gimnázium, Érsekújvár
Lengyel Gergely	Magángimnázium Dunaszerdahely, Dunaszerdahely
Lévárdi Ádám	Pázmány Péter Gimnázium, Érsekújvár
Novák Bernadett	Szondy György Gimnázium, Ipolyság

Pelle Mátyás	I. Krasko Gimnázium, Rimaszombat
Pivoda Tamás	Selye János Gimnázium, Komárom
Rancsó Márk	Selye János Gimnázium, Komárom
Vištan Laura	Márai Sándor Gimnázium, Kassa

X. osztály

Bial Bence	Gimnázium, Fülek
Bukovszky Gergely	Selye János Gimnázium, Komárom
Fábián Vivien	Szondy György Gimnázium, Ipolyság
Kekeň ák Tamás	Márai Sándor Gimnázium, Kassa
Konderka Jessica	Kodály Zoltán Gimnázium, Galánta
Kotiers Mihály	Selye János Gimnázium, Komárom
Lévárdi Balázs	Pázmány Péter Gimnázium, Érsekújvár
Pristaš Viktor	Márai Sándor Gimnázium, Kassa
Simon Bence	Szenczi Molnár Albert Gimnázium, Szenc
Somogyi Pál	Madách Imre Gimnázium, Somorja
Strigáč Viktor	Duna utcai Gimnázium, Pozsony
Szabó Andrea	Selye János Gimnázium, Komárom
Varga Tamás	Selye János Gimnázium, Komárom

XI. osztály

Barto Norbert	Gimnázium, Tornalja
Bernáth Zsuzsanna	Kodály Zoltán Gimnázium, Galánta
Bugár Dávid	Selye János Gimnázium, Komárom
Gujber Gabriella	Szenczi Molnár Albert Gimnázium, Szenc
Kurcz János	Jedlik Ányos Elektrotechnikai Szakközépiskola, Érsekújvár
Markó Péter	Kodály Zoltán Gimnázium, Galánta
Murín Dávid	Márai Sándor Gimnázium, Kassa
Novák László	Szondy György Gimnázium, Ipolyság
Rózsa Tamás	Magángimnázium Dunaszerdahely, Dunaszerdahely
Šárai Tomáš	Selye János Gimnázium, Komárom
Vankó Bence	Kodály Zoltán Gimnázium, Galánta

XII. osztály

Markó Ádám	Selye János Gimnázium, Komárom

Kárpátalja

IX. osztály

Benedek Violetta	Nagydobronyi Középiskola, Nagydobrony
Bilakovics Noémi	Nagygejőci Általános Iskola, Nagygejőc
Fedorszki Ádám	Bethlen Gábor Magyar Gimnázium, Beregszász
Héder Ágota	Tiszakeresztúri Általános Iskola, Tiszakeresztúr
Kis Ferenc	Szőlősgyulai Általános Iskola, Szőlősgyula
Kopasz Rebeka Magdolna	Bethlen Gábor Magyar Gimnázium, Beregszász
Szerednik László Tamás	Szőlősgyulai Általános Iskola, Szőlősgyula
Tar Zoltán	Bethlen Gábor Magyar Gimnázium , Beregszász
Zsoldos Alexandra	Tiszakeresztúri Általános Iskola, Tiszakeresztúr

X. osztály

Kun Laura	Bethlen Gábor Magyar Gimnázium, Beregszász
Levkó Kamilla	Bátyúi Középiskola, Bátyú
Molnár Hajnalka	Bethlen Gábor Magyar Gimnázium, Beregszász
R. Benedek Tamás	Nagydobronyi Középiskola, Nagydobrony

XI. osztály

Fejes Roland	Mezőkaszonyi Középiskola, Mezőkaszony
Iró Viktória	Bethlen Gábor Magyar Gimnázium, Beregszász
Molnár Adrián	Bethlen Gábor Magyar Gimnázium, Beregszász
Rehó Sándor	Ungvári Drugeth Gimnázium, Ungvár
Szilágyi Gábor	Bethlen Gábor Magyar Gimnázium, Beregszász
Trombola Miklós	Bethlen Gábor Magyar Gimnázium, Beregszász
Uszkai Sándor	Nagydobronyi Református Líceum, Nagydobrony

