Universitatea "Babeş-Bolyai"
Cluj-Napoca
Facultatea de Matematică şi Informatică

Andrea-Éva Molnár

PRINCIPII VARIAŢIONALE CU APLICAŢII

Rezumatul tezei de doctorat

Conducător de doctorat:

Prof. Dr. CSABA GYÖRGY VARGA

Cluj-Napoca, 2013.

Cuprins

Introducere

Calculul variaţional se ocupă de optimizarea unor variabile, care exprimă anumite dimensiuni fizice, de exemplu, timpul, suprafaţa, distanţa etc. Problema caracteristică în domeniul calculului variaţional este de a găsi minimul unei funcţionale de forma

$$F(u) = \int_{\Omega} f(x, u(x), Du(x))dx,$$

unde u este o funcţie reală sau vectorială, ce aparţine anumitor clase de funcţii.

Printre primele probleme formulate în teoria calculului variaţional este *problema brachistocronei* formulată de Johann Bernoulli în anul 1696 (cuvântul grecesc "brachistochrone" înseamnă "timp minim"). Această problemă a stârnit interesul multor matematicieni din acea perioadă, precum Newton, Jacob Bernoulli, Euler, Langrange, Laplace, L'Hospital, Leibnitz.

Tehnicile calcului variaţional modern apar abia la mijlocul secolului al XIX-lea. Un pas important în trecerea de la fizica clasică la cea contemporană reprezintă caracterizarea fenomenelor folosind principiile variaţionale.

Începând din anii 1950, principiile variaţionale ocupă un loc important în studiul ecuaţiilor diferenţiale parţiale neliniare şi au numeroase aplicaţii. A.D. Ioffe şi V.M. Tikhomirov [54] afirmă: "*principiile variaţionale* se referă la rezultatele, care indică proprietatea unei funcţii inferior semicontinue şi mărginite inferior pe un spaţiu metric complet de a poseda perturbaţii arbitrar de mici, iar funcţia perturbată să aibă un minim absolut (şi chiar strict)."

Principiul variaţional al lui Ekeland, stabilit de I. Ekeland în lucrarea sa din 1974 [41], este unul din cele mai importante rezultate ale analizei matematice, fiind un instrument util pentru a rezolva probleme din teoria jocurilor, a controlului optimal, a ecuaţiilor neliniare şi a sistemelor dinamice; a se vedea, de exemplu, lucrările lui J.-P. Aubin, H. Frankowska [12], M. Bianchi şi colab. [16], I. Ekeland [41], [42],

D. G. De Figueiredo [37] etc. Acest principiu furnizează un şir minimizant pentru orice funcţională inferior semicontinuă şi mărginită inferior, în care elementele şirului minimizează un şir corespunzător de perturbaţii ale lui f, ce converge uniform local către f.

După descoperirea acestui principiu al lui Ekeland, au apărut multe generalizări şi formulări echivalente ale acestuia, ca ”teorema drop” a lui Daneš sau teorema petală a lui Penot (a se vedea J. Daneš [34],[35], P.G. Georgiev [47], [48], A.H. Hamel [52], I. Meghea [72], W. Oettli, M. Théra [79], J.-P. Penot [83], L. Yongxing, S. Shuzhong [92] sau Secţiunea 1.3). Pe de altă parte, principiul variaţional al lui Ekeland este echivalent cu teoremele de punct fix ale lui Caristi şi ale lui Tarafdar (J. Caristi [25], E. Tarafdar [90]).

Pentru a obţinerea unor applicaţii noi, principiul variaţional al lui Ekeland şi multe alte principii variaţionale binecunoscute (de exemplu, principiul variaţional al lui Zhong) au fost extinse pentru cazul spaţiilor având distanţe mult mai generale, de exemplu, spaţiile cvasi-metrice. În literatura de specialitate există două tipuri de definiţii pentru noţiunea de cvasi-metrică: 1) definiţia în care se consideră asimetria metricii (a se vedea, de exemplu, S. Al-Homidana şi colab. [1]); 2) definiţia în care se impune o inegalitate relaxată a triunghiului, caz în care cvasi-metrică este numită şi b-metrică(a se vedea I.A. Bakhtin [13], S. Czerwik [32], J. Heinonen [53]). În această teză vom lua în considerare b-metrici. Acest concept a fost introdus de către I.A. Bakthin în [13] şi S. Czerwik în [32]. În ultimii ani un interes din ce în ce mai mare a fost acordat spaţiilor înzestrate cu b-metrici. Au fost stabilite rezultate importante cu aplicaţii în teoria punctului fix, geometrie, calculul variaţional; a se vedea N. Bourbaki, I.A. Bakhtin [13], V. Berinde [15], S. Czerwik [32], S.L. Singh şi colab. [89] etc.

Această teză are ca scop dezvoltarea teoriei referitoare la principiul variaţional al lui Ekeland, precum şi al generalizării acestuia, adică al principiului variaţional al lui Zhong [93], [94]. De asemenea, vom stabili câteva aplicaţii ale acestor rezultate în teoria punctelor fixe şi în studiul problemelor de echilibru.

Una dintre cele mai importante probleme în analiza neliniară este *problema de echilibru*, care se poate formula în felul următor: Fie A şi B două mulţimi nevide şi $f : A \times B \to \mathbb{R}$ o funcţie dată. Problema constă în găsirea unui element $\overline{x} \in A$, astfel încât

$$(EP) \qquad f(\overline{x}, y) \geq 0, \forall y \in B.$$

$\overline{x}$ se numeşte *punctul de echilibru al lui* f pe $A \times B$.

Problema (EP) este un domeniu atractiv de cercetare, având numeroase aplicaţii: [16], [17], [21], [57], [18], [19], [20], [59], [71] etc.

În lucrarea [9], Q. H. Ansari şi colab. au introdus şi au investigat sisteme de probleme de echilibru (abreviat (SEP)).

De la apariţia problemelor (EP) şi (SEP), mulţi autori au fost interesaţi în a extinde principiul variaţional al lui Ekeland la probleme de tipul (EP) şi (SEP). În studiul problemelor de echilibru, de multe ori ne întâlnim cu situaţii în care problema nu admite nicio soluţie, nici chiar dacă este o problemă care apare în practică. Pentru astfel de cazuri principiul variaţional al lui Ekeland oferă o soluţie accesibilă, deoarece asigură existenţa soluţiilor aproximative ale problemelor minimizate pentru funcţii inferior semicontinue (a se vedea, de exemplu, J.P. Aubin [11]). Pe de altă parte, este cunoscut faptul că problemele de minimizare sunt cazuri particulare ale problemelor de echilibru. Pentru detalii referitoare la relaţia dintre principiul variaţional al lui Ekeland şi problemele de echilibru a se vedea lucrările lui A. Amini-Harandi şi colab. [3], Q.H. Ansari [5]-[7], Q.H. Ansari, L.-J. Lin [8], Y. Araya şi colab. [10], M. Bianchi şi colab. [16], respectiv lucrările de referinţă citate în aceste lucrări.

Principiul variaţional al lui Ekeland poate fi aplicat în teoria punctului critic pentru a demonstra diferite rezultate de existenţă şi de multiplicitate. Subliniem aici lucrarea lui D. G. De Figueiredo [37], unde autorul indică modul în care se poate folosi o consecinţă a acestui principiu pentru a deduce teorema Mountain-Pass a lui Ambrosetti şi Rabinowitz [2], precum şi teorema de punct şa şi teorema generalizată Mountain-Pass, stabilită de Rabinowitz (a se vedea [84], respectiv [85]). Teorema Mountain-Pass a lui Ambrosetti şi Rabinowitz pentru funcţii local Lipschitz a fost demonstrată de P. Mironescu şi V. Rădulescu (a se vedea [73], [86]).

Rezultatele menţionate anterior sunt foarte utile în studiul inegalităţilor şi sistemelor de inegalităţi de tip hemivariaţional.

Inegalităţile hemivariaţionale au fost introduse de către P.D. Panagiotopoulos la începutul anilor 1980 ([80],[81]) ca o generalizare a inegalităţilor variaţionale.

De fapt, aceste inegalităţi sunt mult mai mult decât simple generalizări, deoarece o inegalitate hemivariaţională nu este echivalentă cu o problemă de minim. O problemă de inegalitate hemivariaţională devine o problemă de inegalitate variaţională, dacă presupunem că funcţiile considerate sunt convexe.

În urma introducerii inegalitătilor hemivariaţionale a apărut o ramură nouă în analiza neliniară şi anume analiza nenetedă. Noţiunea de bază acestei ramuri este gradientul generalizat al lui Clarke pentru o funcţie local Lipschitz(vezi F.H. Clarke [26]-[29]). Teoria inegalităţilor hemivariaţionale a produs rezultate importante atât în matematica pură, cât şi în cea aplicată; a se vedea monografiile lui Z. Naniewicz şi P.D. Panagiotopoulos [78], D. Motreanu şi P.D. Panagiotopoulos [76], D. Motreanu şi V. Rădulescu [77] etc.

Inegalităţile hemivariaţionale neliniare au fost introduse în anul 2010, de către N. Costea şi V. Rădulescu [30] (vezi de asemenea I. Andrei şi N. Costea [4]), în timp ce primul articol ce se ocupă cu sisteme de inegalităţi hemivariaţionale neliniare este al lui N. Costea şi Cs. Varga [31]. Pentru mai multe detalii în legătură cu studiul acestor sisteme de inegalităţi cititorul poate să consulte, de exemplu, lucrările: B.E. Breckner, A. Horváth şi Cs. Varga [23], A. Kristály [60], [62] şi D. Repovš, Cs. Varga [88].

În studiul acestor tipuri de inegalităţi putem distinge trei abordări diferite: 1) cu ajutorul operatorilor monotoni, respectiv pseudo-monotoni (Z. Liu şi D. Motreanu [70], Z. Naniewicz şi P.D. Panagiotopoulos [78]); 2) cu ajutorul teoriei punctului critic (F. Gazzola şi V. Rădulescu [46], Z. Naniewicz şi P.D. Panagiotopoulos [78], D. Motreanu şi P.D. Panagiotopoulos [76], D. Motreanu and V. Rădulescu [77], A. Kristály [61], [63], Z. Dályai şi Cs. Varga [33], Cs. Varga [91], F. Faraci şi colab. [43]); 3) folosind teoria punctelor fixe (P. D. Panagiotopoulos şi colab. [82], A. Kristály şi Cs. Varga [65], V. Rădulescu şi D. Repovš [87]). Urmărind ultima abordare, vom studia în această teză existenţa soluţiilor unor inegalităţi şi a unor sisteme de inegalităţi de tip hemivariaţional cu ajutorul unor teoreme de punct fix, fără a impune condiţii de monotonicitate. De asemenea, vom sublinia posibilităţile de aplicabilitate a rezultatelor de existenţă obţinute.

Teza cuprinde patru capitole.

Capitolul 1: Noţiuni şi rezultate preliminare

În acest capitol prezentăm noţiunile şi rezultatele pe care le vom folosi în următoarele capitole ale lucrării.

Capitolul 2: Principii variaţionale în spaţii b-metrice cu aplicaţii în teoria punctului fix

Acest capitol se ocupă cu prezentarea generalizărilor principiului variaţional al lui Ekeland în contextul spaţiilor b-metrice complete pentru funcţii cu o singură, respectiv cu două variabile. De asemenea, se prezintă aplicabilitatea acestor principii variaţionale generalizate în teoria punctului fix. Teorema principală a acestui capitol este principiul variaţional al lui Ekeland stabilit în spaţii b-metrice complete pentru funcţii univoce. În prima secţiune, urmând o generalizare comună a principiilor variaţionale ale lui Ekeland şi ale lui Borwein-Preiss, realizată de L. Yongxing şi S. Shuzhong [92], formulăm şi demonstrăm principiul variaţional al lui Ekeland în contextul spaţiilor b-metrice complete pentru funcţii de o variabilă şi apoi pentru funcţii de două variabile. Ca o consecinţă, prezentăm o versiune slabă a principiului variaţional al lui Zhong în spaţii b-metrice complete. O extensie a principiului variaţional al lui Zhong pentru cazul spaţiilor b-metrice complete este obţinută. Secţiunea a doua este dedicată prezentării unor rezultate noi de punct fix în spaţii b-metrice complete, şi anume teorema de punct fix a lui Caristi-Kirk pentru funcţii de o variabilă şi de două variabile. Aceste teoreme pot fi considerate de asemenea aplicaţii în teoria punctului fix ale versiunilor deja stabilite ale principiului variaţional al lui Ekeland, respectiv, forma generalizată a acestuia, în contextul spaţiilor b-metrice complete.

Capitolul 3: Principii variaţionale în spaţii metrice cu aplicaţii la probleme de echilibru

Scopul principal al acestui capitol este extinderea unor rezultate stabilite de către M. Bianchi, G. Kassay şi R. Pini în lucrarea [16] pentru cazul spaţiilor metrice complete fără a impune condiţii de convexitate. În literatura de specialitate, atunci când se studiază existenţa soluţiilor problemelor de echilibru, ipotezele utilizate cel mai frecvent sunt convexitatea domeniului, precum şi convexitatea, monotonia şi anumite condiţii de continuitate slabă ale funcţiei (a se vedea M. Bianchi, R. Pini [18], [19], N. Hadjisavvas şi colab. [51], G. Kassay, J.Kolumbán [58]). E. Blum, W. Oettli [21], precum şi W. Oettli şi M. Théra [79] au fost primii autori care au stabilit un rezultat de existenţă pentru soluţia unei probleme de echilibru în contextul spaţiilor metrice complete. Autorii au demonstrat acest rezultat cu ajutorul principiului variaţional al lui Ekeland, dar fără a impune orice restricţie de convexitate. Aproape zece ani mai târziu, M. Bianchi, G. Kassay şi R. Pini în lucrarea [16] au extins principiul variaţional al lui Ekeland pentru (EP) şi (SEP) într-un spaţiu euclidean fără a impune condiţii de convexitate funcţiei implicate în formularea principiului sau mulţimii, pe care funcţiile sunt definite. Ei au demonstrat că aceste versiuni de echilibru ale principiului variaţional al lui Ekeland asigură existenţa unui punct de echilibru aproximativ pentru problema (EP), respectiv (SEP). Folosind acest rezultat se poate arăta existenţa punctului de echilibru pe mulţimi general închise, eliminând ipoteza de convexitate a mulţimii şi a funcţiei considerate (vezi Secţiunea 1.5). A. Amini-Harandi şi colab. [3] au stabilit versiunea de echilibru a principiului variaţional al lui Ekeland pentru spaţii metrice complete. Autorii s-au concentrat numai pe condiţiile care nu implică niciun concept de semicontinuitate pentru funcţii de două variabile.

Capitolul constă în două secţiuni. În prima secţiune se prezintă relaţia dintre problemele (EP) şi principiul variaţional al lui Ekeland, iar în a doua secţiune se extind toate teoremele obţinute în secţiunea anterioară pentru sisteme. În continuare se indică principiul variaţional al lui Ekeland pentru spaţii metrice complete (pentru problema (EP), respectiv pentru problema (SEP)), fără a impune condiţii de convexitate funcţiilor incluse în formularea principiului, respectiv mulţimii, pe care funcţiile sunt definite. Cu ajutorul unei condiţii de compacticitate impusă anumitor mulţimi, care stau la baza problemei, se arăta că aceste principii garantează că mulţimea soluţiilor problemei (EP), respectiv (SEP), este nevidă. Un alt aspect considerat în studiul problemelor de echilibru constă în localizarea punctului de echilibru. Pornind de la principiul variaţional al lui Zhong, ca o aplicaţie ulterioară a principiilor de bază, se demonstrează rezultate de tip localizare pentru problemele (EP) şi (SEP). La sfârşitul fiecărei secţiuni este accentuată importanţa teoremelor principale din acest capitol, arătând că aceste rezultate sunt tehnici utile în căutarea punctelor de echilibru al inecuaţiilor diferenţiale, respectiv, al sistemelor de inecuaţii diferenţiale (în cazul spaţiilor normate).

