BABEŞ-BOLYAI UNIVERSITÄT CLUJ-NAPOCA
FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK UND INFORMATIK

MUSTER-THEMEN

MATE-INFO UBB 2019 WETTBEWERB
Schriftliche Prüfung in MATHEMATIK

TEIL A

WICHTIG ZU BEACHTEN: Jede Aufgabe aus Teil A hat eine oder mehrere richtige Antworten.

1. (6 Punkte) Gegeben seien $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ mit $z_1^2 + z_2^2 = 0$ und $|z_1| = |z_2| = 1$. Dann gelten:

A es gibt keine komplexen Zahlen mit diesen Eigenschaften;

B es gibt $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ mit diesen Eigenschaften;

C es gibt $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$ mit diesen Eigenschaften;

D $|z_1 + z_2| = \sqrt{2}$.

2. (6 Punkte) Eine Lösung der Ungleichung $A_{x+2}^3 + C_{x+3}^2 > 5(x+2)$ ist

A $x = 3$; B $x = 2$; C $x = 1$; D $x = 0$.

3. (6 Punkte) Gegeben seien die Polynome

$$f = 1 + X + 3X^2 + 5X^3 + \cdots + 2019X^{1010},\ g = X - 1 \in \mathbb{R}[X].$$

Der Rest der Division von f durch g ist

A 1020100; B 2020; C 1020101; D 2039191.

4. (6 Punkte) Die Anzahl der Gruppenisomorphismen von der Gruppe $(\mathbb{Z}_3, +)$ zu sich selbst beträgt

A 1; B 2; C 3; D 9.

5. (6 Punkte) Die Funktion $f\colon \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, definiert durch $f(x) = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}$,

A hat in 0 keinen Grenzwert, weil die einseitigen Grenzwerte in 0 verschieden sind;

B ist stetig in 0;

C hat den Grenzwert in 0 gleich 0;

D hat einen endlichen Grenzwert in 0.

6. (6 Punkte) Es sei $a = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x} \mathrm{d}x$. Dann gelten:

A $a = 1$; B $a \in (0,1)$; C $a = \frac{1}{2}$; D $a = \ln 2$.

7. (6 Punkte) Es seien $a,\ b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$, und $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die durch $f(x) = |a + bx|$ definierte Funktion. Dann gelten:

$\boxed{\text{A}}$ die Funktion f ist in 0 nicht differenzierbar;

$\boxed{\text{B}}$ die Funktion f ist in 0 differenzierbar $\Leftrightarrow a > 0$;

$\boxed{\text{C}}$ die Funktion f ist in 0 differenzierbar und $f'(0) \in \{-b, b\}$;

$\boxed{\text{D}}$ ist $a > 0$, dann ist die Funktion f in 0 differenzierbar und $f'(0) = b$.

8. (6 Punkte) Es sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ die durch $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 2x}$ definierte Funktion, wobei D der maximale Definitionsbereich ist. Die Funktion f

$\boxed{\text{A}}$ hat eine schiefe Asymptote nach $+\infty$;

$\boxed{\text{B}}$ hat keine senkrechten Asymptoten;

$\boxed{\text{C}}$ hat eine waagerechte Asymptote nach $-\infty$;

$\boxed{\text{D}}$ hat die Gerade $x = 0$ als senkrechte Asymptote.

9. (6 Punkte) Gegeben seien die Punkte $A(0, -1)$ und $B(-2, 1)$. Die Gleichung einer Gerade d, deren Entfernung $5\sqrt{2}$ Einheiten zur Mittelsenkrechten der Strecke $[AB]$ beträgt, ist

$\boxed{\text{A}}$ $d : y = x - 9$; $\boxed{\text{B}}$ $d : y = x + 1 + 5\sqrt{2}$; $\boxed{\text{C}}$ $d : y = x + 1 - 5\sqrt{2}$; $\boxed{\text{D}}$ $d : y = x + 11$.

10. (6 Punkte) Gegeben seien das Parallelogramm $ABCD$ sowie die Punkte $M \in AB$ und $N \in AC$, so dass $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{x}\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{y}\overrightarrow{AC}$, mit $x, y \in \mathbb{R}^*$. Die Punkte D, N, M sind kollinear, falls zwischen den Zahlen x und y der folgende Zusammenhang besteht

$\boxed{\text{A}}$ $x = 1 - y$; $\boxed{\text{B}}$ $x = y - 1$; $\boxed{\text{C}}$ $x = y - \frac{2}{3}$; $\boxed{\text{D}}$ $x = 2y$.

