UNIVERSITATEA BABEŞ-BOLYAI CLUJ-NAPOCA
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

MODEL

Concurs MATE-INFO UBB 2019
Proba scrisă la MATEMATICĂ

PARTEA A

IMPORTANT: Problemele din Partea A au unul sau mai multe răspunsuri corecte.

1. (6 puncte) Fie numerele $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ astfel încât $z_1^2 + z_2^2 = 0$ şi $|z_1| = |z_2| = 1$. Atunci:

$\boxed{\text{A}}$ nu există astfel de numere complexe;

$\boxed{\text{B}}$ există $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ care satisfac condiţiile date;

$\boxed{\text{C}}$ există $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$ care satisfac condiţiile date;

$\boxed{\text{D}}$ $|z_1 + z_2| = \sqrt{2}$.

2. (6 puncte) O soluţie a inecuaţiei $A_{x+2}^3 + C_{x+3}^2 > 5(x+2)$ este

$\boxed{\text{A}}$ $x = 3$; $\boxed{\text{B}}$ $x = 2$; $\boxed{\text{C}}$ $x = 1$; $\boxed{\text{D}}$ $x = 0$.

3. (6 puncte) Fie polinoamele

$$f = 1 + X + 3X^2 + 5X^3 + \cdots + 2019X^{1010},\ g = X - 1 \in \mathbb{R}[X].$$

Restul împărţirii lui f la g este

$\boxed{\text{A}}$ 1020100; $\boxed{\text{B}}$ 2020; $\boxed{\text{C}}$ 1020101; $\boxed{\text{D}}$ 2039191.

4. (6 puncte) Numărul izomorfismelor de grupuri de la grupul $(\mathbb{Z}_3, +)$ la el însuşi este

$\boxed{\text{A}}$ 1; $\boxed{\text{B}}$ 2; $\boxed{\text{C}}$ 3; $\boxed{\text{D}}$ 9.

5. (6 puncte) Funcţia $f\colon \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}$,

$\boxed{\text{A}}$ nu are limită în 0, pentru că limitele laterale în 0 sunt diferite;

$\boxed{\text{B}}$ este continuă în 0;

$\boxed{\text{C}}$ are limita în 0 egală cu 0;

$\boxed{\text{D}}$ are limită finită în 0.

6. (6 puncte) Fie $a = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x}\mathrm{d}x$. Atunci:

$\boxed{\text{A}}$ $a = 1$; $\boxed{\text{B}}$ $a \in (0,1)$; $\boxed{\text{C}}$ $a = \frac{1}{2}$; $\boxed{\text{D}}$ $a = \ln 2$.

7. (6 puncte) Fie $a,\ b \in \mathbb{R}$ cu $a \neq 0$, iar $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcţia definită prin $f(x) = |a + bx|$. Atunci:

$\boxed{\text{A}}$ funcţia f nu este derivabilă în 0;

$\boxed{\text{B}}$ funcţia f este derivabilă în 0 $\Leftrightarrow a > 0$;

$\boxed{\text{C}}$ funcţia f este derivabilă în 0 şi $f'(0) \in \{-b, b\}$;

$\boxed{\text{D}}$ dacă $a > 0$, atunci funcţia f este derivabilă în 0 şi $f'(0) = b$.

8. (6 puncte) Fie $f\colon D \to \mathbb{R}$ funcţia definită prin $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 2x}$, unde D este domeniul maxim de definiţie. Funcţia f

$\boxed{\text{A}}$ are asimptotă oblică spre $+\infty$;

$\boxed{\text{B}}$ nu are asimptote verticale;

$\boxed{\text{C}}$ are asimptotă orizontală spre $-\infty$;

$\boxed{\text{D}}$ are dreapta $x = 0$ ca asimptotă verticală.

9. (6 puncte) Fie punctele $A(0, -1)$ şi $B(-2, 1)$. Ecuaţia unei drepte d situate la o distanţă de $5\sqrt{2}$ unităţi faţă de mediatoarea segmentului $[AB]$, este

$\boxed{\text{A}}$ $d : y = x - 9$; $\boxed{\text{B}}$ $d : y = x + 1 + 5\sqrt{2}$; $\boxed{\text{C}}$ $d : y = x + 1 - 5\sqrt{2}$; $\boxed{\text{D}}$ $d : y = x + 11$.

10. (6 puncte) Se consideră paralelogramul $ABCD$ şi punctele $M \in AB$ şi $N \in AC$ astfel încât $\overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{x}\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{AN} = \dfrac{1}{y}\overrightarrow{AC}$, unde $x, y \in \mathbb{R}^*$. Punctele D, N, M sunt coliniare dacă între numerele x şi y există relaţia

$\boxed{\text{A}}$ $x = 1 - y$; $\boxed{\text{B}}$ $x = y - 1$; $\boxed{\text{C}}$ $x = y - \frac{2}{3}$; $\boxed{\text{D}}$ $x = 2y$.

PARTEA B

IMPORTANT: Pentru problemele din Partea B se cer rezolvări complete.

1. (10 puncte) Fie $\varepsilon \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ astfel încât $\varepsilon^3 = 1$ şi $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon^2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$.