Capitolul 4: Tehnici din teoria punctului fix utilizate în studierea unor clase de inegalităţi şi sisteme de inegalităţi de tip hemivariaţional

În acest capitol se studiază o inegalitate variaţional-hemivariaţională, respectiv, un sistem neliniar de inegalităţi de tip hemivariaţional pe mulţimi închise şi convexe.

Referitor la aceste probleme, vom stabili rezultate de existenţă cu ajutorul unor teoreme de punct fix, fără a impune condiţii de monotonie asupra funcţiilor.

În prima secţiune se studiază solvabilitatea unei inegalităţi variaţional-hemivariaţionale pe o mulţime închisă şi convexă (mărginită sau nemărginită). Secţiunea începe cu detalierea ipotezelor şi formularea problemei. Urmează teorema de existenţă a soluţiei sistemului studiat, demonstraţia bazându-se pe o versiune a teoremei de punct fix a lui Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz, dată de K. Fan.

În a doua secţiune se studiază un sistem neliniar de inegalităţi de tip hemivariaţional. După enumerarea ipotezelor necesare şi formularea problemei studiate, se demonstrează existenţa a cel puţin unei soluţii a problemei fără a folosi teoria punctului critic pentru funcţionale nenetede (se aplică teorema de punct fix a lui Lin) şi fără a impune ipoteze de monotonicitate.

Capitolul se încheie cu o secţiune cu aplicaţii a rezultatelor obţinute în secţiunile anterioare: puncte derivate Nash, probleme de tip Schrödinger, precum şi probleme cu funcţii radial simetrice.

Contribuţiile noastre proprii la această teză se bazează pe cinci articole:

- H. Lisei, A. É. Molnár, Cs. Varga [68] - publicat în Journal of Mathematical Analysis and Applications (2010);
- M. Bota, A. É. Molnár, Cs. Varga [22] - publicat în Fixed Point Theory (2011);
- Cs. Farkas, A. É. Molnár [44] - publicat în Journal of Optimization Theory and Applications (2013);
- A. É. Molnár, O. Vas [74] - acceptat în Studia Universitatis Babeş-Bolyai Mathematica;
- Cs. Farkas, A. É. Molnár [45] - trimis spre publicare la Studia Universitatis Babeş-Bolyai Mathematica.

În cele ce urmează vom specifica rezultatele noastre originale:

Capitolul 1:

Lema 1.1.1.

Capitolul 2:
Teoremele: 2.1.1, 2.1.2, 2.1.3, 2.1.4, 2.2.1, 2.2.2;
Lemele: 2.1.1, 2.1.2;
Corolariile: 2.1.1, 2.1.2;
Observaţiile: 2.1.1, 2.1.2, 2.2.1, 2.2.2.

Capitolul 3:
Teoremele 3.1.1, 3.1.2, 3.1.3, 3.2.1, 3.2.2, 3.2.3;
Observaţiile: 3.1.1, 3.1.2, 3.1.3, 3.1.4, 3.2.1;
Definiţiile: 3.1.1, 3.2.1;
Exemplele: 3.1.1, 3.1.2, 3.1.3.

Capitolul 4:
Teoremele 4.1.1, 4.1.2, 4.2.1, 4.3.1, 4.3.2;
Lema: 4.1.1;
Corolariile: 4.3.1, 4.3.2;
Propoziţiile: 4.2.1;
Observaţiile: 4.1.1, 4.2.1, 4.2.2, 4.3.1, 4.3.2;
Exemplele: 4.1.1, 4.1.2, 4.2.1, 4.2.2.

În final, menţionăm alte două articole, care conţin rezultate originale, dar care nu sunt incluse în această teză, deoarece aceste rezultate nu sunt legate în mod direct de subiectul tezei. Una dintre aceste lucrări [A. É. Molnár, *A Nonsmooth Sublinear Elliptic Problem in* $\mathbb{R}^N$ *with Perturbations*, Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math. 57 (1) (2012), 61-68.] se ocupă cu studiul unei probleme de incluziune diferenţială în $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, implicând operatorul p-Laplace şi o expresie $(p-1)$-subliniară, $p > N > 1$. Această problemă a fost studiată de către Kristály, Marzantowicz şi Varga [J. Global Optim. 46 (1) (2010), 49-62.]. Scopul lucrării noastre este de a arăta că în aceleaşi condiţii, o concluzie mai precisă poate fi obţinută, profitând de un rezultat recent al lui Iannizzotto (a se vedea [Set-Valued and Variational Analysis, 19 (2) (2011), 311-327.]). În plus, se arată că problema studiată nu este sensibilă la perturbaţii mici.

În a doua lucrare [Cs. Farkas, A. É. Molnár, Cs. Varga, *Multiple symmetric solutions of the semilinear elliptic problem*, manuscris] studiem o problemă de incluziune diferenţială eliptică semiliniară cu o condiţie de frontieră omogenă de tip Dirichlet pe bila unitate, care depinde de un parametru pozitiv λ. Demonstrăm că pentru valori mari ale lui λ, problema considerată admite cel puţin două soluţii slab simetrice netriviale. Demonstraţia rezultatului de multiplicitate se bazează pe o teoremă generală de tip minimax pentru funcţii local Lipschitz, stabilită în aceeaşi lucrare, precum şi pe o versiune simetrică a principiului variaţional al lui Ekeland, enunţată de M. Squassina [J. London Math. Soc. 85 (2012), 323-348.]

Cuvinte cheie: principiul variaţional al lui Ekeland, principiul variaţional al lui Zhong, teoreme de punct fix de tip Caristi, spaţii b-metrice, condiţia Palais-Smale, problema de echilibru, sisteme de probleme de echilibru, soluţie aproximativă, teoria punctului fix, funcţionale local Lipschitz, inegalităţi variaţional-hemivariaţionale, sisteme de inegalităţi neliniare de tip hemivariaţionale, puncte de echilibru Nash, probleme de tip Schrödinger, funcţii radial simetrice, operator multivoc, funcţii nenetede.

Mulţumiri

În primul rând, aş dori să-mi exprim recunoştinţa faţă de conducătorul meu de doctorat, Prof. Dr. Varga György Csaba, atât pentru şansa de a realiza doctoratul în domeniul calculului variaţional, cât şi pentru ajutorul, răbdarea şi încrederea acordate pe tot parcursul programului doctoral. A fost un privilegiu să studiez sub îndrumarea sa. De asemenea, aş dori să-i mulţumesc pentru oportunitatea de a fi membră în proiectul PN-II-ID-PCE-2008 No. 501, ID 2162 (2009, 2010, 2011).

Mă simt îndatorată membrilor Institutului de Matematică de la Universitatea din Debrecen (Ungaria) pentru amabilitatea lor. Îi sunt recunoscătoare domnului profesor Dr. Muzsnay Zoltán pentru ajutorul său şi pentru îndrumarea profesională pe perioada stagiului de cercetare la această instituţie.

Aş dori să mulţumesc membrilor Facultăţii de Matematică şi Informatică a Universităţii Babeş-Bolyai din Cluj-Napoca pentru oferirea unui mediu plăcut de cercetare. Îmi exprim recunoştinţa faţă de membrii comisiei de îndrumare pe perioada elaborării tezei de doctorat: Prof. Dr. Alexandru Kristály, Prof. Dr. Adrian Petruşel şi Prof. Dr. Radu Precup pentru sugestiile lor valoroase.

Mulţumiri speciale le adresez doamnei Conf. Dr. Hannelore Lisei pentru ajutorul şi îndrumarea ei.

Aş dori să adresez mulţumiri tuturor prietenilor mei, care m-au încurajat în această perioadă. O mulţumire specială este adresată lui Csaba Farkas pentru trei ani remarcabili de colaborare, precum şi pentru prietenia lui. De asemenea, sunt recunoscătoare colegei mele de doctorat, Erika Nagy, prin prezenţa ei, această perioadă devenind mult mai plăcută.

Mulţumesc pentru suportul financiar în timpul studiilor doctorale, asigurat de Proiectul co-finanţat din Fondul Social European prin Programul Operaţional Sectorial pentru Dezvoltarea Resurselor Umane 2007-2013: POSDRU/107/1.5/S/76841, ”Studii doctorale moderne: internaţionalizare şi interdisciplinaritate”.

Mulţumirile cele mai calde sunt adresate mamei şi bunicii mele pentru iubirea, înţelegerea şi răbdarea lor nemărginită. Fără suportul lor, nu aş fi putut să termin teza şi nu aş fi găsit curajul de a depăşi dificultăţile. De asemenea, aş dori să mulţumesc tatălui meu pentru tot. Lucrarea este dedicată *Memoriei Sale*. Sper că această lucrare îl face mândru.

Capitolul 1

Noţiuni şi rezultate preliminare

Scopul acestui capitol este de a reaminti noţiunile şi rezultatele de bază de care avem nevoie în următoarele capitole ale acestei lucrări. În vederea realizării acestui capitol au fost studiate următoarele lucrări: H. Brézis [24]; F.H. Clarke [26]-[29]; Z. Denkowski, S. Migórski, N. S. Papageorgiou, [39], [40]; A. Kristály, V. Rădulescu, Cs. Varga, [64]; A. Kristály, Cs. Varga, [66]; D. Motreanu, P.D. Panagiotopoulos, [76].

1.1 Noţiuni şi proprietăţi fundamentale în diferite spaţii metrice

În această secţiune reamintim definiţia noţiunii de metrică şi b-metrică, precum şi câteva proprietăţi ale acestora.

Definiţia 1.1.1 *(I.A. Bakthin [13], S. Czerwik [32]) Fie X o mulţime şi $s \geq 1$ un număr real dat. Spunem că funcţionala $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ este o b-metrică dacă şi numai dacă pentru orice $x, y, z \in X$ următoarele condiţii sunt satisfăcute:*

1. *$d(x, y) = 0$, dacă şi numai dacă $x = y$;*
2. *$d(x, y) = d(y, x)$;*
3. *$d(x, z) \leq s[d(x, y) + d(y, z)]$.*

Cuplul (X,d) se numeşte spaţiu b-metric.

Lema 1.1.1 *(M. Bota, A. É. Molnár, Cs. Varga, [22]) Fie* (X, d) *un spaţiu b-metric. Presupunem că* (X, d) *este complet. Atunci, pentru orice şir descrescător* $\{F_n\}_{n\geq 1}$ *de submulţimi nevide şi compacte ale lui* X*, adică*

$$F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset ... \supset F_n \supset ... \tag{1.1.1}$$

astfel încât

$$\mathrm{diam}(F_n) \to 0 \text{ când } n \to \infty, \tag{1.1.2}$$

intersecţia $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ *conţine doar un singur element.*

1.2 Elemente de analiză topologică şi convexă

1.3 Principii variaţionale

1.4 Teoreme de punct fix

1.5 Puncte şi probleme de echilibru

1.6 Diferenţiabilitate. Elemente ale teoriei dezvoltate de Clarke

1.7 Spaţiile L^p şi Sobolev

Capitolul 2

Principii variaţionale în spaţii b-metrice cu aplicaţii în teoria punctului fix

În acest capitol se stabilesc extinderi ale principiului variaţional al lui Ekeland în contextul spaţiilor b-metrice complete pentru funcţii de o variabilă şi de două variabile. De asemenea, se indică aplicabilitatea acestor principii variaţionale generalizate în teoria punctului fix.

Capitolul se bazează pe următoarele două lucrări: M. Bota, **A. É. Molnár**, Cs. Varga [22]; Cs. Farkas, **A. É. Molnár** [45].

2.1 Principii variaţionale în spaţii b-metrice

În acest paragraf prezentăm versiunile extinse ale unor principii variaţionale binecunoscute - principiul variaţional al lui Ekeland şi al lui Zhong - în contextul spaţiilor b-metrice complete pentru funcţii de o singură şi de două variabile.

Pentru a obţine aceste rezultate considerăm spaţiul b-metric complet (X, d) astfel încât b-metrica d este continuă. Impunem următoarele condiţii:

(F) Fie $f : X \to \overline{\mathbb{R}}(= \mathbb{R} \cup \{+\infty\})$ o funcţie inferior semicontinuă, proprie şi mărginită inferior.

Introducem următoarea notaţie:

$$\mathcal{F}[x;m] = f(x) + \sum_{n=0}^{m} \frac{1}{s^n} \cdot d(x, x_n).$$

Rezultatul principal este:

Teorema 2.1.1 *(M. Bota, A. É. Molnár, Cs. Varga, [22]) Fie (X, d) un spaţiu b-metric complet cu b-metrica d continuă. Presupunem că funcţia $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ îndeplineşte condiţia* ($\mathbf{F}$). *Atunci, pentru orice $x_0 \in X$ şi $\varepsilon > 0$ astfel încât are loc inegalitatea*

$$f(x_0) \leq \inf_{x \in X} f(x) + \varepsilon,$$

există un şir $\{x_n\} \subset X$ şi un element $x_\varepsilon \in X$, astfel încât

$$x_n \to x_\varepsilon, \ \text{când } n \to \infty$$

$$d(x_\varepsilon, x_n) \leq \frac{\varepsilon}{2^n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\mathcal{F}[x_\varepsilon; +\infty] \leq f(x_0)$$

şi pentru orice $x \neq x_\varepsilon$ avem

$$\mathcal{F}[x; +\infty] > \mathcal{F}[x_\varepsilon; +\infty]. \tag{2.1.1}$$

Observaţia 2.1.1 *Teorema 2.1.1 este versiunea extinsă a principiului variaţional al lui Ekeland pentru spaţii b-metrice complete. În cazul, în care $s = 1$, obţinem versiunea originală a principiului variaţional al lui Ekeland, formulată pentru spaţii metrice complete.*

Rezultatul următor este o consecinţă a teoremei precendente.

Corolarul 2.1.1 *(M. Bota, A. É. Molnár, Cs. Varga, [22]) Considerăm spaţiul b-metric complet (X, d) astfel încât b-metrica d este continuă. Presupunem că funcţia $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ satisface condiţia* ($\mathbf{F}$). *Atunci, pentru orice $\varepsilon > 0$ există un şir $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ şi un element $x_\varepsilon \in X$ astfel încât*

$$x_n \to x_\varepsilon, \quad \text{când } n \to \infty,$$

$$\mathcal{F}[x_\varepsilon; +\infty] \leq \inf_{x \in X} f(x) + \varepsilon$$

şi pentru fiecare $x \in X$ avem

$$\mathcal{F}[x; +\infty] \geq \mathcal{F}[x_\varepsilon; +\infty].$$

În continuare, ca o generalizare a Teoremei 2.1.1, stabilim un principiu variaţional generalizat în spaţii b-metrice. Pentru a deduce acest rezultat impunem ipoteze adiţionale. Presupunem din nou că (X, d) este un spaţiu b-metric complet (b-metrica d este continuă) şi $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ îndeplineşte condiţia $(\mathbf{F})$. Considerăm funcţia continuă şi necrescătoare $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ şi şirul de numere nenegative $\delta_n \subset \mathbb{R}_+$, astfel încât $\delta_0 > 0$. De asemenea, presupunem următoarele:

$(\mathbf{R})$ Funcţia $\rho : X \times X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ satisface

- (i) pentru orice $x \in X$, avem $\rho(x, x) = 0$;
- (ii) pentru fiecare $(y_n, z_n) \in X \times X$, astfel încât $\rho(y_n, z_n) \to 0$ când $n \to \infty$, avem $d(y_n, z_n) \to 0$ când $n \to \infty$;
- (iii) pentru orice $z \in X$, funcţia $y \mapsto \rho(y, z)$ este inferior semicontinuă.

