BABEŞ-BOLYAI TUDOMÁNYEGYETEM KOLOZSVÁR
MATEMATIKA ÉS INFORMATIKA KAR

MODELL

MATEK-INFÓ Verseny BBTE 2019
MATEMATIKA írásbeli próba

"A" RÉSZ

FONTOS: Az "A" rész feladatainak lehet egy vagy több helyes válasza is a felsorolt válaszok között.

1. (6 pont) A $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ számok teljesítik a $z_1^2 + z_2^2 = 0$ és $|z_1| = |z_2| = 1$ feltételeket. Az alábbi állítások közül melyek igazak?

A Nem létezik ilyen $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

B Létezik a feltételeket teljesítő $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

C Létezik a feltételeket teljesítő $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$.

D Minden, a feltételeket teljesítő $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ esetén $|z_1 + z_2| = \sqrt{2}$.

2. (6 pont) Az $A_{x+2}^3 + C_{x+3}^2 > 5(x+2)$ egyenlőtlenség egy megoldása

A $x = 3$; B $x = 2$; C $x = 1$; D $x = 0$.

3. (6 pont) Adottak az

$$f = 1 + X + 3X^2 + 5X^3 + \cdots + 2019X^{1010},\ g = X - 1 \in \mathbb{R}[X]$$

polinomok. Az f-nek a g-vel való osztási maradéka

A 1020100; B 2020; C 1020101; D 2039191.

4. (6 pont) Hány különböző csoport-izomorfizmus adható meg a $(\mathbb{Z}_3, +)$ csoportról önmagára?

A 1. B 2. C 3. D 9.

5. (6 pont) Ha az $f\colon \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ függvényt az $f(x) = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}$ képlettel értelmeztük, akkor:

A az f függvénynek nincs határértéke a 0-ban, mivel a bal- és jobboldali határértékei különböznek a 0-ban;

B az f függvény folytonos a 0-ban;

C az f függvény határértéke a 0-ban 0;

D az f függvény határértéke a 0-ban véges;

6. (6 pont) Ha $a = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x} \mathrm{d}x$, akkor:

A $a = 1$; B $a \in (0,1)$; C $a = \frac{1}{2}$; D $a = \ln 2$.

7. (6 pont) Adottak az $a,\ b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ valós számok és az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |a + bx|$ képlettel értelmezett függvény. Az alábbi állítások közül melyek igazak?

$\boxed{\text{A}}$ Az f függvény nem deriválható a 0-ban.

$\boxed{\text{B}}$ Az f függvény akkor és csak akkor deriválható a 0-ban, ha $a > 0$;

$\boxed{\text{C}}$ Az f függvény deriválható a 0-ban és $f'(0) \in \{-b, b\}$.

$\boxed{\text{D}}$ Ha $a > 0$, akkor az f függvény deriválható a 0-ban és $f'(0) = b$.

8. (6 pont) Az $f\colon D \to \mathbb{R}$ függvényt a $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 2x}$ képlettel értelmeztük, ahol D a függvény maximális értelmezési tartománya. Az f függvénynek

$\boxed{\text{A}}$ ferde aszimptotája van a $+\infty$-ben;

$\boxed{\text{B}}$ nincs függőleges aszimptotája;

$\boxed{\text{C}}$ vízszintes aszimptotája van a $-\infty$-ben;

$\boxed{\text{D}}$ az $x = 0$ egyenletű egyenes függőleges aszimptotája.

9. (6 pont) Adottak az $A(0, -1)$ és $B(-2, 1)$ pontok a síkban. Az $[AB]$ szakasz oldalfelező-merőlegesétől $5\sqrt{2}$ távolságra levő egyenes egyenlete lehet

$\boxed{\text{A}}$ $d : y = x - 9$; $\boxed{\text{B}}$ $d : y = x + 1 + 5\sqrt{2}$; $\boxed{\text{C}}$ $d : y = x + 1 - 5\sqrt{2}$; $\boxed{\text{D}}$ $d : y = x + 11$.

10. (6 pont) Adott az $ABCD$ paralelogramma, illetve az $M \in AB$ és $N \in AC$ pontok úgy, hogy $\overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{x}\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AN} = \dfrac{1}{y}\overrightarrow{AC}$, ahol $x, y \in \mathbb{R}^*$. A D, N, M pontok akkor kollineárisak, ha az x és y számok esetén teljesül, hogy

$\boxed{\text{A}}$ $x = 1 - y$; $\boxed{\text{B}}$ $x = y - 1$; $\boxed{\text{C}}$ $x = y - \frac{2}{3}$; $\boxed{\text{D}}$ $x = 2y$.

"B" RÉSZ

FONTOS: A "B" rész feladatai esetén teljes megoldás megadása szükséges.

1. (10 pont) Adott az $\varepsilon \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ komplex szám úgy, hogy $\varepsilon^3 = 1$ és értelmezzük az $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon^2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$ mátrixot.

(a) Bizonyítsuk be, hogy teljesül az $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$ egyenlőség!

(b) Bizonyítsuk be, hogy a $G = \{A, A^2, I_2\}$ halmaz csoportot alkot a mátrixok szorzásával, mint művelettel!

(c) Számítsuk ki az $S = I_2 + A + A^2 + \cdots + A^n$ összeget minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén!