Magyarország

IX. osztály

Baran Zsuzsanna	Fazekas Mihály Gimnázium, Debrecen
Benedeczky Lehel	Vak Bottyán Gimnázium, Paks

Bodolai Előd István	Földes Ferenc Gimnázium, Miskolc
Csapó Márton	Szent Imre Katolikus Gimnázium, Nyíregyháza
Jónás Ádám	Eötvös József Gimnázium és Kollégium, Tata
Lajkó Kálmán	Radnóti Miklós Kísérleti Gimnázium, Szeged
Molnár Roland	Berzsenyi Dániel Gimnázium, Budapest
Török Tímea	Petőfi Sándor Evangélikus Gimnázium, Bonyhád
Tóth Viktor	Táncsics Mihály Gimnázium, Kaposvár
Zsoldos László	Kecskeméti Bányai Júlia Gimnázium, Kecskemét

X. osztály

Bodonhelyi Anna	Kecskeméti Bányai Júlia Gimnázium, Kecskemét
Coulibaly Patrik Sékou	Kecskeméti Bányai Júlia Gimnázium, Kecskemét
Csikós Dominik	Nagyaszonyunk Katolikus Óvoda, Általános Iskola és Gimnázium, Kalocsa
Csorba Benjámin	Szilágyi Erzsébet Gimnázium és Kollégium, Eger
Erdős Márton	Batthyány Lajos Gimnázium, Nagykanizsa
Ferencz Petra	Révai Miklós Gimnázium és Kollégium, Győr
Gracza Dávid	Eötvös József Gimnázium és Kollégium, Tata
Gyulai-Nagy Szuzina	Radnóti Miklós Kísérleti Gimnázium, Szeged
Hornák Bence	Berzsenyi Dániel Gimnázium, Budapest
Horváth Ákos	Vak Bottyán Gimnázium, Paks
Jakó Fanni	Táncsics Mihály Gimnázium, Kaposvár
Nagy Gergely	Boronkay György Műszaki Szakközépiskola és Gimnázium, Vác
Nagy Kartal	Fazekas Mihály Általános Iskola és Gimnázium, Budapest
Németh Flóra Boróka	Keszthelyi Vajda János Gimnázium, Keszthely
Ritter Áron	III. Béla Gimnázium, Baja
Sal Kristóf	Fazekas Mihály Általános Iskola és Gimnázium, Budapest
Schulcz Ferenc	Zrínyi Miklós Gimnázium, Zalaegerszeg
Tomcsányi Gergely	Boronkay György Műszaki Szakközépiskola és Gimnázium, Vác
Wiandt Péter	Petőfi Sándor Evangélikus Gimnázium, Bonyhád

XI. osztály

Almási Péter	Fazekas Mihály Gimnázium, Debrecen

Borsi Tímea Katalin	Bessenyei György Gimnázium, Kisvárda
Hermann Dávid	Kecskeméti Bányai Júlia Gimnázium, Kecskemét
Holczer András	Pécsi Janus Pannonius Gimnázium, Pécs
Knyihár Gábor	Belvárosi Általános Iskola és Gimnázium, Békéscsaba
Mismás Valentin Richárd	Eötvös József Gimnázium és Kollégium, Tata
Nagy Gergely	Révai Miklós Gimnázium és Kollégium, Győr
Nagy-György Pál	Radnóti Miklós Kísérleti Gimnázium, Szeged
Nemes György	Petőfi Sándor Evangélikus Gimnázium, Bonyhád
Porgányi Márk	Batthyány Lajos Gimnázium, Nagykanizsa
Porupsánszki István	Földes Ferenc Gimnázium, Miskolc
Racskó Zsófia	Vak Bottyán Gimnázium, Paks
Schwarcz Tamás	Berzsenyi Dániel Gimnázium, Budapest
Szabó Tímea	Zrínyi Miklós Gimnázium, Zalaegerszeg
Szőke Tamás	Földes Ferenc Gimnázium, Miskolc
Tóth Károly	Boronkay György Műszaki Szakközépiskola és Gimnázium, Vác
Tóth László Gábor	Szent Imre Katolikus Gimnázium, Nyíregyháza
Tulkán Simon	Andrássy Gyula Gimnázium és Kollégium, Békéscsaba
Virág-Tulassay Zsolt	Fazekas Mihály Általános Iskola és Gimnázium, Budapest