Introducem următoarea notaţie:

$$\mathcal{F}_h[x; m] = f(x) + h(d(x_0, x)) \sum_{n=0}^{m} \delta_n \rho(x, x_n), m \in \overline{\mathbb{N}}.$$

O formă generalizată a Teoremei 2.1.1 este prezentată în continuare:

Teorema 2.1.2 *(Cs. Farkas, A. É. Molnár, [45]) Presupunem că (X, d) este un spaţiu b-metric complet, d este continuă, iar funcţiile $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ şi $\rho : X \times X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ satisfac ipotezele $(\mathbf{F})$, respectiv, $(\mathbf{R})$. Atunci, pentru orice $x_0 \in X$ şi $\varepsilon > 0$ cu*

$$f(x_0) \le \inf_{x \in X} f(x) + \varepsilon,$$

presupunem existenţa unui şir $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ şi al unui element $x_\varepsilon \in X$ astfel încât

$$x_n \to x_\varepsilon, \text{ când } n \to \infty$$

$$h(d(x_0, x_\varepsilon))\rho(x_\varepsilon, x_n) \le \frac{\varepsilon}{2^n \delta_0}, \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}.$$

Dacă $\delta_n > 0$ pentru un număr infinit de $n \in \mathbb{N}$, atunci avem

$$\mathcal{F}_h[x_\varepsilon; +\infty] \le f(x_0),$$

şi pentru orice $x \neq x_\varepsilon$ are loc

$$\mathcal{F}_h[x; +\infty] > \mathcal{F}_h[x_\varepsilon; +\infty].$$

Dacă $\delta_k > 0$ pentru $k \in \mathbb{N}^*$ şi $\delta_j = 0$ pentru fiecare $j > k$, atunci pentru orice $x \neq x_\varepsilon$, există $m \in \mathbb{N}$, $m \geq k$, astfel încât are loc

$$\mathcal{F}_h[x; k-1] + h(d(x_0, x))\delta_k \rho(x, x_m) > \mathcal{F}_h[x_\varepsilon; k-1] + h(d(x_0, x_\varepsilon))\delta_k \rho(x_\varepsilon, x_m).$$

Observaţia 2.1.2 *Dacă în teorema anterioară alegem $h(x) \equiv 1$ şi $\delta_n = \dfrac{1}{s^n}$, atunci obţinem primul nostru rezultat (Teorema 2.1.1). Cu alte cuvinte, pentru orice $x \neq x_\varepsilon$, obţinem inegalitatea* (2.1.1)*, adică*

$$f(x) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{s^n} d(x, x_n) > f(x_\varepsilon) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{s^n} d(x_\varepsilon, x_n).$$

Ultima parte a secţiunii este dedicată prezentării versiunilor extinse ale Teoremelor 2.1.1 şi 2.1.2 la funcţii de două variabile. Similar cu cele prezentate mai sus, introducem câteva simboluri şi notaţii, pe care le vom folosi în continuare. Fie C o submulţime a spaţiului b-metric complet (X, d) (presupunem că d este continuă), $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ o functţie descrescătoare şi $\rho : X \times X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ o funcţie satisfăcând ipoteza (**R**).

În loc de condiţia (**F**), vom presupune următoarele:

(**F2**) Funcţia $f : C \times C \to \mathbb{R}$ satisface următoarele proprietăţi:

- (i) $f(x, \cdot)$ este inferior semicontinuă şi mărginită inferior, pentru orice $x \in C$;
- (ii) $f(z, z) = 0$, pentru fiecare $z \in C$;
- (iii) $f(z, x) \leq f(z, y) + f(y, x)$, pentru orice $x, y, z \in C$.

Vom folosi următoarea notaţie:

$$\overline{\mathcal{F}}_h[y, x; m] = f(y, x) + h(d(x_0, x)) \sum_{n=0}^{m} \delta_n \rho(x, x_n).$$

Teorema 2.1.3 *(Cs. Farkas, A. É. Molnár, [45]) Considerăm spaţiul b-metric complet (X, d) cu b-metrica d continuă şi aplicaţia $f : C \times C \to \mathbb{R}$ ce îndeplineşe condiţia* (**F2**)*. Atunci pentru orice $x_0 \in X$ şi $\varepsilon > 0$, există un şir $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset C$ care converge la un element $x_\varepsilon \in X$, adică*

$$x_n \to x_\varepsilon, \text{ când } n \to \infty,$$

astfel încât

$$h(d(x_0, x_\varepsilon))\rho(x_\varepsilon, x_n) \leq \frac{\varepsilon}{2^n\delta_0},\ n \in \mathbb{N},$$

$$\overline{\mathcal{F}}_h[x_0, x_\varepsilon; 0] \leq 0.$$

Mai mult, pentru orice $x \neq x_\varepsilon$, avem

$$\overline{\mathcal{F}}_h[x_\varepsilon, x; +\infty] - h(d(x_0, x_\varepsilon)) \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n \rho(x_\varepsilon, x_n) > 0.$$

Un caz particular al Teoremei 2.1.3 putem obţine dacă alegem: $h \equiv 1$, $\delta_n = \dfrac{1}{s^n}$ şi $\rho = d$. Se observă că acest rezultat este o generalizare a principiului variaţional al lui Ekeland în spaţii b-metrice complete pentru funcţii de o variabilă (vezi Teorema 2.1.1).

Teorema 2.1.4 *(Cs. Farkas, A. É. Molnár, [45]) Fie (X, d) un spaţiu b-metric complet cu $s > 1$, unde d este continuă. Fie $C \subset X$ o mulţime închisă şi $f : C \times C \to \mathbb{R}$ o funcţie ce satisface* (**F2**)*. Atunci, pentru orice $x_0 \in X$ şi $\varepsilon > 0$ există un şir $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C$ şi un element $x_\varepsilon \in C$ astfel încât $x_n \to x_\varepsilon$, când $n \to \infty$ şi*

$$d(x_\varepsilon, x_n) \leq \frac{\varepsilon}{2^n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$f(x_0, x_\varepsilon) + d(x_\varepsilon, x_0) \leq 0,$$

şi pentru orice $x \neq x_\varepsilon$,

$$f(x_\varepsilon, x) + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{s^i}\, d(x, x_i) - \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{s^i}\, d(x_\varepsilon, x_i) > 0.$$

Încheiem această secţiune cu prezentarea unui caz special al Teoremei 2.1.2. De fapt, acest rezultat poate fi considerat un principiu variaţional slab de tip Zhong (pentru afirmaţia originală a principiului variaţional al lui Zhong a se vedea [93], [94]). Înainte de a prezenta acest rezultat, stabilim două leme tehnice care joacă un rol important în demonstrarea acestui principiu.

Lema 2.1.1 *(Cs. Farkas, A. É. Molnár, [45]) Dacă $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ este o funcţie continuă şi nedescrescătoare şi $x \notin B(x_0; d(x_0, x_\varepsilon))$, atunci*

$$\frac{d(x_0, x)}{1 + g(d(x_0, x))} - s \cdot \frac{d(x_0, x_\varepsilon)}{1 + g(d(x_\varepsilon, x_0))} \leq s \cdot \frac{d(x, x_\varepsilon)}{1 + g(d(x_\varepsilon, x_0))}. \tag{2.1.2}$$

Lema 2.1.2 *(Cs. Farkas, A. É. Molnár, [45]) Dacă* $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *este o funcţie continuă şi nedescrescătoare,* $\frac{g(x)}{x}$ *este descrescătoare pe* $(0, d(x_0, x_\varepsilon)]$*, atunci*

$$\frac{d(x_0, x)}{1 + g(d(x_0, x))} - s \cdot \frac{d(x_0, x_\varepsilon)}{1 + g(d(x_\varepsilon, x_0))} \leq s \cdot \frac{d(x, x_\varepsilon)}{1 + g(d(x_\varepsilon, x_0))}.$$

În continuare arătăm, că în cazul special al Teoremei 2.1.2, putem obţine versiunea originală a principiului variaţional al lui Zhong (vezi, de exemplu C.-K. Zhong [93, 94]). Pentru a stabili acest rezultat alegem şirul δ_n şi funcţiile h, ρ în felul următor: Pentru $n > 0$, fie $\delta_0 = 1$ şi $\delta_n = 0$. Considerăm $\varepsilon, \lambda > 0$ şi $h(t) = \dfrac{\varepsilon}{\lambda(1 + g(t))}$, unde $g : [0, \infty) \to [0, \infty)$ este o funcţie nedescrescătoare. În acest caz, are loc următoarea relaţie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \delta_n \rho(x, x_n) = \delta_0 \rho(x, x_0) = \rho(x, x_0).$$

Dacă convenim ca $\rho = d$, atunci putem considera următoarea formă a Teoremei 2.1.2:

$$f(x) \geq f(x_\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{\lambda(1 + g(d(x_0, x_\varepsilon)))} d(x_\varepsilon, x_0) - \frac{\varepsilon}{\lambda(1 + g(d(x_0, x)))} d(x, x_0).$$

Astfel, din Lema 2.1.1 şi Lema 2.1.2, deducem următorul principiu variaţional slab de tip Zhong în spaţii b-metrice complete.

Corolarul 2.1.2 *(Cs. Farkas, A. É. Molnár, [45]) Fie* $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *o funcţie continuă şi nedescrescătoare. Fie* (X, d) *un spaţiu b-metric complet (b-metrica d este continuă) şi fie* $f : X \to \mathbb{R}$ *o funcţie care îndeplineşte ipoteza* (**F**)*. Atunci, pentru orice* $x_0 \in X$ *şi* $\varepsilon > 0$ *cu*

$$f(x_0) \leq \inf_{x \in X} f(x) + \varepsilon,$$

presupunem existenţa unui şir $\{x_n\} \subset X$ *care converge la un element* $x_\varepsilon \in X$ *astfel încât*

$$h(d(x_0, x_n)) d(x_\varepsilon, x_n) \leq \frac{\varepsilon}{2^n}, \ n \in \mathbb{N}. \tag{2.1.3}$$

Distingem două cazuri:

1. Dacă $x \notin B(x_0, d(x_0, x_\varepsilon))$*, atunci are loc*

$$f(x) \geq f(x_\varepsilon) - s \cdot \frac{\varepsilon}{\lambda(1 + g(d(x_0, x_\varepsilon)))} d(x, x_\varepsilon). \tag{2.1.4}$$

2. Dacă $\dfrac{g(x)}{x}$ *este descrescătoare pe* $(0, d(x_0, x_\varepsilon)]$, *atunci pentru orice* $x \neq x_\varepsilon$, *are loc*

$$f(x) \geq f(x_\varepsilon) - s \cdot \frac{\varepsilon}{\lambda(1 + g(d(x_0, x_\varepsilon)))} d(x, x_\varepsilon).$$

În cele ce urmează presupunem că $g : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ este o funcţie continuă şi nedescrescătoare, aplicaţia $\dfrac{g(x)}{x}$ este descrescătoare şi funcţia $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ este inferior semicontinuă, diferenţiabilă Gâteaux şi nu este identică cu $+\infty$. În acest caz se poate extinde Teorema 2.1 din articolul lui Zhong [93], adică: dacă f este mărginită inferior, atunci pentru $\varepsilon > 0$, oricare ar fi $y \in X$ astfel încât

$$f(y) \leq \inf_{x \in X} f(x) + \varepsilon, \tag{2.1.5}$$

şi pentru fiecare $\lambda > 0$, există $z \in X$ astfel încât

$$f(z) \leq f(y),$$

$$\|f'(z)\| \leq s \cdot \frac{\varepsilon}{\lambda(1 + g(\|z\|))}.$$

Aşadar este posibil să extindem condiţia (PS) slabă introdusă de Zhong în [93], şi putem demonstra că o funcţie mărginită inferior, ce îndeplineşte condiţia (PS) slabă, admite un punct minim.

2.2 Applicaţii în teoria punctului fix

Această secţiune indică importanţa versiunilor extinse ale principiului variaţional al lui Ekeland prezentate în secţiunea precedentă. Vom stabili câteva aplicaţii ale acestor rezultate în teoria punctului fix în contextul spaţiilor b-metrice complete. Vom arăta, că principiul variaţional al lui Ekeland în spaţii b-metrice complete pentru funcţii de o singură şi de două variabile se poate aplica pentru a deduce teoreme de punct fix în contextul spaţiilor b-metrice complete. Această utilitate este dovedită prin două versiuni ale teoremei de punct fix a lui Caristi, formulate în spaţii b-metrice complete, una pentru funcţii de o variabilă, cealaltă pentru funcţii de două variabile, deoarece demonstrarea acestor rezultate devine foarte simplă dacă invocăm versiunile extinse ale principiului variaţional binecunoscut.

Vom folosi aceleaşi notaţii ca în secţiunea anterioară. Presupunem de asemenea că spaţiul b-metric (X, d) este complet, iar b-metrica d este continuă.

Prezentăm o extensie a teoremei de punct fix a lui Caristi în contextul spaţiilor b-metrice pentru funcţii de o variabilă. Menţionăm că principalul ingredient în demonstraţia acestei teoreme este Corolarul 2.1.1.

Teorema 2.2.1 *(M. Bota, A. É. Molnár, Cs. Varga, [22]) Fie (X, d) un spaţiu b-metric complet (cu $s > 1$), astfel încât b-metrica d este continuă. Considerăm operatorul $\varphi : X \to X$ pentru care există o aplicaţie inferior semicontinuă $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, astfel încât*

$$d(u, v) + s\, d(u, \varphi(u)) \geq d(\varphi(u), v)$$

$$\frac{s^2}{s-1} d(u, \varphi(u)) \leq f(u) - f(\varphi(u)), \forall u, v \in X$$

Atunci, φ admite cel puţin un punct fix.

Observaţia 2.2.1 *Dacă alegem $s = 1$, atunci obţinem teorema de punct fix a lui Caristi în spaţii metrice complete (vezi articolele [25], [42]).*

Similar putem formula următoarea teoremă de punct fix de tip Caristi în spaţii b-metrice complete pentru funcţii de două variabile. Menţionăm că vom nota cu ξ suma seriilor convergente $\sum_{n=0}^{\infty} \delta_n$.

Teorema 2.2.2 *(Cs. Farkas, A. É. Molnár, [45]) Fie (X, d) un spaţiu b-metric complet, d fiind o b-metrică continuă, şi fie $\rho : X \times X \to \mathbb{R}_+$ o funcţie continuă. Considerăm operatorul $\varphi : X \to X$ astfel încât există o aplicaţie inferior semicontinuă $f : X \to \mathbb{R}_+$ satisfăcând următoarele ipoteze:*

$$h(d(x_0, \varphi(x)))\rho(\varphi(x), y) - h(d(x_0, x))\rho(x, y) \leq \rho(x, \varphi(x)), \tag{2.2.1}$$

$$\xi\rho(u, \varphi(u)) \leq f(u) - f(\varphi(u)). \tag{2.2.2}$$

Atunci, φ admite cel puţin un punct fix.