2. (10 pont) Bizonyítsuk be, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ esetén igaz az $xe^{-x^2} \leq \frac{1}{\sqrt{2e}}$ egyenlőtlenség!

3. (10 pont) Az $a \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ valós szám teljesíti a $\sin a + \cos a = \frac{\sqrt{7}}{2}$ összefüggést. Számítsuk ki a $\operatorname{tg} \frac{a}{2}$ értékét!

MEGJEGYZÉS: Minden feladat kötelező. Minden résztvevőnek 10 pont jár hivatalból. A munkaidő 3.5 óra.

Válaszok és megoldások

"A" RÉSZ

1. $\boxed{\text{B}}$, $\boxed{\text{D}}$; **2.** $\boxed{\text{A}}$, $\boxed{\text{B}}$; **3.** $\boxed{\text{C}}$; **4.** $\boxed{\text{B}}$; **5.** $\boxed{\text{C}}$, $\boxed{\text{D}}$;

6. $\boxed{\text{B}}$, $\boxed{\text{D}}$; **7.** $\boxed{\text{C}}$, $\boxed{\text{D}}$; **8.** $\boxed{\text{A}}$, $\boxed{\text{B}}$, $\boxed{\text{C}}$; **9.** $\boxed{\text{A}}$, $\boxed{\text{D}}$; **10.** $\boxed{\text{B}}$.

"B" RÉSZ

1. (a) Az $\varepsilon^3 = 1$ egyenletből kapjuk, hogy $0 = \varepsilon^3 - 1 = (\varepsilon - 1)(\varepsilon^2 + \varepsilon + 1)$. Felhasználva, hogy $\varepsilon \notin \mathbb{R}$, következik a kért egyenlőség.

(b) Mivel $\varepsilon^3 = 1$ és $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$, egyszerű számolások alapján

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varepsilon + 1 & \varepsilon \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2,$$

tehát $A^{-1} = A^2$ és $(G, \cdot)$ egy csoport.

(c) Ha $n = 3k$, akkor $S = k(A^2 + A + I_2) + I_2 = \begin{pmatrix} 3k+1 & 0 \\ k + 2k\varepsilon & 1 \end{pmatrix}$.

Ha $n = 3k+1$, akkor $S = k(A^2 + A + I_2) + A + I_2 = \begin{pmatrix} 3k+2 & 0 \\ k + (2k+1)\varepsilon & \varepsilon^2 + 1 \end{pmatrix}$.

Ha $n = 3k+2$, akkor $S = (k+1)(A^2 + A + I_2) = \begin{pmatrix} 3k+3 & 0 \\ k + 1 + (2k+2)\varepsilon & 0 \end{pmatrix}$.

2. Legyen az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény az $f(x) = xe^{-x^2}$ összefüggéssel értelmezve. Ekkor $f'(x) = (1 - 2x^2)e^{-x^2}$, bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén. Így az $f'(x) = 0$ egyenlet megoldásai $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ és $\frac{\sqrt{2}}{2}$, míg

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ és}$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty\right).$$

Tehát az f függvény szigorúan csökkenő a $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ intervallumon, szigorúan növekvő a $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ intervallumon és szigorúan csökkenő a $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty\right)$ intervallumon. Mivel

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} f(x) = 0,$$

következik, hogy $\frac{\sqrt{2}}{2}$ globális maximumpontja az f függvénynek. Tehát $f(x) \le f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2e}}$, bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén.

3. Felhasználva a

$$\sin a = \frac{2\mathrm{tg}\frac{a}{2}}{1 + \mathrm{tg}^2\frac{a}{2}}, \quad \cos a = \frac{1 - \mathrm{tg}^2\frac{a}{2}}{1 + \mathrm{tg}^2\frac{a}{2}},$$

összefüggéseket, valamint az $x = \mathrm{tg}\frac{a}{2}$ jelölést, kapjuk a

$$-(2 + \sqrt{7})x^2 + 4x + 2 - \sqrt{7} = 0$$

egyenletet, ahonnan $x_1 = \frac{3}{2+\sqrt{7}} = -2 + \sqrt{7}$ és $x_2 = \frac{1}{2+\sqrt{7}} = \frac{-2+\sqrt{7}}{3}$.

Mivel $\frac{a}{2} \in \left(0, \frac{\pi}{8}\right)$ és a tg függvény növekvő, a kapott megoldások kisebbek kell legyenek, mint $\mathrm{tg}\frac{\pi}{8}$. Ezt az értéket kiszámíthatjuk például a $\mathrm{tg}\, a = \dfrac{2\mathrm{tg}\frac{a}{2}}{1-\mathrm{tg}^2\frac{a}{2}}$ képlet segítségével. Így $1 = \mathrm{tg}\frac{\pi}{4} = \dfrac{2\mathrm{tg}\frac{\pi}{8}}{1-\mathrm{tg}^2\frac{\pi}{8}}$. Megoldjuk ezt a másodfokú egyenletet és felhasználjuk, hogy $\mathrm{tg}\frac{\pi}{8} > 0$. Így $\mathrm{tg}\frac{\pi}{8} = \sqrt{2}-1$. Egy rövid ellenőrzés után kapjuk, hogy $x_1 > \sqrt{2}-1$ és $x_2 < \sqrt{2}-1$. Tehát az egyetlen megoldás $\mathrm{tg}\frac{a}{2} = x_2 = \frac{-2+\sqrt{7}}{3}$.