(a) Să se arate că $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$.
(b) Să se arate că mulţimea $G = \{A, A^2, I_2\}$ este grup în raport cu înmulţirea matricelor.
(c) Să se calculeze $S = I_2 + A + A^2 + \cdots + A^n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

2. (10 puncte) Să se demonstreze că oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$ are loc inegalitatea $xe^{-x^2} \leq \frac{1}{\sqrt{2e}}$.

3. (10 puncte) Fie $a \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ astfel încât $\sin a + \cos a = \frac{\sqrt{7}}{2}$. Să se calculeze $\operatorname{tg} \frac{a}{2}$.

NOTĂ: Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3.5 ore.

Răspunsuri şi soluţii

PARTEA A

1. $\boxed{\text{B}}$, $\boxed{\text{D}}$; **2.** $\boxed{\text{A}}$, $\boxed{\text{B}}$; **3.** $\boxed{\text{C}}$; **4.** $\boxed{\text{B}}$; **5.** $\boxed{\text{C}}$, $\boxed{\text{D}}$;

6. $\boxed{\text{B}}$, $\boxed{\text{D}}$; **7.** $\boxed{\text{C}}$, $\boxed{\text{D}}$; **8.** $\boxed{\text{A}}$, $\boxed{\text{B}}$, $\boxed{\text{C}}$; **9.** $\boxed{\text{A}}$, $\boxed{\text{D}}$; **10.** $\boxed{\text{B}}$.

PARTEA B

1. (a) Din condiţia $\varepsilon^3 = 1$ deducem $0 = \varepsilon^3 - 1 = (\varepsilon - 1)(\varepsilon^2 + \varepsilon + 1)$. Folosind faptul că $\varepsilon \notin \mathbb{R}$, obţinem egalitatea dorită.

(b) Ştiind că $\varepsilon^3 = 1$ şi $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$, putem calcula uşor că

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varepsilon + 1 & \varepsilon \end{pmatrix} \quad \text{şi} \quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2,$$

deci $A^{-1} = A^2$ şi $(G, \cdot)$ este un grup.

(c) Dacă $n = 3k$, atunci $S = k(A^2 + A + I_2) + I_2 = \begin{pmatrix} 3k+1 & 0 \\ k + 2k\varepsilon & 1 \end{pmatrix}$.

Dacă $n = 3k + 1$, atunci $S = k(A^2 + A + I_2) + A + I_2 = \begin{pmatrix} 3k+2 & 0 \\ k + (2k+1)\varepsilon & \varepsilon^2 + 1 \end{pmatrix}$.

Dacă $n = 3k + 2$, atunci $S = (k+1)(A^2 + A + I_2) = \begin{pmatrix} 3k+3 & 0 \\ k + 1 + (2k+2)\varepsilon & 0 \end{pmatrix}$.

2. Fie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcţia definită prin $f(x) = xe^{-x^2}$. Avem că $f'(x) = (1 - 2x^2)e^{-x^2}$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$. Rezultă că ecuaţia $f'(x) = 0$ are soluţiile $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ şi $\frac{\sqrt{2}}{2}$, iar

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad \text{şi}$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty\right).$$

Aşadar funcţia f este strict descrescătoare pe intervalul $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$, strict crescătoare pe intervalul $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ şi strict descrescătoare pe intervalul $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty\right)$. Cum

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) = 0,$$

deducem în final că punctul $\frac{\sqrt{2}}{2}$ este un punct de maxim global al funcţiei f. Prin urmare $f(x) \leq f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2e}}$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

3. Folosind formulele

$$\sin a = \frac{2\mathrm{tg}\frac{a}{2}}{1 + \mathrm{tg}^2\frac{a}{2}}, \quad \cos a = \frac{1 - \mathrm{tg}^2\frac{a}{2}}{1 + \mathrm{tg}^2\frac{a}{2}},$$

respectiv notaţia $x = \mathrm{tg}\frac{a}{2}$, obţinem ecuaţia

$$-(2 + \sqrt{7})x^2 + 4x + 2 - \sqrt{7} = 0,$$

de unde $x_1 = \frac{3}{2+\sqrt{7}} = -2 + \sqrt{7}$ şi $x_2 = \frac{1}{2+\sqrt{7}} = \frac{-2+\sqrt{7}}{3}$.

Deoarece $\frac{a}{2} \in \left(0, \frac{\pi}{8}\right)$ şi funcţia tg este crescătoare, soluţiile obţinute trebuie să fie mai mici decât $\mathrm{tg}\frac{\pi}{8}$. Aceasta valoare poate fi calculată de exemplu folosind formula $\mathrm{tg}\, a = \dfrac{2\mathrm{tg}\frac{a}{2}}{1-\mathrm{tg}^2\frac{a}{2}}$. Astfel $1 = \mathrm{tg}\frac{\pi}{4} = \dfrac{2\mathrm{tg}\frac{\pi}{8}}{1-\mathrm{tg}^2\frac{\pi}{8}}$. Folosind faptul că $\mathrm{tg}\frac{\pi}{8} > 0$, obţinem $\mathrm{tg}\frac{\pi}{8} = \sqrt{2}-1$. După o verificare putem observa că $x_1 > \sqrt{2}-1$ şi $x_2 < \sqrt{2}-1$, deci singura soluţie este $\mathrm{tg}\frac{a}{2} = x_2 = \frac{-2+\sqrt{7}}{3}$.