Observaţia 2.2.2 *Teorema 2.2.1 este caz particular al Teoremei 2.2.2, deoarece alegând în mod adecvat funcţiile ρ şi h, respectiv, şirul δ_n în Teorema 2.2.2, adică $h \equiv 1, \rho = d$, şi $\delta_n = \frac{1}{s^n}$, obţinem Teorema 2.2.1.*

Capitolul 3

Principii variaţionale în spaţii b-metrice complete cu aplicaţii la probleme de echilibru

Scopul principal al acestui capitol este studiul legăturii dintre celebrul principiu variaţional al lui Ekeland şi problema (EP), respectiv (SEP). Inspiraţi de articolul lui M. Bianchi, G. Kassay şi R. Pini [16], stabilim două versiuni ale principiului variaţional al lui Ekeland în spaţii b-metrice complete (una pentru probleme de echilibru, cealaltă pentru sisteme de probleme de echilibru) fără a impune condiţii de convexitate funcţiei implicate în formularea principiului sau mulţimii, pe care funcţia de două sau de mai multe variabile este definită. Ca aplicaţii ale acestor principii, deducem rezultate de existenţă pentru soluţia problemei de echilibru (EP), respectiv a sistemului de probleme de echilibru (SEP) cu ajutorul condiţiilor de compacticitate pe mulţimile pe care lucrăm.

Rezultatele acestui capitol sunt incluse în următoarea lucrare: Cs. Farkas, **A. É. Molnár**, [44].

3.1 Existenţa şi localizarea punctelor de echilibru pentru funcţii de două variabile

Fie (X, d) un spaţiu metric complet, C o submulţime închisă a lui X, şi $f : C \times C \to \mathbb{R}$ o funcţie. Fie $h : [0, \infty[\to [0, \infty[$ o funcţie necrescătoare. Vom utiliza notaţiile introduse în Capitolul 2.

Mai întâi definim noţiunea de *punct de echilibru* (x_0, h). Denumirea provine din faptul că acest punct de echilibru depinde de un element $x_0 \in C$ şi de o funcţie h.

Definiţia 3.1.1 *(Cs. Farkas, A. É. Molnár, [44]) Fie $f : C \times C \to \mathbb{R}$ o funcţie şi $x_0 \in C$. Spunem că $\tilde{x} \in C$ este un punct de echilibru (x_0, h) al lui f, dacă şi numai dacă*

$$f(\tilde{x}, y) + h(d(x_0, y))d(\tilde{x}, y) \geq 0 \ , \ \forall y \in C. \tag{3.1.1}$$

Rezultatul principal al acestei secţiuni este următoarea teoremă:

Teorema 3.1.1 *(Cs. Farkas, A. É. Molnár, [44]) Fie (X, d) un spaţiu metric complet, $C \subset X$ o mulţime închisă, iar $f : C \times C \to \mathbb{R}$ o aplicaţie pentru care ipoteza* (**F2**) *este îndeplinită. Fie funcţia necrescătoare $h : [0, \infty[\to]0, \infty[$ şi punctul $x_0 \in X$. Atunci, există $\tilde{x} \in C$ astfel încât*

(a) $f(x_0, \tilde{x}) + h(d(x_0, \tilde{x}))d(x_0, \tilde{x}) \leq 0,$

(b) $f(\tilde{x}, x) + h(d(x_0, x))d(x, \tilde{x}) > 0, \forall x \in C, x \neq \tilde{x}.$

În cele ce urmează, vom arăta că există o funcţie ce satisface condiţia (**F2**), dar nu admite niciun punct de echilibru în sensul clasic.

Exemplul 3.1.1 *(Cs. Farkas, A. É. Molnár, [44]) Fie $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x, y) = \frac{x}{1+x} - \frac{y}{y+1}$. Este uşor de observat că funcţia f îndeplineşte toate ipotezele Teoremei 3.1.1. Dacă există un element $x_0 \in \mathbb{R}_+$ astfel încât $f(x_0, y) \geq 0, \forall y \in \mathbb{R}_+$, atunci deducem că $x_0 \geq y, \forall y \in \mathbb{R}_+$. Am ajuns astfel la o contradicţie. Astfel, mulţimea soluţiilor problemei de echilibru (EP) este vidă, dar cu ajutorul Teoremei 3.1.1, putem garanta că există un punct de echilibru (x_0, h) al lui f.*

Aşadar am obţinut un punct de echilibru "apropiat", realizând o perturbare mică asupra funcţiei iniţiale de două variabile.

În următoarele exemple prezentăm câteva funcţii care admit puncte de echilibru.

Exemplul 3.1.2 *(Cs. Farkas, A. É. Molnár, [44]) Fie* $X = \mathbb{R}$. *Fie* C *o submulţime închisă şi mărginită a lui* $\mathbb{R}$ *şi* $h : [0, \infty[\to]0, \infty[$ *definită prin* $h(x) = 1 + e^{-x}$. *Alegem* $x_0 = 0$. *Considerăm* $F : C \times C \to \mathbb{R}$, $F(x, y) = y - x + (1 + e^{-y})|x - y|$ *şi* $f : C \times C \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = y - x$. *Din Teorema 3.1.1 rezultă că* F *admite un punct de echilibru.*

Exemplul 3.1.3 *(Cs. Farkas, A. É. Molnár, [44]) Fie* $X = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ *şi* C *o submulţime închisă şi mărginită a lui* $\mathbb{R}$. *Considerăm funcţia* $h : [0, \infty[\to]0, \infty[$, $h(x) = \frac{1}{1+x}$, *şi fie* $x_0 = 0_{\mathbb{R}^2}$. *De asemenea considerăm* $F : C \times C \to \mathbb{R}$, $F(x, y) = y^N - x^N + \frac{1}{1+\|y\|}\|x - y\|$ *şi* $f : C \times C \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = y^N - x^N$, *unde* $N \geq 1$ *este un număr natural. Folosind Teorema 3.1.1,* F *admite un punct echilibru.*

Observaţia 3.1.1 *(Cs. Farkas, A. É. Molnár, [44]) Oare o funcţie de două variabile* f, *care satisface toate ipotezele Teoremei 3.1.1, ar trebui să fie de forma* $g(y)-g(x)$*? În acest caz, Teorema 3.1.1 s-ar reduce la o versiune îmbunătăţită a principiului variaţional clasic al lui Ekeland.*

Răspunsul este negativ, cum arată următorul exemplu: Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *o funcţie definită prin*

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-|x-y|} + 1 + \sin(y) - \sin(x), & x \neq y, \\ 0, & x = y, \end{cases}$$

şi fie $h : [0, \infty[\to]0, \infty[$ *definită prin* $h(x) = \frac{1}{1+x}$. *Din Teorema 3.1.1 deducem că funcţia*

$$F(x, y) = f(x, y) + \frac{1}{1 + \|y\|}\|x - y\|$$

admite un punct de echilibru (x_0, h), *însă funcţia* f *nu poate fi reprezentată în forma menţionată în întrebare. În acest caz* $C = \mathbb{R}$.

Observaţia 3.1.2 *(Cs. Farkas, A. É. Molnár, [44]) Fie* $X = \mathbb{R}^n$ *înzestrat cu norma euclideană* $d(x, y) = ||x - y||$. *Presupunem că ipotezele Teoremei 3.1.1 au loc. Cu ajutorul acestei teoreme obţinem că există* $\tilde{x} \in C$ *astfel încât*

(i) $f(x_0, \tilde{x}) + h(\|x_0 - \tilde{x}\|)||x_0 - \tilde{x}|| \leq 0$,

(ii) $f(\tilde{x}, x) + h(\|x_0 - x\|)||x - \tilde{x}|| > 0$, $\forall x \in C$, $x \neq \tilde{x}$.

Importanţa Teoremei 3.1.1 constă în faptul că, folosind acest rezultat, putem stabili următorul rezultat de existenţă, asigurând astfel existenţa soluţiilor problemei (EP) pe mulţimi compacte fără a impune cerinţe de convexitate. Impunem însă următoarea cerinţă suplimentară:

($\widetilde{\mathbf{F2}}$) Funcţia $f : C \times C \to \mathbb{R}$ satisface următoarea condiţie:

  (iv) $f(\cdot, y)$ este superior semicontinuă, pentru orice $y \in C$.

Teorema 3.1.2 *(Cs. Farkas, A. É. Molnár, [44]) Fie C o submulţime compactă (convexitatea nu este necesară) a unui spaţiu euclidean şi fie $f : C \times C \to \mathbb{R}$ o funcţie. Dacă condiţiile* (**F2**) *şi* ($\widetilde{\mathbf{F2}}$) *sunt satisfăcute, atunci mulţimea soluţiilor problemei (EP) este nevidă, adică există $\tilde{x} \in C$ astfel încât $f(\tilde{x}, y) \geq 0, \forall y \in C$.*

Observaţia 3.1.3 *(Cs. Farkas, A. É. Molnár, [44]) Menţionăm că în cazul în care alegem $h \equiv \varepsilon$ în Teorema 3.1.1, obţinem [16, Teorema 2.1], stabilită de M. Bianchi, G. Kassay şi R. Pini. Acest lucru subliniază faptul că rezultatul nostru principal (adică Teorema 3.1.1) este o generalizare a Teoremei 2.1 din [16].*

Observaţia următoare accentuează chiar mai mult importanţa Teoremei 3.1.1, arătând că acest rezultat este o tehnică utilă în căutarea punctelor de echilibru ale inecuaţiilor diferenţiale în cazul spaţiilor normate.

Observaţia 3.1.4 *(Cs. Farkas, A. É. Molnár, [44]) Considerăm spaţiul normat X. De asemenea fie $h : [0, \infty[\to]0, \infty[$ o funcţie continuă necrescătoare şi $f : X \times X \to \mathbb{R}$ o funcţie ce îndeplineşte ipotezele Teoremei 3.1.1. Dacă, în plus, presupunem că f este diferenţiabilă Gâteaux în a doua variabilă, atunci rezultă din Teorema 3.1.1 că*

$$f(\tilde{x}, x) + h(d(x_0, x))d(\tilde{x}, x) > 0.$$

Fie $\phi \in X$, $t > 0$, şi $x = \tilde{x} + t\phi$, atunci inegalitatea anterioară se poate scrie sub forma

$$f(\tilde{x}, \tilde{x} + t\phi) + h(||\tilde{x} + t\phi||)t||\phi|| > 0,$$

deci

$$\frac{f(\tilde{x}, \tilde{x} + t\phi)}{t} + h(||\tilde{x} + t\phi||)||\phi|| > 0.$$

Din condiţia $(\mathbf{F2}) - (\mathbf{ii})$, *avem* $f(\tilde{x}, \tilde{x}) = 0$, *prin urmare*

$$\frac{f(\tilde{x}, \tilde{x} + t\phi) - f(\tilde{x}, \tilde{x})}{t} + h(||\tilde{x} + t\phi||)||\phi|| > 0.$$

Dacă $t \to 0$, *rezultă că*

$$\partial_2 f(\tilde{x}, \tilde{x})(\phi) + h(||\tilde{x}||)||\phi|| \geq 0 \text{ pentru orice } \phi \in X. \tag{3.1.2}$$

Deci există un punct de echilibru în sensul Definiţiei 3.1.1, pentru inecuaţii diferenţiale având forma de mai sus.

Ca o consecinţă a Teoremei 3.1.1, prezentăm un principiu variaţional de tip Zhong pentru funcţii de două variabile (pentru principiul original al lui Zhong, a se vedea [93], [94]). Acest rezultat poate fi important din punct de vedere algoritmic, deoarece localizează poziţia punctului de echilibru corespunzător pe o anumită sferă.

Teorema 3.1.3 *(Cs. Farkas, A. É. Molnár, [44]) Fie* (X, d) *un spaţiu metric complet,* $C \subset X$ *o mulţime închisă, şi* $f : C \times C \to \mathbb{R}$ *o aplicaţie ce îndeplineşte condiţia* $(\mathbf{F2})$. *Fie* $g : [0, \infty[\to [0, \infty[$ *o funcţie continuă nedescrescătoare astfel încât*

$$\int_0^\infty \frac{1}{1 + g(r)} dr = \infty. \tag{3.1.3}$$

Fie $x_0 \in C$ *un punct fixat. Atunci, pentru orice* $\varepsilon > 0$ *şi* $y \in C$ *pentru care avem*

$$\inf_{z \in C} f(y, z) > -\varepsilon, \tag{3.1.4}$$

şi pentru fiecare $\lambda > 0$, *există* $x_\varepsilon \in C$ *astfel încât*

(a) $d(x_0, x_\varepsilon) < r_0 + \overline{r}$

(b) $f(x_0, x_\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{\lambda(1 + g(d(x_0, x_\varepsilon)))} d(x_0, x_\varepsilon) \leq 0,$

(c) $f(x_\varepsilon, x) + \frac{\varepsilon}{\lambda(1 + g(d(x_0, x)))} d(x, x_\varepsilon) > 0$, $\forall x \in C$, $x \neq x_\varepsilon$,

unde $r_0 = d(x_0, y)$ *şi* $\overline{r}$ *sunt alese în felul următor*

$$\int_{r_0}^{r_0 + \overline{r}} \frac{1}{1 + g(r)} dr \geq \lambda.$$

3.2 Existenţa şi localizarea punctelor de echilibru pentru sisteme de funcţii

În acest capitol extindem rezultatele obţinute în secţiunea anterioară la un sistem de probleme de echilibru. De-a lungul acestui paragraf vom utiliza notaţiile introduse în Capitolul 2, respectiv în secţiunea anterioară.

Fie m un întreg pozitiv şi fie $I = \{1, 2, ..., m\}$. Fie $C = \prod_{j\in I} C_j$ cu $C_j \subset X_j$ submulţime închisă a spaţiului metric complet (X_j, d_j). Considerăm un sistem de bile deschise (B_j), $j \in I$, în X_j şi vom nota pentru orice $j \in I$ a j-a bilă deschisă cu centrul x_j^0 şi de rază r_j, cu $B_j(x_j^0, r_i) = \{z_j \in X | d(x_j^0, z_j) < r_j\}$. Considerăm funcţiile $f_j : C \times C_j \to \mathbb{R}$, $j \in I$. Un element al mulţimii $C^j = \prod_{j\neq i} C_i$ va fi reprezentat prin x^j; astfel, $x \in C$ poate fi scris $x = (x^j, x_j) \in C^j \times C_j$. Pentru $x \in \prod_{i\in I} X_i$ notaţia $d^*(x_0, x)$ reprezintă distanţa Cebîşev a lui x la x_0, adică,

$$d^*(x_0, x) = \max_{j\in I} d_j(x_0^j, x_j),$$

şi vom considera spaţiul metric $\prod_{i\in I} X_i$, înzestrat cu această metrică.