XII. osztály

Dobra Gábor	Pécsi Janus Pannonius Gimnázium, Pécs
Egri Richárd	Szilágyi Erzsébet Gimnázium és Kollégium, Eger
Flamich Gergely	Boronkay György Műszaki Szakközépiskola és Gimnázium, Vác
Fonyó Viktória	Keszthelyi Vajda János Gimnázium, Keszthely
Forrás Bence	Berzsenyi Dániel Gimnázium, Budapest
Géczi Péter	Radnóti Miklós Gimnázium, Szeged
Hegyesi János Géza	Erkel Ferenc Gimnázium és Informatikai Szakképző Iskola, Gyula
Horváth Győző	Táncsics Mihály Gimnázium, Kaposvár
Kacz Dániel	Petőfi Sándor Evangélikus Gimnázium és Kollégium, Bonyhád
Kiss Tibor	Széchenyi István Két Tanítási Nyelvű özgazdasági Szakközépiskola, Békéscsaba

Kovács Krisztián	Szilágyi Erzsébet Gimnázium és Kollégium, Eger
Matkovics Gábor	Földes Ferenc Gimnázium, Miskolc
Nagy Bence Kristóf	Fazekas Mihály Általános Iskola és Gimnázium, Budapest
Sándor Krisztián	Táncsics Mihály Gimnázium, Kaposvár
Seress Dániel	Dóczy Gedeon Református Gimnázium, Debrecen
Simkó Irén	Földes Ferenc Gimnázium, Miskolc
Simon Péter	Berzsenyi Dániel Gimnázium, Budapest
Tossenberger Tamás	Fazekas Mihály Általános Iskola és Gimnázium, Budapest
Tóth Nikolett	Krúdy Gyula Középiskola, Győr
Varga Dániel	Fazekas Mihály Gimnázium, Debrecen

A versenyen résztvevő tanárok névsora

Árokszállási Eszter	Vak Bottyán Gimnázium, Paks
Bögözi Mihály	Márton Áron Gimnázium, Csíkszereda
Bíró Bálint	Szilágyi Erzsébet Gimnázium és Kollégium, Eger
Bíró Béla	Székely Mikó Kollégium, Sepsiszentgyörgy
Bíró Zoltán	Salamon Ernő Gimnázium, Gyergyószentmiklós
Bajusz Erzsébet	Bátyúi Középiskola, Bátyú
Bejan Ibolya	Ady Endre Elméleti Líceum, Bukarest
Biró Judit	Székely Mikó Kollégium, Sepsiszentgyörgy
Bors Violetta	Ady Endre Elméleti Líceum, Nagyvárad
Csúsz László	I. Krasko Gimnázium, Rimaszombat
Csata Lili	Nagy István Művészeti Líceum, Csíkszereda
Csikós Pajor Gizella	Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta
Csorba Ferenc	Krúdy Gyula Középiskola, Győr
Dávid Géza	Tamási Áron Gimnázium, Székelyudvarhely
Darvas Anna-Mária	Baróti Szabó Dávid Középiskola, Barót
Deák Éva	Székely Mikó Kollégium, Sepsiszentgyörgy
Egyed László	III. Béla Gimnázium, Baja
Erdős Gábor	Batthyány Lajos Gimnázium, Nagykanizsa
Fekete Zsuzsanna	Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta
Filler Krisztina	Szenczi Molnár Albert Gimnázium, Szenc
Fonyóné Németh Ildikó	Keszthelyi Vajda János Gimnázium, Keszthely
Gajdács Mónika	Szondy György Gimnázium, Ipolyság
Garda-Mátyás Edit	Sapientia Erdélyi Magyar Tudományegyetem, Csíkszereda
Garda-Mátyás Zsolt	Sapientia Erdélyi Magyar Tudományegyetem, Csíkszereda
Hevesi Tibor	Szőlősgyulai Általános Iskola, Szőlősgyula
Hornyák Pál	Pázmány Péter Gimnázium, Érsekújvár
Horváth Attila	Zrínyi Miklós Gimnázium, Zalaegerszeg
Hraskó András	Fazekas Mihály Általános Iskola és Gimnázium, Budapest
Dr. Illyés László	Sapientia Erdélyi Magyar Tudományegyetem, Csíkszereda
Dr. Katz Sándor	Petőfi Sándor Evangélikus Gimnázium, Bonyhád

