Model de subiect pentru proba scrisă a Examenului de Licenţă,
sesiunea iulie şi februarie 2013
Specializarea: Matematică

Varianta 1

Algebră

1. Enunţaţi teorema de caracterizare a subgrupului.
2. Fie $n \in \mathbb{Z}$ şi $n\mathbb{Z} = \{nk \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Să se arate că:
a) $n\mathbb{Z}$ este subgrup al lui $(\mathbb{Z}, +)$;
b) $n\mathbb{Z} \subseteq m\mathbb{Z}$ dacă şi numai dacă $m|n$ (m divide pe n);
c) $m\mathbb{Z} \cap n\mathbb{Z} = [m, n]\mathbb{Z}$ şi $m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z} = (m, n)\mathbb{Z}$ (unde (m, n) şi $[m, n]$ sunt c.m.m.d.c., respectiv c.m.m.m.c. al lui m şi n).

Analiză

1. Enunţaţi şi demonstraţi al doilea criteriu al comparaţiei pentru serii cu termeni pozitivi
2. Determinaţi o primitivă a funcţiei

$$f : x \in]1, +\infty[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{1 + \sqrt{x^2 + 2x - 2}}.$$

3. Calculaţi limita

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}.$$

Geometrie

1. Ecuaţiile perpendicularei comune a două drepte necoplanare.
2. Fie dreptele d_1 şi d_2 de ecuaţii:

$$d_1 : \ \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{3},$$

$$d_2 : \ \begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \\ 2x - y - 3z + 2 = 0. \end{cases}$$

Să se determine:
a) ecuaţiile perpendicularei comune a dreptelor d_1 şi d_2;
b) distanţa dintre cele două drepte.

Varianta 2

Algebră

1. Enunţaţi si demonstraţi teorema împărţirii cu rest în $\mathbb{Z}$.

2. Să se arate că $H \subseteq \mathbb{Z}$ este subgrup al lui $(\mathbb{Z}, +)$ dacă şi numai dacă există un unic $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $H = n\mathbb{Z}$.

Analiză

1. Teorema lui Taylor: enunţ şi demonstraţie

2. Calculaţi limita

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n + b^n}{a^{n+1} + b^{n+1}}, \text{ unde } a, b \in \mathbb{R}, a \neq -b.$$

3. Calculaţi integrala

$$I := \int_1^3 \frac{1}{x\left(x^2 + 9\right)} \mathrm{d}x.$$

Geometrie

1. Distanţa dintre două drepte şi perpendiculara comună în spaţiu.

2. Un cub are vârfurile $O(0, 0, 0)$, $A(a, 0, 0)$, $B(0, a, 0)$, $C(0, a, a)$. Să se determine distanţa minimă dintre diagonala OC şi o muchie care nu o întâlneşte.

3. Se dă sfera (S) $x^2+y^2+z^2-8x-8y-8z-16 = 0$ şi planul (π) $x+2y-3z = 0$. Să se arate că planul (π) intersectează sfera (S) după un cerc mare.