Fie $h^i : [0, \infty[\to]0, \infty[$ o funcţie continuă, necrescătoare, pentru orice $i \in I$, şi $h : \mathbb{R}_+^m \to \mathbb{R}_+^m$ definită prin $h = (h^1, ..., h^m)$. Definiţia unui punct de echilibru (x_0, h) pentru un sistem de probleme de echilibru este următoarea:

Definiţia 3.2.1 *(Cs. Farkas, A. É. Molnár, [44]) Pentru $i \in I$, fie C_i o submulţime a unui spaţiu oarecare şi fie $C = \prod_{i\in I} C_i$ şi fie $f_i : C \times C_i \to \mathbb{R}, i \in I$. Spunem că $\tilde{x} \in C$ este un punct de echilibru (x_0, h) al funcţiilor $\{f_1, ..., f_m\}$, dacă şi numai dacă*

$$f_i(\tilde{x}, y_i) + h^i(d_i(x_i^0, y_i))d(\tilde{x}^i, y_i)_i \geq 0, \forall\ y_i \in C_i \text{ şi } i \in I.$$

Presupunem că următoarele ipoteze au loc:

($\mathbf{F2_i}$) Fie funcţiile $f_i : C \times C_i \to \mathbb{R}$, $i \in I$, astfel încât

(i) $f_i(x, \cdot) : C_i \to \mathbb{R}$ este inferior semicontinuă şi mărginită inferior, pentru orice $i \in I$;

(ii) $f_i(x, x_i) = 0$, pentru fiecare $i \in I$, şi $x = (x_1, ..., x_m) \in C$;

(iii) $f_i(z, x_i) \leq f_i(z, y_i) + f_i(y, x_i)$, pentru orice $x, y, z \in C$, orice $i \in I$, iar $y = (y^i, y_i)$.

Rezultatul principal al acestei secţiuni este următorul:

Teorema 3.2.1 *(Cs. Farkas, A. É. Molnár, [44]) Fie* $h_i : [0,\infty[\to]0,\infty[$ *o funcţie necrescătoare pentru fiecare* $i \in I$ *şi fie* $h : \mathbb{R}_+^m \to \mathbb{R}_+^m$ *definită prin* $h = (h^1, ..., h^m)$. *Considerăm funcţiile* $f_i : C \times C_i \to \mathbb{R}$, $i \in I$, *unde* $C = \prod_{i \in I} C_i$, $C_i \subset X_i$ *fiind o submulţime închisă a spaţiului metric complet* (X_i, d_i). *Presupunem că pentru orice* $i \in I$, *condiţia* $(\mathbf{F2_i})$ *este îndeplinită de funcţiile* f_i. *Fie* $x^0 = (x_1^0, ..., x_m^0)$ *un element fixat în* C. *Atunci, există* $\tilde{x} \in C$ *astfel încât pentru orice* $i \in I$:

1. $f_i(x^0, \tilde{x}^i) + h^i(\tilde{x}^i) d_i(x_i^0, \tilde{x}^i) \leq 0$,

2. $f_i(\tilde{x}, x_i) + h^i(x_i) d_i(\tilde{x}^i, x_i) > 0$, *când* $x_i \neq \tilde{x}_i$,

Ca o aplicaţie a Teoremei 3.2.1, prezentăm următorul rezultat de existenţă, rezultat ce garantează, fără nici o restricţie de convexitate, că mulţimea soluţiilor problemei (SEP) pe mulţimi compacte este nevidă. Este necesară următoarea cerinţă:

$(\widetilde{\mathbf{F2_i}})$ Funcţia $f_i : C \times C_i \to \mathbb{R}$, $i \in I$ satisface ipoteza următoare:

(iv) $f_i(\cdot, y_i)$ este superior semicontinuă pentru orice $y_i \in C_i$.

Teorema 3.2.2 *(Cs. Farkas, A. É. Molnár, [44]) Dacă, pe lângă cerinţele Teoremei 3.2.1, presupunem că pentru orice* $i \in I$, C_i *este compactă şi pentru* $f_i : C \times C_i \to \mathbb{R}$ *condiţia este satisfăcută* $(\widetilde{\mathbf{F2_i}})$, *atunci următorul sistem de probleme de echilibru*

$$f_i(\tilde{x}, y_i) \geq 0 \ \forall i \in I, \ \forall y_i \in C_i,$$

admite o soluţie $\tilde{x} = (\tilde{x}^1, ..., \tilde{x}^m) \in C$.

Luând în considerare Observaţia 3.1.4, putem deduce un rezultat similar cu cel prezentat în Observaţia 3.1.4, dar mult mai general pentru sisteme de inecuaţii diferenţiale.

Observaţia 3.2.1 *(Cs. Farkas, A. É. Molnár, [44]) Fie* $i \in I$. *Fie* X_i *un spaţiu normat şi* $h^i : [0,\infty[\to]0,\infty[$ *o funcţie continuă necrescătoare şi alegem* $x_i^0 = 0_{X_i}$. *Considerăm funcţia* $f_i : X \times X \to \mathbb{R}$ *astfel încât cerinţele Teoremei 3.2.1 să fie* *îndeplinite. În plus, presupunem că f_i este diferenţiabilă Gâteaux în a doua variabilă, pentru orice $i \in I$. Atunci, din Teorema 3.2.1 rezultă că*

$$f_i(\tilde{x}, x_i) + h(d_i(x_i^0, x_i))d(\tilde{x}_i, x_i) > 0.$$

Fie $\phi_i \in X_i$ un element arbitrar şi alegem $t > 0$ şi $x_i = \tilde{x}_i + t\phi_i$. Inegalitatea anterioară se poate scrie sub forma următoare

$$f_i(\tilde{x}, \tilde{x}_i + t\phi_i) + h^i(||\tilde{x}_i + t\phi_i||_i)t||\phi_i||_i > 0.$$

Astfel,

$$\frac{f_i(\tilde{x}, \tilde{x}_i + t\phi_i)}{t} + h^i(||\tilde{x}_i + t\phi_i||_i)||\phi_i||_i > 0.$$

Din $(\widetilde{\mathbf{F2_i}}) - (\mathbf{ii})$, rezultă că $f_i(\tilde{x}, \tilde{x}_i) = 0$, prin urmare

$$\frac{f_i(\tilde{x}, \tilde{x}_i + t\phi_i) - f_i(\tilde{x}, \tilde{x}_i)}{t} + h^i(||\tilde{x}_i + t\phi_i||_i)||\phi_i||_i > 0.$$

Dacă $t \to 0$, obţinem

$$\partial_2 f_i(\tilde{x}, \tilde{x})(\phi_i) + h^i(||\tilde{x}_i||_i)||\phi_i||_i > 0 \text{ for all } \phi_i \in X_i. \text{ pentru orice } i \in I. \tag{3.2.1}$$

Prin urmare există un punct de echilibru în sensul Definiţiei 3.2.1, pentru un sistem de inecuaţii diferenţiale având forma de mai sus.

Încheiem această secţiune cu un rezultat de localizare pentru punctul $\tilde{x}$ construit în Teorema 3.2.1.

Teorema 3.2.3 *(Cs. Farkas, A. É. Molnár, [44]) Fie $g_i : [0, \infty[\to]0, \infty[$ o funcţie nedescrescătoare, pentru orice $i \in I$, fie $g : \mathbb{R}_+^m \to \mathbb{R}_+^m$ definită prin $g = (g_1, ..., g_m)$ şi*

$$\int_0^\infty \frac{1}{1 + g^i(r)} dr = \infty, \text{ pentru fiecare } i \in I. \tag{3.2.2}$$

Considerăm funcţiile $f_i : C \times C_i \to \mathbb{R}$, $i \in I$, unde $C = \prod_{i \in I} C_i$ şi $C_i \subset X_i$ este o submulţime închisă a spaţiului metric complet (X_i, d_i). Presupunem că f_i satisface condiţia $(\mathbf{F2_i})$, pentru fiecare $i \in I$. Fie $x^0 = (x_1^0, ..., x_m^0) \in C$ un element fixat arbitrar. Atunci, pentru orice $\varepsilon_i > 0$, $i = \overline{1..m}$ şi $y \in C$ pentru care avem

$$\inf_{z_i \in C_i} f_i(y, z_i) > -\varepsilon_i, \tag{3.2.3}$$

şi pentru fiecare $\lambda_i > 0$, există $\tilde{x} \in C$ astfel încât

1. $d_i(x_i^0, \tilde{x}_i) \leq r_0^i + \overline{r}_i$

2. $f_i(x^0, \tilde{x}^i) + \frac{\varepsilon_i}{\lambda_i(1+g^i(d_i(x_i^0,\tilde{x}_i)))} d_i(x_i^0, \tilde{x}_i) \leq 0,$

3. $f_i(\tilde{x}, x_i) + \frac{\varepsilon_i}{\lambda_i(1+g^i(d_i(x_i^0,x_i)))} d_i(\tilde{x}_i, x_i) > 0, \ \forall i \in I,$

unde $r_i^0 = d_i(x_i^0, y_i)$ *şi* $\overline{r}_i$ *sunt alese astfel încât*

$$\int_{r_i^0}^{r_i^0+\overline{r}_i} \frac{1}{1+g^i(r)} dr \geq \lambda_i.$$

Capitolul 4

Tehnici din teoria punctului fix utilizate în studiul diferitelor clase de inegalităţi şi sistemelor de inegalităţi de tip hemivariaţional

În acest capitol vom studia câteva inegalităti şi sisteme de inegalităţi de tip hemivariaţional cu ajutorul teoriei punctului fix, dar fără a impune ipoteze de monotonie. În primele două secţiuni prezentăm contextul abstract în care lucrăm, formulăm problemele ce le vom studia, precum şi rezultatele principale. Ultima secţiune conţine aplicaţii ale rezultatelor obţinute în secţiunile anterioare.

Aceste rezultate apar în următoarele lucrări: H. Lisei, **A. É. Molnár**, Cs. Varga [68], **A. É. Molnár**, O. Vas, [74], cel de-al doilea articol fiind un rezultat al colaborării noastre cu Institutul de Matematică al Universităţii din Debrecen (Ungaria).

4.1 Asupra unei probleme variaţional-hemivariaţionale fără proprietatea de compactitate

În această secţiune se cercetează solvabilitatea unei probleme variaţional-hemivariaţionale pe o mulţime închisă şi convexă (fie mărginită sau nemărginită) fără a utiliza teoria punctului critic.

Fie $(X, \|\cdot\|)$ un spaţiu Banach şi X^* dualul topologic al lui X. Notăm cu $\langle \cdot, \cdot \rangle$ perechea de dualitate între X şi X^*. Fie $\Omega \subseteqq \mathbb{R}^n$ un domeniu nemărginit. Alegem p astfel încât $1 < p < n$ şi $p^* = \dfrac{np}{n-p}$. Vom studia problema următoare:

(V-HI) Se caută $u \in K$ astfel încât

$$\langle Au, v-u \rangle + \int_\Omega f(x, u(x))(v(x)-u(x))dx + \int_\Omega j^0(x, u(x); v(x)-u(x))dx \geq 0,$$

pentru orice $v \in K$, unde $K \subseteqq X$ este o mulţime, iar A, f, j sunt funcţionale date, care satisfac anumite condiţii.

Pentru a stabili existenţa a cel puţin unei soluţii pentru problema **(V-HI)**, impunem următoarele ipoteze:

(CT) Presupunem că pentru $s \in [p, p^*]$ scufundarea $X \hookrightarrow L^s(\Omega)$ este *continuă*, adică există $C \geq 0$ astfel încât $\|x\|_{L^s(\Omega)} \leq C\|x\|, \forall x \in X$.

(CP) Presupunem că pentru $s \in (p, p^*)$ scufundarea $X \hookrightarrow L^s(\Omega)$ este *compactă*, ceea ce înseamnă că există un operator liniar şi compact $T : X \to L^s(\Omega)$, adică pentru orice şir mărginit $\{x_n\}$ în X există un subşir $\{Tx_n\}$, care este convergent în $L^s(\Omega)$. Pentru simplitate vom scrie x_n în loc de Tx_n.

(A1) Fie $A : X \to X^*$ un operator cu proprietatea: pentru orice şir $\{u_n\}_n$ în X, care converge slab la $u \in X$, are loc inegalitatea

$$\langle Au, u-w \rangle \leq \liminf_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n - w \rangle, \text{ pentru fiecare } w \in X.$$

(A2) Există $\lambda := \inf_{u \in X\setminus\{0\}} \dfrac{\langle Au, u \rangle}{\|u\|^p} > 0.$

(f1) Fie $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie Carathéodory astfel încât pentru $\alpha > 0$ are loc

$$|f(x,y)| \leq \alpha |y|^{p-1} + \beta(x),$$

pentru a.p.t. $x \in \Omega$ şi pentru orice $y \in \mathbb{R}$, unde $\beta \in L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$.

(f2) Presupunem că constantele din condiţiile **(f1)** şi **(A1)** satisfac relaţia $\alpha C_p^p < \lambda$.

(j1) Presupunem că $j : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcţie Carathéodory, local Lipschitz în raport cu a doua variabilă, şi că există $c > 0, r \in [p, p^*)$ astfel încât

$$|\xi| \leq c(|y|^{p-1} + |y|^{r-1})$$

pentru a.p.t. $x \in \Omega$, pentru orice $y \in \mathbb{R}$ şi $\xi \in \partial j(x,y)$, unde $\partial j(x,y)$ este gradientul generalizat al lui $j(x,\cdot)$ în $y \in \mathbb{R}$;

(j2) Există $k \in L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$ astfel încât

$$|j^0(x,y;-y)| \leq k(x)|y| \text{ pentru orice } x \in \Omega, y \in \mathbb{R},$$

unde $j^0(x,u;z)$ reprezintă derivata direcţională generalizată în punctul $u \in \mathbb{R}$ în direcţia $z \in \mathbb{R}$.

Pezentăm în continuare două exemple de operatori, care satisfac condiţia **(A1)**.

Exemplul 4.1.1 *(H. Lisei, A. É. Molnár, Cs. Varga, [68]) Fie $A' : X \to X^*$ un operator liniar, continuu şi pozitiv (adică $\langle A'u, u\rangle \geq 0$ pentru orice $u \in X$). Din aceste ipoteze rezultă că A' este slab secvenţial continuu şi condiţia **(A1)** este satisfăcută.*

Exemplul 4.1.2 *(H. Lisei, A. É. Molnár, Cs. Varga, [68]) Presupunem că forma biliniară $a : X \times X \to \mathbb{R}$ este compactă, adică pentru orice şiruri $\{u_n\}$ şi $\{v_n\}$ din X astfel încât $u_n \rightharpoonup u$ şi $v_n \rightharpoonup v$ $(u, v \in X)$ rezultă că $a(u_n, v_n) \to a(u, v)$. Operatorul $A'' : X \to X^*$ definit prin $\langle A''u, v\rangle = a(u, v)$ pentru orice $u, v \in X$ satisface ipoteza **(A1)**.*

În cele ce urmează vom stabili două rezultate de existenţă referitoare la problema **(V-HI)**, demonstraţiile bazându-se pe teorema Fan-Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz (vezi [49, Teorema 8.2]). O altă metodă este folosirea unui principiu elementar de aplicaţii KKM dat de A. Granas şi M. Lassonde în [50, Teorema 5.2] în contextul spaţiilor Banach super-reflexive. Pe lângă versiunea lui K. Fan a teoremei Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz, vom avea nevoie de lema următoare pentru a demonstra rezultatele principale.

Lema 4.1.1 *(H. Lisei, A. Molnár, Cs. Varga, [68]) Fie X un spaţiu Banach.*

(1) *Presupunem că ipoteza **(j1)** este satisfăcută şi că X_1 şi X_2 sunt submulţimi nevide ale lui X.*

(1a) *Dacă scufundarea* $X \hookrightarrow L^s(\Omega)$ *este continuă pentru orice* $s \in [p, p^*]$, *atunci aplicaţia*

$$(u, v) \in X_1 \times X_2 \mapsto \int_\Omega j^0(x, u(x); v(x))dx \in \mathbb{R}$$

este superior semicontinuă.