Kallós Béla	Szent Imre Katolikus Gimnázium, Nyíregyháza
Dr. Kántor Sándor	Dóczy Gedeon Református Gimnázium, Debrecen
Dr. Kántor Sándorné	Dóczy Gedeon Református Gimnázium, Debrecen
Kekeňák Lucia	Márai Sándor Gimnázium, Kassa
Kekeňák Szilvia	Márai Sándor Gimnázium, Kassa
Kicska György	Munkácsi II. Rákóczi Ferenc Középiskola, Munkács
Kiss Géza	Fazekas Mihály Általános Iskola és Gimnázium, Budapest
Klebecskó Elvira	Svetozar Marković Gimnázium, Újvidék
Koczinger Éva	Hám János Római Katolikus Teológiai Líceum, Szatmárnémeti
Konyevity Klára	Műszaki Iskola, Ada
Kormányos Róbert	Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta
Dr. Kosztolányiné Nagy Erzsébet	Szegedi Radnóti Miklós Kísérleti Gimnázium, Szeged
Kovács Attiláné	Földes Ferenc Gimnázium, Miskolc
Kovács Katalin	Márton Áron Gimnázium, Csíkszereda
Kovács Lajos	Tamási Áron Gimnázium, Székelyudvarhely
Kováts Márta	Duna utcai Gimnázium, Pozsony
Kubatov Antal	Táncsics Mihály Gimnázium, Kaposvár
Lányi Vera	Pécsi Janus Pannonius Gimnázium, Pécs
Lakatosné Weszelovszky Éva	Eötvös József Gimnázium és Kollégium, Tata
Liszkay Béla	Madách Imre Gimnázium, Somorja
Dr. Makó Zoltán	Sapientia Erdélyi Magyar Tudományegyetem, Csíkszereda
Márkus Rozália	Mezőkaszonyi Középiskola, Mezőkaszony
Mészáros József	Magángimnázium, Dunaszerdahely
Marczis György	Andrássy Gyula Gimnázium és Kollégium, Békéscsaba
Mastan Eliza	Németh László Elméleti Liceum, Nagybánya
Miklós Melinda	Zajzoni Rab István Középiskola, Négyfalu
Dr. Minda Mihály	Boronkay György Műszaki Szakközépiskola és Gimnázium, Vác
Nagy Örs	Báthory István Elméleti Líceum, Kolozsvár
Nemecskó István	Berzsenyi Dániel Gimnázium, Budapest