(1b) *În plus, dacă scufundarea* $X \hookrightarrow L^s(\Omega)$ *este compactă, pentru orice* $s \in [p, p^*)$, *atunci aplicaţia precedentă este slab superior semicontinuă.*

(2) *Presupunem că are loc cerinţa* ***(f1)*** *şi scufundarea* $X \hookrightarrow L^p(\Omega)$ *este compactă. Atunci, pentru orice* $v \in X$ *aplicaţia*

$$u \in X \mapsto \int_\Omega f(x, u(x))(v(x) - u(x))dx \in \mathbb{R}$$

este slab superior semicontinuă.

Primul rezultat de existenţă este următorul:

Teorema 4.1.1 *(H. Lisei, A. Molnár, Cs. Varga, [68]) Presupunem că* X *este un spaţiu Banach reflexiv şi* $K \subseteq X$ *este o mulţime nevidă, închisă, convexă şi mărginită şi că ipotezele* ***(CT)****,* ***(CP)****,* ***(A1)****,* ***(f1)****,* ***(j1)*** *sunt îndeplinite. Atunci, problema* ***(V-HI)*** *admite cel puţin o soluţie.*

Observăm că în teorema anterioară mulţimea K este mărginită. În cele ce urmează, vom discuta cazul când K este nemărginită. Fără a pierde din generalitate, presupunem că $0 \in K$ şi pentru orice număr întreg pozitiv n fie $K_n := \{w \in K : \|w_n\| \leq n\}$. Astfel, $0 \in K_n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Fixăm $n \in \mathbb{N}$. Deoarece K este o submulţime nevidă, închisă, convexă şi nemărginită a lui X, utilizând Teorema 4.1.1 rezultă că există $u_n \in K_n$ astfel încât pentru orice $v \in K_n$ are loc următoarea inegalitate:

$$\begin{aligned} \langle Au_n, v - u_n \rangle &+ \int_\Omega f(x, u_n(x))(v(x) - u_n(x))dx \\ &+ \int_\Omega j^0(x, u_n(x); v(x) - u_n(x))dx \geq 0. \end{aligned} \tag{4.1.1}$$

Teorema 4.1.2 *(H. Lisei, A. Molnár, Cs. Varga, [68]) Presupunem că* X *este un spaţiu Banach reflexiv şi* $K \subseteq X$ *este o mulţime nevidă, închisă şi convexă şi că* *ipotezele **(CT)**, **(CP)**, **(A1)**, **(A2)**, **(f1)**, **(f2)**, **(j1)**, **(j2)** sunt îndeplinite. De asemenea considerăm şirul $u_n \in K_n$ astfel încât inegalitatea* (4.1.1) *are loc pentru orice $n \geq 1$. Atunci, problema **(V-HI)** are cel puţin o soluţie.*

Observaţia 4.1.1 *(H. Lisei, A. Molnár, Cs. Varga, [68]) Dacă $0 \in K$ şi*

$$\langle A0, v\rangle + \int_\Omega f(x,0)v(x)dx + \int_\Omega j^0(x,0;v(x))dx \geq 0 \text{ pentru orice } v \in K, \quad (4.1.2)$$

atunci este evident că zero este o soluţie a inegalităţii (4.1.2)*. Dacă aplicăm Teoremele 4.1.1 şi 4.1.2 pentru* (4.1.2)*, existenţa soluţiei netriviale nu poate fi asigurată fără condiţii suplimentare specifice.*

4.2 Existenţa soluţiilor unui sistem de inegalităţi neliniare de tip hemivariaţional

Scopul principal al acestei secţiuni este studiul unui sistem de inegalităţi neliniare de tip hemivariaţional şi demonstrarea existenţei a cel puţin unei soluţii pentru sistemul studiat pe o mulţime închisă şi convexă (fie mărginită sau nemărginită) fără a impune ipoteze de monotonie sau a utiliza teoria nenetedă a punctului critic.

Fie $X_1, \ldots, X_n$ spaţii Banach reflexive, $Y_1, \ldots, Y_n$ spaţii Banach şi $D_i \subseteq X_i$, pentru $i \in \{1, \ldots, n\}$ mulţimi mărginite, închise şi convexe, unde $n \in \mathbb{Z}_+$. În cele ce urmează vom nota cu X_i^* şi Y_i^* spaţiile duale topologice ale lui X_i, respectiv Y_i, pentru orice $i \in \{1, \ldots, n\}$. Presupunem că pentru $i \in \{1, \ldots, n\}$ există operatori liniari şi compacţi $A_i : X_i \to Y_i$, funcţionale neliniare $\phi_i : X_1 \times \ldots \times X_i \times \ldots \times X_n \times X_i \to \mathbb{R}$ şi funcţionale de o variabilă $\eta_i : X_i \times X_i \to X_i$. Fie $J : Y_1 \times \ldots \times Y_n \to \mathbb{R}$ o funcţională local Lipschitz regulară. În acestă secţiune vom folosi următoarele notaţii:

- $X = X_1 \times \ldots \times X_n$, $Y = Y_1 \times \ldots \times Y_n$ şi $D = D_1 \times \ldots \times D_n$;
- $\overline{u}_i = A_i(u_i)$, $\overline{\eta}_i(u_i, v_i) = A_i(\eta_i(u_i, v_i))$, pentru orice $i = \overline{1, n}$;
- $u = (u_1, \ldots, u_n)$ şi $\overline{u} = (\overline{u}_1, \ldots, \overline{u}_n)$;
- $\eta(u, v) = (\eta_1(u_1, v_1), \ldots, \eta_n(u_n, v_n))$ şi $\overline{\eta}(u, v) = (\overline{\eta}_1(u_1, v_1), \ldots, \overline{\eta}_n(u_n, v_n))$;

- $\Phi : X \times X \to \mathbb{R}, \quad \Phi(u, v) = \sum_{i=1}^{n} \phi_i(u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_n, \eta_i(u_i, v_i)).$

Impunem următoarele condiţii:

(H) Pentru orice $i \in \{1, \ldots, n\}$, aplicaţia $\eta_i(\cdot, \cdot) : X_i \times X_i \to X_i$ satisface condiţiile următoare:

(i) $\eta_i(u_i, u_i) = 0$, pentru orice $u_i \in X_i$;

(ii) $\eta_i(u_i, \cdot)$ este un operator liniar pentru orice $u_i \in X_i$;

(iii) pentru orice $v_i \in X_i, \eta_i(u_i^m, v_i) \rightharpoonup \eta(u_i, v_i)$ dacă $u_i^m \rightharpoonup u_i$.

(Φ) Pentru orice $i \in \{1, \ldots, n\}$, funcţionala $\phi_i : X_1 \times \ldots \times X_i \times \ldots \times X_n \times X_i \to \mathbb{R}$ satisface

(i) $\phi_i(u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_n, 0) = 0$ pentru orice $u_i \in X_i$;

(ii) pentru orice $v_i \in X_i$, aplicaţia $(u_1, \ldots, u_n) \rightsquigarrow \phi_i(u_1, \ldots, u_n; \eta_i(u_i, v_i))$ este slab superior semicontinuă;

(iii) aplicaţia $v_i \rightsquigarrow \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \phi_i(u_1, \ldots, u_n; \eta_i(u_i, v_i))$ este convexă pentru orice $(u_1, \ldots, u_n) \in X_1 \times \ldots \times X_n$.

Observaţia 4.2.1 *(A. É. Molnár, O. Vas, [74]) Deoarece $J^0_{,i}(u_1, \ldots, u_n; v_i)$ este convexă şi $\eta_i(u_i, \cdot)$ este liniară, pentru orice $i \in \{1, \ldots, n\}$ şi pentru orice $(u_1, \ldots, u_n) \in X_1 \times \ldots \times X_n$, rezultă că aplicaţia $v_i \rightsquigarrow J^0_{,i}(u_1, \ldots, u_n; \eta_i(u_i, v_i))$ este convexă.*

Folosind următoarele două exemple, arătăm că există o funcţie care satisface condiţiile **(H) (i)-(iii)**.

Exemplul 4.2.1 *(A. É. Molnár, O. Vas, [74]) Pentru $i \in \{1, \ldots, n\}$ alegem funcţia $\eta_i : X_i \times X_i \to X_i$ în felul următor:*

$$\eta_i(u_i, v_i) = v_i - u_i, \text{ pentru orice } u_i, v_i \in X_i.$$

*În acest caz $\eta_i(u_i, v_i)$ satisface condiţiile **(H)(i)-(iii)**. Cu ajutorul acestei alegeri obţinem problema formulată în articolul lui D. Repovš şi Cs. Varga [88].*

Exemplul 4.2.2 *(A. É. Molnár, O. Vas, [74]) Fie $B_i : X_i \to X_i$ un operator liniar compact, $\alpha_i > 0, \beta_i \in X_i$, $i \in \{1, \ldots, n\}$. Definim funcţia $f : X_i \to X_i$ prin $f_i(x) = \alpha_i B_i(x) + \beta_i$. Dacă considerăm funcţia $\eta_i : X_i \times X_i \to X_i$ în felul următor:*

$$\eta_i(u_i, v_i) = f_i(v_i) - f_i(u_i), \text{ pentru orice } u_i, v_i \in X_i, i \in \{1, \ldots, n\},$$

*atunci este evident că ipotezele **(H) (i)-(iii)** rămân adevărate pentru η_i.*

În această secţiune studiem existenţa a cel puţin unei soluţii pentru următorul sistem de inegalităţi neliniare de tip hemivariaţional:

(NHLIS) Se caută $(u_1, \ldots, u_n) \in D_1 \times \ldots \times D_n$ astfel încât

$$\begin{cases} \phi_1(u_1, \ldots, u_n, \eta_1(u_1, v_1)) + J^0_{,1}(\overline{u}_1, \ldots, \overline{u}_n; \overline{\eta}_1(u_1, v_1)) \geq 0 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \phi_n(u_1, \ldots, u_n, \eta_n(u_n, v_n)) + J^0_{,n}(\overline{u}_1, \ldots, \overline{u}_n; \overline{\eta}_n(u_n, v_n)) \geq 0 \end{cases}$$

pentru orice $(v_1, \ldots, v_n) \in D_1 \times \ldots \times D_n$.

D. Repovš şi Cs. Varga au stabilit în articolul [88] un rezultat de existenţă pentru o clasă generală de sisteme de inegalităţi hemivariaţionale. Teorema următoare extinde acest rezultat şi furnizează condiţii suficiente pentru existenţa soluţiilor problemei **(NHLIS)**. În articolul [88] autorii furnizează două demonstraţii: una foloseşte versiunea Ky Fan a teoremei Knaster-Kuratowsky-Mazurkiewicz, iar cealaltă este bazată pe teorema de punct fix a lui Tarafdar pentru multifuncţii (vezi E. Tarafdar [90]). Abordarea noastră este puţin diferită, deoarece noi folosim teorema de punct fix a lui Lin (a se vedea [67, Theorem 1.]).

În continuare prezentăm rezultatul principal al acestei secţiuni pentru cazul în care mulţimile D_i sunt nevide, mărginite, închise şi convexe.

Teorema 4.2.1 *(A. Molnár, O. Vas [74]) Considerăm mulţimile nevide, mărginite, închise şi convexe $D_i \subset X_i$ pentru orice $i \in \{1, \ldots, n\}$. Dacă condiţiile **(H)** şi **(Φ)** sunt îndeplinite, atunci sistemul* **(NHLIS)** *admite cel puţin o soluţie.*

Pentru a demonstra această teoremă trebuie mai întâi să formulăm următoarea inegalitate hemivariaţională:

(VHI) Se caută $u \in D$ astfel încât

$$\Phi(u, v) + J^0(\overline{u}; \overline{\eta}(u, v)) \geq 0,$$

pentru orice $v \in D$.

Următoarea propoziţie demonstrează că problema **(VHI)** este strâns legată de problema **(NHLIS)**:

Propoziţia 4.2.1 *(A. É. Molnár, O. Vas, [74]) Dacă condiţiile **(H)**-(i) şi **(Φ)**-(i) sunt adevărate şi $u^0 = (u_1^0, \ldots, u_n^0) \in D_1 \times \ldots \times D_n$ este o soluţie a inegalităţii* **(VHI)**, *atunci u^0 este de asemenea o soluţie a sistemului* **(NHLIS)**.

Observăm că este suficient să demonstrăm că problema **(VHI)** admite cel puţin o soluţie.

Observaţia 4.2.2 *(A. É. Molnár, O. Vas, [74]) Este cunoscut faptul că sistemele de inegalităţi de tip hemivariaţionale pe domenii nemărginite admit soluţii, dacă adăugăm condiţii de coercivitate. Astfel, dacă impunem anumite condiţii de coercivitate, Teorema 4.2.1 va rămâne adevărată şi în cazul în care mulţimile D_i sunt nemărginite (pentru detalii, va se vedea [88, Remark 3.3]).*

4.3 Applicaţii

Aplicabilitatea rezultatelor prezentate în Secţiunile 4.1 şi 4.2 este detaliată în această secţiune.

4.3.1 Puncte Nash generalizate

Considerăm spaţiile Banach $E_1, \ldots, E_n$ pentru orice $i \in \{1, \ldots, n\}$ şi mulţimile nevide $D_i \subset E_i$. Fie $D_i' \subset E_i$ o mulţime deschisă astfel încât pentru orice $i \in \{1, \ldots, n\}$ să avem $D_i \subset D_i'$. Fie $f_i : D_1 \times \ldots \times D_i' \times \ldots \times D_n \to \mathbb{R}$ o funcţională cu proprietatea că pentru fiecare $i \in \{1, \ldots, n\}$ aplicaţia $u_i \rightsquigarrow f_i(u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_n)$ este continuă şi local Lipschitz.

În cele ce urmează, vom arăta aplicabilitatea Teoremei 4.2.1. Alegem mai întâi

$$\phi_i(u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_n, \eta_i(u_i, v_i)) = f_{i,i}^0(u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_n; \eta_i(u_i, v_i)), \ i \in \{1, \ldots, n\}$$

şi $J = 0$. Mai mult, presupunem că funcţia $(u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_n; v_i) \rightsquigarrow f_{i,i}(u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_n; \eta_i(u_i, v_i))$ este slab superior semicontinuă pentru orice $v_i \in D_i$, $i = \overline{1, n}$. În aceste condiţii obţinem următorul rezultat de existenţă pentru un nou tip de puncte Nash generalizate.