Nemes András	Bartók Béla Elméleti Líceum, Temesvár
Dr. Oláh-Gál Róbert	Sapientia Erdélyi Magyar Tudományegyetem, Csíkszereda
Olosz Ferenc	Kölcsey Ferenc Főgimnázium, Szatmárnémeti
Dr. Pál László	Sapientia Erdélyi Magyar Tudományegyetem, Csíkszereda
Dr. Péics Hajnalka	Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta
Péter András	Csiky Gergely Főgimnázium, Arad
Paládi Ilona Remeténé	Szőlősgyulai Általános Iskola, Szőlősgyula
Orvos Viola	Fazekas Mihály Gimnázium, Debrecen
Dr. Salamon Júlia	Sapientia Erdélyi Magyar Tudományegyetem, Csíkszereda
Stan Ágota Irma	Bolyai Farkas Elméleti Líceum, Marosvásárhely
Szaszkó-Bogárné Eckert Bernadett	Radnóti Miklós Kísérleti Gimnázium, Szeged
Szentandrási Ilona	Kodály Zoltán Gimnázium, Galánta
Tóthné Berzsán Gabriella	Táncsics Mihály Gimnázium, Kaposvár
Turdean Katalin	Silvania Főgimnázium, Zilah
Varga József	Kecskeméti Bányai Júlia Gimnázium, Kecskemét
Veres Pál	Földes Ferenc Gimnázium, Miskolc
Vincze Nobert	Gimnázium, Tornalja

A rendezvényen elhangzott előadások:

Dr. András Szilárd, Babeş-Bolyai Tudományegyetem és
Zsombori Gabriella, Sapientia-EMTE:
Kíváncsiság-vezérelt tevékenységek: a tervezéstől a kivitelezésig
Dr. Bodó Julianna, Sapientia-EMTE:
Az információs társadalom és az idő
Dr. Csíkos Csaba, Szegedi Tudományegyetem, SAILS projekt:
A probléma alapú tanulás készségeinek értékelése
Dr. Kása Zoltán, Sapientia-EMTE:
Matematikusok a napos oldalon (Rendhagyó matektörténet)
Dr. Kristály Sándor, Babeş-Bolyai Tudományegyetem:
Thalész tétele görbült terekben
Dr. Oláh-Gál Róbert, Sapientia-EMTE:
Amit eddig nem tudtunk Bolyai Jánosról

Megjegyzés. A „Kíváncsiság-vezérelt tevékenységek: a tervezéstől a kivitelezésig" előadás a **MASCIL** (Mathematics and Science for Life, http://www.mascil-project.eu) és a **PRIMAS** (Promoting Inquiry in Mathematics and Science Education Across Europe) projekt keretén belül elkészített tananyagokra épült. A versenyen minden évfolyam számára kitűzött utolsó feladat szintén a **MASCIL** projekt egyik tananyagának részét fogja képezni.

A feladatok szerzői

A XXIII. Nemzetközi Magyar Matematikaverseny díjazottjai

IX. osztály

I. díj

Lajkó Kálmán	Radnóti Miklós Kísérleti Gimnázium, Szeged
Baran Zsuzsanna	Fazekas Mihály Gimnázium, Debrecen
Tóth Viktor	Táncsics Mihály Gimnázium, Kaposvár

II. díj

Szabó Ágnes Kriszta	Bolyai Farkas Elméleti Líceum, Marosvásárhely
Csenger Géza	Selye János Gimnázium, Komárom
Fógel Péter	Kölcsey Ferenc Főgimnázium, Szatmárnémeti

III. díj

Szögi Evelin	Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta
Schefler Barna	Hám János Római Katolikus Teológiai Líceum, Szatmárnémeti
Fodor Ádám	Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta
Bodolai Előd István	Földes Ferenc Gimnázium, Miskolc
Baja Zsolt	Tamási Áron Gimnázium, Székelyudvarhely
Török Tímea	Petőfi Sándor Evangélikus Gimnázium, Bonyhád
Tőtős György	Silvania Főgimnázium, Zilah
Izsóf Ottó	Selye János Gimnázium, Komárom
Molnár Roland	Berzsenyi Dániel Gimnázium, Budapest

Dicséret

Veress Szilárd	Ady Ende Elméleti Líceum, Bukarest
Tankó-Gábor Tihamér	Márton Áron Gimnázium, Csíkszereda
Fenyvesi Abigél	Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta

Medgyesi Attila	Székely Mikó Kollégium, Sepsiszentgyörgy
Demény Andrea Bernadett	Márton Áron Gimnázium, Csíkszereda
Lakatos Angéla	Silvania Főgimnázium, Zilah
Fogarasi Levente	Brassai Sámuel Elméleti Líceum, Kolozsvár
Lukács Áron Zsolt	Márton Áron Gimnázium, Csíkszereda
Veres-Vitályos Álmos	Székely Mikó Kollégium, Sepsiszentgyörgy
Demeter Hunor	Tamási Áron Gimnázium, Székelyudvarhely
Lengyel Gergely	Magángimnázium, Dunaszerdahely
Csapó Márton	Szent Imre Katolikus Gimnázium, Nyíregyháza
Pivoda Tamás	Selye János Gimnázium, Komárom
Kádár A. Attila	Baróti Szabó Dávid Líceum, Barót

X. osztály

I. díj

Sal Kristóf	Fazekas Mihály Általános Iskola és Gimnázium, Budapest
Schefler Gergő	Hám János Római Katolikus Teológiai Líceum, Szatmárnémeti
Hornák Bence	Berzsenyi Dániel Gimnázium, Budapest

II. díj

Gyulai-Nagy Szuzina	Radnóti Miklós Kísérleti Gimnázium, Szeged
Boros Zoltán	Hám János Római Katolikus Teológiai Líceum, Szatmárnémeti
Burus Endre	Márton Áron Gimnázium, Csíkszereda
Papp Andrea Kinga	Márton Áron Gimnázium, Csíkszereda
Jakó Fanni	Táncsics Mihály Gimnázium, Kaposvár
Kekeňák Tamás	Márai Sándor Gimnázium, Kassa

III. díj

Nagy Gergely	Boronkay György Műszaki Szakközépiskola és Gimnázium, Vác

Erdős Márton	Batthyány Lajos Gimnázium, Nagykanizsa
Németh Flóra Boróka	Vajda János Gimnázium, Keszthely
Bial Bence	Füleki Gimnázium, Fülek
Nagy Kartal	Fazekas Mihály Általános Iskola és Gimnázium, Budapest

Dicséret

Füstös Ágnes	Báthory István Elméleti Líceum, Kolozsvár
Élthes Zoltán Zsombor	Székely Mikó Kollégium, Sepsiszentgyörgy
Coulibaly Patrik Sékou	Bányai Júlia Gimnázium, Kecskemét
Csorba Benjámin	Szilágyi Erzsébet Gimnázium és Kollégium, Eger
Ferencz Petra	Révai Miklós Gimnázium és Kollégium, Győr
Hegedüs Hunor	Tamási Áron Gimnázium, Székelyudvarhely
Miklós Botond	Zajzoni Rab István Középiskola, Négyfalu
Rab Zsolt	Székely Mikó Kollégium, Sepsiszentgyörgy
Ritter Áron	Bajai III. Béla Gimnázium, Baja
Csikós Dominik	Nagyaszonyunk Katolikus Óvoda, Általános Iskola és Gimnázium, Kalocsa
Pristaš Viktor	Márai Sándor Gimnázium, Kassa
Schulcz Ferenc	Zrínyi Miklós Gimnázium, Zalaegerszeg
Tomcsányi Gergely	Boronkay György Műszaki Szakközépiskola és Gimnázium, Vác
Wiandt Péter	Petőfi Sándor Evangélikus Gimnázium, Bonyhád

XI. osztály

I. díj

Szőke Tamás	Földes Ferenc Gimnázium, Miskolc
Holczer András	Janus Pannonius Gimnázium, Pécs
Szabó Tímea	Zrínyi Miklós Gimnázium, Zalaegerszeg
Nagy-György Pál	Radnóti Miklós Kísérleti Gimnázium, Szeged

II. díj

Székely Attila	Salamon Ernő Gimnázium, Gyergyószentmiklós
Almási Péter	Fazekas Mihály Gimnázium, Debrecen
Nagy Gergely	Révai Miklós Gimnázium és Kollégium, Győr

III. díj

Csala Hunor	Márton Áron Gimnázium, Csíkszereda
Juhos Attila	Székely Mikó Kollégium, Sepsiszentgyörgy
Koncz Botond	Márton Áron Gimnázium, Csíkszereda
Schwarcz Tamás	Berzsenyi Dániel Gimnázium, Budapest

Dicséret

Beiland Arnold	Nagykárolyi Elméleti Líceum, Nagykároly
Csutak Balázs	Székely Mikó Kollégium, Sepsiszentgyörgy
Porgányi Márk	Batthyány Lajos Gimnázium, Nagykanizsa
Bugár Dávid	Selye János Gimnázium, Komárom
Porupsánszki István	Földes Ferenc Gimnázium, Miskolc
Mester Attila	Székely Mikó Kollégium, Sepsiszentgyörgy
Nemes György	Petőfi Sándor Evangélikus Gimnázium, Bonyhád
Virág-Tulassay Zsolt	Fazekas Mihály Általános Iskola és Gimnázium, Budapest
Simon Ádám	Székely Mikó Kollégium, Sepsiszentgyörgy
Szilágyi Gábor	Bethlen Gábor Magyar Gimnázium, Beregszász
Tulkán Simon	Andrássy Gyula Gimnázium és Kollégium, Békéscsaba
Kanalas Dávid	Belgrádi Gimnázium, Belgrád
Gagyi Mátyás	Orbán Balázs Gimnázium, Székelykeresztúr
Rózsa Tamás	Magángimnázium, Dunaszerdahely
Sólyom Gellért	Márton Áron Elméleti Líceum, Csíkszereda
Csipak Levente	Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta
Kucsván Zsolt Levente	Bolyai Farkas Elméleti Líceum, Marosvásárhely
Farkas Eszter	Báthory István Elméleti Líceum, Kolozsvár
Gyarmathy Timea	Németh László Elméleti Líceum, Nagybánya
Markó Péter	Kodály Zoltán Gimnázium, Galánta
Szász Apolka	Baróti Szabó Dávid Technológiai Líceum, Barót

XII. osztály

I. díj

Simon Péter	Berzsenyi Dániel Gimnázium, Budapest
Forrás Bence	Berzsenyi Dániel Gimnázium, Budapest

II. díj

Nagy Bence Kristóf	Fazekas Mihály Általános Iskola és Gimnázium, Budapest
Géczi Péter	Radnóti Miklós Gimnázium, Szeged
Dobra Gábor	Janus Pannonius Gimnázium, Pécs
Fonyó Viktória	Vajda János Gimnázium, Keszthely

III. díj

Bíró Dominik	Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta
Horváth Győző	Táncsics Mihály Gimnázium, Kaposvár
Kacz Dániel	Petőfi Sándor Evangélikus Gimnázium és Kollégium, Bonyhád
Tossenberger Tamás	Fazekas Mihály Általános Iskola és Gimnázium, Budapest
Szász Tamás-Zsolt	Báthory István Elméleti Líceum, Kolozsvár

Dicséret

Kolumbán-Antal György	Tamási Áron Gimnázium, Székelyudvarhely
Farkas-Páll Kristóf	Ady Endre Elméleti Líceum, Nagyvárad
Megyesfalvi Botond	Bolyai Farkas Elméleti Liceum, Marosvásárhely
Rétyi Dorottya	Márton Áron Gimnázium, Csíkszereda
Varga Dániel	Fazekas Mihály Gimnázium, Debrecen
Kovács Krisztián	Szilágyi Erzsébet Gimnázium és Kollégium, Eger
Sándor Krisztián	Táncsics Mihály Gimnázium, Kaposvár
Tamási Tímea	Márton Áron Gimnázium, Csíkszereda
Gál Béni	Székely Mikó Kollégium, Sepsiszentgyörgy
Kiss Tibor	Széchenyi István Két Tanítási Nyelvű Közgazdasági Szakközépiskola, Békéscsaba
Matkovics Gábor	Földes Ferenc Gimnázium, Miskolc