Teorema 4.3.1 *(A. Molnár, O. Vas [74]) Pentru orice $i \in \{1, \ldots, n\}$ fie $D_i \subset X_i$ o mulţime nevidă, mărginită, închisă şi convexă. Presupunem că ipotezele **(H)** şi **(Φ)** rămân adevărate. Atunci, există un punct $(u_1^0, \ldots, u_i^0, \ldots, u_n^0) \in D_1 \times \cdots \times D_n$ astfel încât pentru fiecare $(u_1, \ldots, u_n) \in D_1 \times \cdots \times D_n$ şi $i \in \{1, \ldots, n\}$ avem*

$$g_{i,i}^0(u_1^0, \ldots, u_i^0, \ldots, u_n^0; \eta_i(u_i^0, v_i)) \geq 0.$$

Următoarea observaţie subliniază importanţa teoremei anterioare:

Observaţia 4.3.1 *(A. Molnár, O. Vas, [74]) Dacă alegem $\eta(u_i^0, v_i) = v_i - u_i^0$ pentru $i \in \{1, \ldots, n\}$, atunci obţinem rezultatul de existenţă pentru puncte Nash generalizate din articolul lui D. Repovš and Cs. Varga [88].*

Pentru o a doua aplicaţie a Teoremei 4.2.1 impunem ca funcţionalele $\phi_i : Y_1 \times \cdots \times Y_i \times \cdots \times Y_n \times Y_i \to \mathbb{R}$ să fie diferenţiabile în a i-a variabilă pentru $i \in \{1, \ldots, n\}$ şi derivatele lor $\phi_i' : Y_1 \times \cdots \times Y_i \times \cdots \times Y_n \times Y_i \to \mathbb{R}$ să fie continue pentru $i \in \{1, \ldots, n\}$. Următorul rezultat arată că există cel puţin o soluţie a sistemului neliniar general de inegalităţi de tip hemivariaţional:

Corolarul 4.3.1 *(A. Molnár, O. Vas, [74]) Considerăm funcţia regulară şi local Lipschitz $J : Y_1 \times Y_2 \times \cdots \times Y_i \times \cdots \times Y_n \to \mathbb{R}$ şi funcţionalele neliniare $\phi_i : Y_1 \times \cdots \times Y_i \times \cdots \times Y_n \times Y_i \to \mathbb{R}$ cu derivatele continue $\phi_i' : Y_1 \times \cdots \times Y_i \times \cdots \times Y_n \times Y_i \to \mathbb{R}$ pentru $i \in \{1, \ldots, n\}$. Fie, de asemenea, $D_i \subset X_i$ mulţimi mărginite, închise şi convexe pentru $i \in \{1, \ldots, n\}$ şi presupunem că sunt îndeplinite condiţiile (H) şi (Φ). Atunci, există un punct $u^0 = (u_1^0, \ldots, u_n^0) \in D_1 \times \cdots \times D_n$ astfel încât*

$$\Phi_i'(\overline{u}^0, \overline{\eta_i}(u_i^0, u_i)) + J_i^0(\overline{u}^0; \overline{\eta_i}(u_i^0, u_i)) \geq 0,$$

pentru fiecare $u = (u_1, \ldots, u_n) \in D_1 \times \cdots \times D_n$ şi $i \in \{1, \ldots, n\}$.

4.3.2 Probleme de tip Schrödinger

Următoarele trei exemple arată aplicabilitatea rezultatelor principale obţinute în Secţiunile 4.1 şi 4.2 pentru probleme de tip Schrödinger:

a) Fie $a_1, a_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(n > 2)$ două funcţii continue care satisfac următoarele condiţii:

- $\inf\limits_{x \in \mathbb{R}^n} a_i(x) > 0,\ i = 1, 2;$
- măsura$(\{x \in \mathbb{R}^n : a_i(x) \le M_i\}) < \infty$, pentru fiecare $M_i > 0,\ i = 1, 2.$

Spaţiile

$$X_1 := \left\{ u \in W^{1,2}(\mathbb{R}^n) : \int_{\mathbb{R}^n} \left(|\nabla u(x)|^2 + a_1(x) u^2(x) \right) dx < \infty \right\}$$

şi

$$X_2 := \left\{ u \in W^{1,2}(\mathbb{R}^n) : \int_{\mathbb{R}^n} \left(|\nabla u(x)|^2 + a_2(x) u^2(x) \right) dx < \infty \right\}$$

înzestrate cu produsele scalare

$$\langle u, v \rangle_{X_1} = \int_{\mathbb{R}^n} [\nabla u(x) \nabla v(x) + a_1(x) u(x) v(x)]\, dx,$$

respectiv,

$$\langle u, v \rangle_{X_2} = \int_{\mathbb{R}^n} [\nabla u(x) \nabla v(x) + a_2(x) u(x) v(x)]\, dx,$$

sunt spaţii Hilbert.

Se ştie că spaţiul $W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ este scufundat continuu în $L^p(\mathbb{R}^n), p \in [2, 2^*]$. Prin urmare, dacă $q, r \in [2, 2^*]$, atunci spaţiul produs $X_1 \times X_2$ este scufundat continuu în spaţiul $L^q(\mathbb{R}^n) \times L^r(\mathbb{R}^n)$. Pe de altă parte, T. Bartsch şi Z.-Q. Wang au demostrat în articolul [14] că pentru $q, r \in [2, 2^*)$, X_1 şi X_2 sunt scufundate compact în $L^q(\mathbb{R}^n)$, respectiv, în $L^r(\mathbb{R}^n)$. Aşadar, $X_1 \times X_2$ este scufundat compact în $L^q(\mathbb{R}^n) \times L^r(\mathbb{R}^n)$.

Fie $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ o funcţie regulară şi local Lipschitz care satisface condiţiile următoare:

(G1) Există $c > 0$ şi $q \in (2, 2^*), r \in (2, 2^*)$ astfel încât

$$|w_u| \le c(|u| + |v| + |u|^{q-1}),$$

$$|w_v| \le c(|v| + |u| + |v|^{r-1}),$$

pentru fiecare $(u, v) \in \mathbb{R}^2, w_u \in \partial_1 G(u, v), w_v \in \partial_2 G(u, v), i = \overline{1, 2}$, unde prin $\partial_1 G(u, v)$ şi $\partial_2 G(u, v)$ notăm gradienţii (parţiali) generalizaţi ai lui $G(\cdot, v)$ în punctele u şi v, în timp ce $2^* = \frac{2N}{N-2}, N > 2$ este exponentul critic Sobolev.

Fie K_1, respectiv, K_2, submulţime nevidă, mărginită, închisă şi convexă a lui X_1, respectiv, a lui X_2. Vom nota cu $G_1^0(u(x), v(x); w_1(x))$ şi $G_2^0(u(x), v(x); w_2(x))$ derivatele direcţionale ale lui G în prima, respectiv în a doua variabilă după direcţia

w_1, respectiv, w_2. Prima noastră problemă de tip Schrödinger este formulată astfel:
(Sch-S) Se caută $(u_1, u_2) \in K_1 \times K_2$ astfel încât

$$\begin{cases} \langle \overline{u_1}, \overline{\eta}_1(u_1, v_1) \rangle + \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} G_1^0(\overline{u_1}(x), \overline{v_1}(x), \overline{\eta_1}(u_1(x), v_1(x)))dx \geq 0, \forall v_1 \in K_1; \\ \langle \overline{u_2}, \overline{\eta}_2(u_2, v_2) \rangle + \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} G_2^0(u_2(x), v_2(x), \overline{\eta_2}(\overline{u_2}(x), \overline{v_2}(x)))dx \geq 0, \forall v_2 \in K_2. \end{cases},$$

pentru orice $(v_1, v_2) \in K_1 \times K_2$.

Ca o altă aplicaţie a Teoremei 4.2.1, arătăm existenţa a cel puţin unei soluţii a problemei **(Sch-S)**.

Corolarul 4.3.2 *(A. Molnár, O. Vas [74]) Dacă $K_1 \subset X_1$ şi $K_2 \subset X_2$ sunt două mulţimi nevide, convexe, închise şi mărginite, η_1, η_2 satisfac condiţia **(H)** şi G satisface ipoteza **(G1)**, atunci problema **(Sch-S)** admite cel puţin o soluţie.*

b) Fie $n > 2$. Considerăm funcţia $a_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ şi spaţiul X_1, înzestrat cu produsul scalar $\langle u, v \rangle_{X_1}$, definite în acelaşi mod ca la punctul a). Pentru $p = 2$ condiţiile **(CT)** şi **(CP)** sunt satisfăcute.

Fie funcţia $A : X_1 \to X_1$ definită prin $\langle Au, v \rangle := (u, v)_{X_1}$. În urma proprietăţilor normei şi a convergenţei slabe, rezultă că **(A1)** şi **(A2)** sunt satisfăcute. În acest caz, dacă presupunem că $K \subseteq X_1$ este ales în mod corespunzător, iar f şi j satisfac aceleaşi condiţii ca în Teoremele 4.1.1 şi 4.1.2, atunci folosind aceste rezultate, deducem că problema **(V-HI)** admite cel puţin o soluţie.

c) Similar cu exemplul anterior, putem formula o altă problemă de tip Schrödinger, dacă considerăm pentru $n > 2$ spaţiul Hilbert

$$H := \{u \in L^2(\mathbb{R}^n) : \int_{\mathbb{R}^n} [|\nabla u(x)|^2 + |x|^2 u^2(x)]dx < \infty\}$$

înzestrat cu produsul scalar

$$(u, v) = \int_{\mathbb{R}^n} [\nabla u(x) \nabla v(x) + |x|^2 u(x)v(x)]dx.$$

Scufundarea $H \hookrightarrow L^s(\mathbb{R}^n)$ este compactă pentru $s \in [2, 2^*)$ (a se vedea O. Kavian, [56]). Prin urmare condiţiile **(CT)** şi **(CP)** rămân adevărate. Aşadar, dacă considerăm spaţiul H în loc de spaţiul X_1 din punctul **b)**, putem deduce rezultatele Teoremelor 4.1.1 şi 4.1.2.

4.3.3 O problemă cu funcţii radial simetrice

În Teoremele 4.1.1 şi 4.1.2 ipotezele **(CP)**, **(j1)** şi **(j2)** sunt esenţiale. În cele ce urmează, cercetăm cazul în care înlocuim **(j1)** şi **(j2)** cu alte condiţii şi vom demonstra că în acest caz afirmaţiile Teoremelor 4.1.1 şi 4.1.2 rămân adevărate.

Fie $a : \mathbb{R}^L \times \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}$ $(L \geq 2)$ funcţie nenegativă care satisface următoarele condiţii:

(a_1) $a(x, y) \geq a_0 > 0$ dacă $|(x, y)| \geq R$, iar $R > 0$ este suficient de mare;

(a_2) $a(x, y) \to +\infty$, când $|y| \to +\infty$ uniform la $x \in \mathbb{R}^L$;

(a_3) $a(x, y) = a(x', y)$ pentru fiecare $x, x' \in \mathbb{R}^L$ cu $|x| = |x'|$ şi orice $y \in \mathbb{R}^M$.

Considerăm următoarele subspaţii ale lui $W^{1,p}(\mathbb{R}^L \times \mathbb{R}^M)$

$$\tilde{E} = \{u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^L \times \mathbb{R}^M) : u(s, t) = u(s', t) \ \forall\ s, s' \in \mathbb{R}^L, |s| = |s'|, \forall t \in \mathbb{R}^M\},$$

$$E = \{u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^L \times \mathbb{R}^M) : \int_{\mathbb{R}^{L+M}} a(x)|u(x)|^p dx < \infty\},$$

$$X := \tilde{E} \cap E = \{u \in \tilde{E} : \int_{\mathbb{R}^{L+M}} a(x)|u(x)|^p dx < \infty\}$$

înzestrate cu norma

$$\|u\|^p = \int_{\mathbb{R}^{L+M}} |\nabla u(x)|^p dx + \int_{\mathbb{R}^{L+M}} a(x)|u(x)|^p dx.$$

D. C. de Morais Filho, M. A. S. Souto, J. Marcos Do au demonstrat în [75] că scufundarea $X \hookrightarrow L^s(\mathbb{R}^L \times \mathbb{R}^M)$ este continuă dacă $s \in [p, p^*]$, şi compactă dacă $s \in (p, p^*)$.

Fie

$$\Gamma = \left\{ g : E \to E : g(v) = v \circ \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & Id_{\mathbb{R}^M} \end{pmatrix}, R \in O(\mathbb{R}^L) \right\},$$

unde $O(\mathbb{R}^L)$ este mulţimea tuturor rotaţiilor pe $\mathbb{R}^L$ şi prin $Id_{\mathbb{R}^M}$ notăm matricea identică de ordin M.

În continuare presupunem că $j : \mathbb{R}^L \times \mathbb{R}^M \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcţie Carathéodory, care este local Lipschitz în variabila din $\mathbb{R}$ şi satisface următoarele condiţii:

(j1') $j(x,0)=0$, şi există $c>0$ şi $q\in(p,p^\star)$ astfel încât

$$|\xi|\le c(|y|^{p-1}+|y|^{q-1}),\ \forall\xi\in\partial j(x,y),\ (x,y)\in\mathbb{R}^{L+M}\times\mathbb{R};$$

(j3) $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\max\{|\xi|:\xi\in\partial j(x,y)\}}{|y|^{p-1}}=0$ uniform pentru fiecare $x\in\mathbb{R}^{L+M}$;

(j4) $j(\cdot,y)$ este Γ-invariantă pentru orice $y\in\mathbb{R}$.

Pentru a deduce rezultate noi vom folosi lema următoare în loc de Lema 4.1.1:

Propoziţia 4.3.1 *(H. Lisei, Cs. Varga, [69]) Dacă $j:\mathbb{R}^L\times\mathbb{R}^M\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ verifică condiţiile (j1'), (j3) şi (j4), atunci funcţia*

$$u\in X\mapsto\int_{\mathbb{R}^{L+M}}j(x,u(x))dx$$

este slab secvenţial continuuă.

Are loc următorul rezultat de existenţă:

Teorema 4.3.2 *(H. Lisei, A. Molnár, Cs. Varga, [68])*

(i) *Fie $K\subset X$ o mulţime nevidă, închisă, convexă şi mărginită. Fie $A:E\to E^*$ un operator satisfăcând condiţia **(A1)**. Presupunem că j satisface ipotezele **(j1'), (j3)** şi **(j4)**. Atunci, există $u\in K$ astfel încât*

$$\langle Au,v-u\rangle+\int_{\mathbb{R}^{L+M}}j^0(x,u(x);v(x)-u(x))dx\ge 0\ \ \text{pentru orice } v\in K.\qquad(4.3.1)$$

(ii) *Mai mult, dacă $K\subset X$ este o mulţime nevidă, închisă şi convexă, $A:X\to X^*$ este un operator ce satisface **(A1)**, **(A2)** şi dacă presupunem că j satisface **(j1'), (j2), (j3)** şi **(j4)**, atunci există $u\in K$ astfel încât relaţia* (4.3.1) *rămâne adevărată.*

Observaţia 4.3.2 *(H. Lisei, A. Molnár, Cs. Varga, [68]) În [69, Teorema 3.1] autorii au demonstrat, folosind o teoremă Mountain-Pass combinată cu principiul simetriei critice pentru funcţionale de tip Motreanu-Panagiotopoulos, existenţa soluţiilor netriviale pozitive, atunci când K este un con $\{v\in E\ :\ v\ge 0$ a.p.t. în $\mathbb{R}^L\times\mathbb{R}^M\}$, iar $A:X\to X^\star$ este operatorul de dualitate.*

Bibliografie

[1] S. Al-Homidana, Q.H. Ansaria, J.-C. Yao: *Some generalizations of Ekeland-type variational principle with applications to equilibrium problems and fixed point theory*, Nonlinear Analysis 69 (2008), 126-139.

[2] A. Ambrosetti, P. H. Rabinowitz: *Dual variational methods in critical point theory and applications*, J. Functional Anal 14 (1973), 349-381.

[3] A. Amini-Harandi, Q. H. Ansari, A. P. Farajzadeh: *Existence of equilibria in complete metric spaces*, Taiwanese Journal of Mathematics 16 (2) (2012), 777-785.