A Romániai Oktatási Minisztérium díjai
IX. osztály

Szabó Ágnes-Kriszta	Bolyai Farkas Elméleti Líceum	I. díj
Fógel Péter	Kölcsey Ferenc Főgimnázium	II. díj
Schefler Barna	Hám János Római Katolikus Teológiai Líceum	III. díj
Baja Zsolt	Tamási Áron Gimnázium	Dicséret
Tőtős György	Silvania Főgimnázium	Dicséret
Veress Szilárd	Ady Ende Elméleti Líceum	Dicséret
Tankó-Gábor Tihamér	Márton Áron Gimnázium	Dicséret
Medgyesi Attila	Székely Mikó Kollégium	Dicséret

X. osztály

Schefler Gergő	Hám János Római Katolikus Teológiai Líceum	I. díj
Boros Zoltán	Hám János Római Katolikus Teológiai Líceum	III. díj
Burus Endre	Márton Áron Gimnázium	Dicséret
Papp Andrea Kinga	Márton Áron Gimnázium	Dicséret
Füstös Ágnes	Báthory István Elméleti Líceum	Dicséret
Élthes Zoltán Zsombor	Székely Mikó Kollégium	Dicséret
Hegedüs Hunor	Tamási Árong Gimnázium	Dicséret
Miklós Botond	Zajzoni Rab István Középiskola	Dicséret
Rab Zsolt	Székely Mikó Kollégium	Dicséret

XI. osztály

Székely Attila	Salamon Ernő Gimnázium	I. díj
Csala Hunor	Márton Áron Gimnázium	III. díj
Juhos Attila	Székely Mikó Kollégium	III. díj
Koncz Botond	Márton Áron Gimnázium	III. díj
Beiland Arnold	Nagykárolyi Elméleti Líceum	Dicséret
Csutak Balázs	Székely Mikó Kollégium	Dicséret
Mester Attila	Székely Mikó Kollégium	Dicséret
Simon Ádám	Székely Mikó Kollégium	Dicséret

XII. osztály

Szász Tamás-Zsolt	Báthory István Elméleti Líceum	II. díj
Kolumbán-Antal György	Tamási Áron Gimnázium	III. díj
Farkas-Páll Kristóf	Ady Endre Elméleti Líceum	Dicséret
Megyesfalvi Botond	Bolyai Farkas Elméleti Líceum	Dicséret
Rétyi Dorottya	Márton Áron Gimnázium	Dicséret
Tamási Tímea	Márton Áron Gimnázium	Dicséret
Gál Béni	Székely Mikó Kollégium	Dicséret

Különdíjak

Lajkó Kálmán	IX. o.	A Hargita Gyöngye RT különdíja a versenyen elért legnagyobb pontszámért
Csenger Géza	IX. o.	Hargita Megye Tanácsa különdíja a legeredményesebb diáknak a délvidéki, felvidéki és kárpátaljai régió versenyzői közül
Sal Kristóf	X. o.	Barabási Albert László díj az évfolyamon elért legnagyobb pontszámért
Gyulai-Nagy Szuzina	X. o.	Az RMPSZ különdíja a 4. feladat megoldásáért
Nagy Kartal	X. o.	Demeter Zsuzsa különdíja a 6. feladat megoldásáért
Szőke Tamás	XI. o	Barabási Albert László díj az évfolyamon elért legnagyobb pontszámért
Almási Péter	XI. o.	Csíkszereda különdíja a csíkszeredaiak által javasolt legnehezebb feladat megoldásáért
Simon Péter	XII. o.	Barabási Albert László díj az évfolyamon elért legnagyobb pontszámért és a Sapientia EMTE különdíja az 5. feladat megoldásáért
Nagy Bence Kristóf	XII. o.	A SimpleX Egyesület különdíja az 5. feladat megoldásáért

Fonyó Viktória	XII. o.	Tánczos Barna szenátor különdíja a 6. feladat megoldásáért
Gál Béni	XII. o.	A SimpleX Egyesület különdíja a 6. feladat megoldásáért