[4] I. Andrei, N. Costea: *Nonlinear hemivariational inequalities and applications to nonsmooth mechanics*, Adv. Nonlinear Var. Ineq. 13 (2010), 1-17.

[5] Q.H. Ansari: *Metric Spaces - Including Fixed Point Theory and Set-Valued Maps*, Narosa Publishing House, New Delhi, 2010.

[6] Q.H. Ansari (Editor): *Topics in Nonlinear Analysis and Optimization*, World Education, Delhi, 2012

[7] Q.H. Ansari: *Vectorial form of Ekeland-type variational principle with applications to vector equilibrium problems and fixed point theory*, J. Math. Anal. Appl. 334 (2007), 561-575.

[8] Q.H. Ansari, L.-J. Lin: *Ekeland type Variational Principle and Equilibrium Problems*, Topics in Nonconvex Optimization, Theory and Applications. Edited by S.K. Mishra, Springer-Verlag, New York, Berlin, 2011.

[9] Q. H. Ansari, S. Schaible, J.-C. Yao: *System of Vector Equilibrium Problems and Its Applications*, Journal of Optimization Theory and Applications 107 (2000), 547-557.

[10] Y. Araya, K. Kimura, T. Tanaka: *Existence of Vector Equilibria Via Ekeland's Variational Principle*, Taiwanese Journal of Mathematics 12 (8) (2008), 1991-2000.

[11] J.P. Aubin: *Optima and Equilibira: An intorduction to Nonlinear Analysis*, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, 1993.

[12] J.-P. Aubin, H. Frankowska: *Set-Valued Analysis*, Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin, 1990.

[13] I.A. Bakhtin: *The contraction mapping principle in almost metric spaces*,

[14] T. Bartsch, Z-Q. Wang: *Existence and multiplicity results for some superlinear elliptic problems in* $\mathbb{R}^n$, Comm. Partial Differential Equations 20 (1995), 1725-1741.

[15] V. Berinde: *Generalized contractions in quasimetric spaces*, Seminar on Fixed Point Theory (Preprint), Babeş-Bolyai University of Cluj-Napoca 3 (1993), 3-9.

[16] M. Bianchi, G. Kassay, R. Pini: *Existence of Equilibria via Ekeland's Principle*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 305 (2005), 502-512.

[17] M. Bianchi, G. Kassay, R. Pini: *Ekeland's principle for vector equilibrium problems*, Nonlinear Analysis 66 (2007), 1454-1464.

[18] M. Bianchi, R. Pini: *A Note on Equilibrium Problems with Properly Quasimonotone Bifunctions*, Journal of Global Optimization 20 (2001), 67-76.

[19] M. Bianchi, R. Pini: *Coercivity conditions for equilibrium problems*, Journal of Optimization Theory and Applications 124 (2005), 79-92.

[20] M. Bianchi, S. Schaible: *Generalized monotone bifunctions and equilibrium problems*, Journal of Optimization Theory and Applications 90 (1996), 31-43.

[21] E. Blum, W. Oettli: *From optimization and variational inequalities to equilibrium problems*, The Mathematics Student 63(1-4) (1994), 123-145.

[22] M. Bota, **A. É. Molnár**, Cs. Varga: *On Ekeland's variational principle in b-metric spaces*, Fixed Point Theory 12 (1) (2011), 21-28.

[23] B.E. Breckner, A. Horváth, Cs. Varga: *A multiplicity results for a special class of gradient-type systems with non-differentiable term*, Nonlinear Anal. 70 (2009), 606-620.

[24] H. Brezis: *Functional analysis, Sobolev spaces and Partial Differential Equations*, Universitext, Springer, New York, 2011.

[25] J. Caristi: *Fixed point theorems for mappings satisfying inwardness conditions*, Trans. Amer. Math. Soc. 215 (1976), 241-251.

[26] F.H. Clarke: *Generalized Gradients and Applications*, Trans. Amer. Math. Soc. 205 (1975), 247-262.

[27] F.H. Clarke: *A New Approach to Lagrange Multipliers*, Math. Oper. Res. 1 (1976), 165-174.

[28] F.H. Clarke: *Generalized Gradients of Lipschitz Functionals*, Adv. Math. 40 (1981), 52-67.

[29] F.H. Clarke: *Optimization and Nonsmooth Analysis*, John Wiley & Sons, New York, 1983.

[30] N. Costea, V. Rădulescu: *Existence results for hemivariational inequalities involving relaxed $\eta - \alpha$ monotone mappings*, Communications in Applied Analysis 13(3) (2009), 293-304.

[31] N. Costea, Cs. Varga: *Systems of nonlinear hemivariational inequalities and applications*, Topol. Methods Nonlinear Anal. 41 (2013), 39-65.

[32] S. Czerwik: *Nonlinear set-valued contraction mappings in B-metric spaces*, Atti Sem. Mat. Univ. Modena 46 (1998), 263-276.

[33] Z. Dályai, Cs. Varga: *An existence result for hemivariational inequalities*, Electron. J. Differential Equations 37 (2004), 1-17.

[34] J. Daneš: *A geometric theorem useful in nonlinear functional analysis*, Boll. Un. Mat. Ital. 6 (1972), 369-375.

[35] J. Daneš: *Equivalence of some Geometric and Related Results of Nonlinear Functional Analysis*, Commentationes Mathematicae Universitas Carolinae 26 (3) (1985), 443-454.

[36] M.M. Day: *The spaces L_p for* $0 < p < 1$, Bull. Amer. Math. Soc. 46 (1940), 816-823.

[37] D. G. De Figueiredo: *Lectures on The Ekeland Variational Principle with Applications and Detours*, Springer-Verlag, Heidelberg, West Germany, 1989.

[38] D.G. De Figueiredo, *The Ekeland Variational Principle with Applications and Detours*, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1989.

[39] Z. Denkowski, S. Migórski, N. S. Papageorgiou: *An introduction to Nonlinear Analysis: Theory*, Kluwer Academic Publishers, New York, 2003.

[40] Z. Denkowski, S. Migórski, N. S. Papageorgiou: *An introduction to Nonlinear Analysis: Applications*, Kluwer Academic Publishers, New York, 2002.

[41] I. Ekeland: *On the variational principle*, J. Math. Anal. App. 47 (1974), 324-353.

[42] I. Ekeland: *Nonconvex minimization problems*, Bulletin Of American Mathematical Society 1 (3) (1979), 443-474.

[43] F. Faraci, A. Iannizzotto, H. Lisei, Cs. Varga: *A multiplicity result for hemivariational inequalities*, Journal of Math. Anal. and Appl. 330 (2007), 683-698.

[44] Cs. Farkas, **A. É. Molnár**: *A Generalized Variational Principle and Its Application to Equilibrium Problems*, Journal of Optimization Theory and Applications 156 (2) (2013), 213-231.

[45] Cs. Farkas, **A. É. Molnár**: *A Generalized Variational Principle and Its Applications to Fixed Point Theory in b-metric spaces*, submitted

[46] F. Gazzola, V. Rădulescu: *A non-smooth critical point theory approach elliptic equations in* R^N, Differential Integral Equations 13 (2000), 47-60.

[47] P.G. Georgiev: *The Strong Ekeland Variational Principle, the Strong Drop Theorem and applications*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 131 (1988), 1-21.

[48] P.G. Georgiev: *Parametric Ekeland's Variational Principle*, Applied Mathematical Letters 14 (2001), 691-696.

[49] A. Granas, J. Dugundji: *Fixed Point Theory*, Springer Verlag, New-York, 2003.

[50] A. Granas, M. Lassonde: *Some elementary general principles of convex analysis*, Topol. Methods Nonlinear Anal. 5 (1995), 23-37.

[51] N. Hadjisavvas, S. Komlosi, S. Schaible (Editors): *Handbook of generalized convexity and generalized monotonicity*, Springer-Verlag, New York, 2005.

[52] A.H. Hamel: *Equivalents to Ekeland's variational principle in uniform spaces*, Nonlinear Anal. 62 (2005), 913-924.

[53] J. Heinonen: *Lectures on Analysis on Metric Spaces*, Springer Berlin, 2001.

[54] A.D. Ioffe, V.M. Tikhomirov: *Some remarks on variational principles*, Mathematical Notes 61 (1997), 248-253.

[55] N.J. Kalton: *Quasi-Banach spaces, Handbook of Banach Spaces II*, Editors W.B. Johnson and J.Lindenstrauss, Elsevier (2003), 1099-1130.

[56] O. Kavian: *Introduction á la théorie des points critiques et applications aux problémes elliptiques*, Springer-Verlag, Paris, 1993.

[57] G. Kassay: *The Equilibrium Problem and Related Topics*, Risoprint, Cluj-Napoca, 2000.

[58] G. Kassay, J.Kolumbán: *On a generalized sup-inf problem*, Journal of Optimization Theory and Applications 91 (1996), 651-670.

[59] I.V. Konnov: *Regularization method for nonmonotone equilibrium problems*, J. Nonlinear Convex Anal. 10 (2009), 93-101.

[60] A. Kristály: *An existence result for gradient-type systems with a non-differentiable term on unbounded strips*, J. Math. Anal. Appl. 229 (2004), 186-204.

[61] A. Kristály: *Infinitely many radial and non-radial solutions for a class of hemivariational inequalities*, Rocky Mountain J. Math. 35 (2005), 1173-1190.

[62] A. Kristály, *Hemivariational inequalities systems and applications*, Mathematica 46 (2004), 161-168.

[63] A. Kristály, *Multiplicity results for an eigenvalue problem for hemivariational inequalities in strip-like domains*, Set-Valued Anal. 13 (2005), 8-103.

[64] A. Kristály, V. Rădulescu, Cs. Varga: *Variational principles in mathematical physics, geometry and economics: qualitative analysis of nonlinear equations and unilateral problems*, Cambridge University Press, Cambridge, 2010.

[65] A. Kristály, Cs. Varga: *A setvalued approach to hemivariational inequalities*, Topological Methods in Nonlinear Analysis, 24 (2004), 297-307.

[66] A. Kristály and Cs. Varga: *An introduction to critical point theory for non-smooth functions*, Casa Cărţii de Ştinţă, Cluj, 2004.

[67] T.C. Lin: *Convex sets, fixed points, variational and minimax inequalities*, Bull. Austral. Math. Soc. 34 (1986), 107-117.

[68] H. Lisei, **A. É. Molnár**, Cs. Varga: *On a class of inequality promblems with lack of compactness*, J. Math. Anal. Appl. 378 (2) (2011) 741-748.

[69] H. Lisei, Cs. Varga: *Some applications to variational-hemivariational inequalities of the principle of symmetric criticality for Motreanu-Panagiotopoulos type functionals*,J. Global Optim. 36 (2006) 283-305.

[70] Z. Liu, D. Motreanu: *A class of variational–hemivariational inequalities of elliptic type*, Nonlinearity 23 (2010), 1741-1752.

[71] G. Mastroeni: *On auxiliary principle for equilibrium problems*, in "Equilibrium problems and Variational models", P. Daniele, F. Giannessi, A. Maugeri (Editors), 289-298, Kluwer, Dordrecht, 2003.

[72] I. Meghea: *Ekeland variational principle with generalizations and variants*, Old City Publishing, Philadelphia, Editions des Archives Contemporaines, Paris, 2009.

[73] P. Mironescu, V. Rădulescu: *A multiplicity theorem for locally Lipschitz periodic functionals*, J. Math. Anal. Appl. 195 (1995), 621-637.

[74] **A. É. Molnár**, O. Vas: *An existence result for a class of generalized hemivariational inequality systems*, accepted in Studia Universitatis Babeş-Bolyai Mathematica

[75] D.C. de Morais Filho, J. Souto, O. Marcos Do: *A compactness embedding lemma, a principle of symmetric critically and applcations to elliptic problems*, Univ. Cat. del Norte, Antofagasta, Chile, 19 (1) (2000), 1-17.

[76] D. Motreanu, P.D. Panagiotopoulos: *Minimax Theorems and Qualitative Properties of the Solutions of Hemivariational Inequalities and Applications*, Kluwer Academic Publishers, Nonconvex Optimization and its Applications, vol. 29, Boston/Dordrecht/London, 1999.

[77] D. Motreanu, V. Rădulescu: *Variational and Non-variational Methods in Nonlinear Analysis and Boundary Value Problems*, Kluwer Academic Publishers, Boston/Dordrecht/London, 2003.

[78] Z. Naniewicz, P.D. Panagiotopoulos: *Mathematical theory of hemivariational inequalities and applications*, Marcel Dekker, New York, 1995.

[79] W. Oettli, M. Théra: *Equivalents of Ekeland's Principle*, Bull. Austral. Math. Soc. 48 (1993), 385–392.

[80] P.D. Panagiotopoulos: *Inequality Problems in Mechanics and Applications*, Convex and Nonconvex Energy Functions, Birkhauser, Basel, 1985.

[81] P.D. Panagiotopoulos: *Hemivariational Inequalities: Applications to Mechanics and Engineering*, Springer-Verlag, New York/Boston/Berlin, 1993.

[82] P. D. Panagiotopoulos, M. Fundo, V. Rădulescu: *Existence theorems of Hartman–Stampacchia type for hemivariational inequalities and applications*, J. Global Optim. 15 (1999), 41-54.

[83] J.-P. Penot: *The Drop Theorem, the Petal Theorem and Ekeland's Variational Principle*, Nonlinear Analysis. Theory, Methods & Applications 10 (9) (1986), 813-822.

[84] P. H. Rabinowitz: *Some minimax theorems and applications to nonlinear partial differential equations*, Nonlinear Analysis: a collection of papers in honor of E. H. Rothe, L. Cesari, R. Kannan and H. F. Weinberger (Editors), Academic Press (1978), 161-177.

[85] P. H. Rabinowitz: *Some critical point theorems and applications to semilinear elliptic partial differential equations*, Ann. Scuola Norm Sup. Pisa, Ser. IV, 5 (1978), 215-223.

[86] V. Rădulescu: *Mountain pass type theorems for non-differentiable functions and applications*, Proc. Japan Acad. 69A (1993), 193-198.

[87] V. Rădulescu, D. Repovš: *Existence results for variational–hemivariational problems with lack of convexity*, Nonlinear Anal. 73 (2010), 99–104.

[88] D. Repovš, Cs. Varga: *A Nash type solution for hemivariational inequality systems*, Nonlinear Analysis 74 (2011), 5585-5590.

[89] S.L.Singh, C. Bhatnagar, S.N. Mishra: *Stability of iterative procedures for multivalued maps in metric spaces*, Demonstration Math. 37(2005), 905-916.

[90] E. Tarafdar: *A fixed point theorem equivalent to the Fan-Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz theorem*, J. Math. Anal. Appl. 128 (1987), 457-497.

[91] Cs. Varga: *Existence and infinitely many solutions for an abstract class of hemivariational inequalities*, J. Inequal. Appl. 2 (2005), 89-105.

[92] L. Yongxing, S. Shuzhong: *A generalization of Ekeland's ε-variational principle and its Borwein-Preiss variant*, J.M.A.T.A. 246(1) (2000), 308-319.

[93] C.-K. Zhong: *On Ekeland's Variational Principle and Minimax Theorem*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 205 (1997), 239-250.

[94] C.-K. Zhong: *A Generalization of Ekeland's Variational Principle and Application to the Study of the Relation between the P.S. Condition and Coercivity*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications 29 (1997), 1421-1431.