TEIL B

WICHTIG ZU BEACHTEN: Bei den Aufgaben aus Teil B sollen vollständige Lösungen angegeben werden.

1. (10 Punkte) Es seien $\varepsilon \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ mit $\varepsilon^3 = 1$, und $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon^2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$.

(a) Man zeige, dass $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$ ist.

(b) Man zeige, dass die Menge $G = \{A, A^2, I_2\}$, versehen mit der Matrizenmultiplikation, eine Gruppe ist.

(c) Man bestimme $S = I_2 + A + A^2 + \cdots + A^n$ für jedes $n \in \mathbb{N}^*$.

2. (10 Punkte) Man beweise, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ die Ungleichung $xe^{-x^2} \leq \frac{1}{\sqrt{2e}}$ gilt.

3. (10 Punkte) Es sei $a \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ mit $\sin a + \cos a = \frac{\sqrt{7}}{2}$. Man bestimme tg $\frac{a}{2}$.

BEMERKUNGEN: Alle Themen sind verpflichtend. Die Bewertung beginnt bei 10 Punkten. Die Bearbeitungszeit beträgt 3.5 Stunden.

Antworten und Lösungen

TEIL A

1. $\boxed{\text{B}}$, $\boxed{\text{D}}$; **2.** $\boxed{\text{A}}$, $\boxed{\text{B}}$; **3.** $\boxed{\text{C}}$; **4.** $\boxed{\text{B}}$; **5.** $\boxed{\text{C}}$, $\boxed{\text{D}}$;

6. $\boxed{\text{B}}$, $\boxed{\text{D}}$; **7.** $\boxed{\text{C}}$, $\boxed{\text{D}}$; **8.** $\boxed{\text{A}}$, $\boxed{\text{B}}$, $\boxed{\text{C}}$; **9.** $\boxed{\text{A}}$, $\boxed{\text{D}}$; **10.** $\boxed{\text{B}}$.

TEIL B

1. (a) Die Gleichung $\varepsilon^3 = 1$ impliziert $0 = \varepsilon^3 - 1 = (\varepsilon - 1)(\varepsilon^2 + \varepsilon + 1)$. Da $\varepsilon \notin \mathbb{R}$ ist, erhält man die zu zeigende Gleichheit.

(b) Aus $\varepsilon^3 = 1$ und $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$ ergeben sich

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varepsilon + 1 & \varepsilon \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2,$$

also ist $A^{-1} = A^2$, woraus man schließt, dass $(G, \cdot)$ eine Gruppe ist.

(c) Ist $n = 3k$, dann ist $S = k(A^2 + A + I_2) + I_2 = \begin{pmatrix} 3k+1 & 0 \\ k + 2k\varepsilon & 1 \end{pmatrix}$.

Ist $n = 3k + 1$, dann ist $S = k(A^2 + A + I_2) + A + I_2 = \begin{pmatrix} 3k+2 & 0 \\ k + (2k+1)\varepsilon & \varepsilon^2 + 1 \end{pmatrix}$.

Ist $n = 3k + 2$, dann ist $S = (k+1)(A^2 + A + I_2) = \begin{pmatrix} 3k+3 & 0 \\ k + 1 + (2k+2)\varepsilon & 0 \end{pmatrix}$.

2. Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die durch $f(x) = xe^{-x^2}$ definierte Funktion. Dann ist

$$f'(x) = (1 - 2x^2)e^{-x^2}, \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Die Gleichung $f'(x) = 0$ hat die Lösungen $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ und $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Außerdem gelten

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ sowie}$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty\right).$$

Also ist die Funktion f auf dem Intervall $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ streng fallend, auf dem Intervall $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ streng wachsend und auf dem Intervall $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty\right)$ streng fallend. Da

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} f(x) = 0$$

ist, folgt, dass $\frac{\sqrt{2}}{2}$ eine globale Maximalstelle der Funktion f ist. Somit gilt $f(x) \le f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2e}}$, für alle $x \in \mathbb{R}$.

3. Unter Zuhilfenahme der Formeln

$$\sin a = \frac{2\operatorname{tg}\frac{a}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{a}{2}}, \quad \cos a = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{a}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{a}{2}}$$

sowie der Bezeichnung $x = \operatorname{tg}\frac{a}{2}$, erhält man die Gleichung

$$-(2 + \sqrt{7})x^2 + 4x + 2 - \sqrt{7} = 0,$$

deren Lösungen $x_1 = \frac{3}{2+\sqrt{7}} = -2 + \sqrt{7}$ und $x_2 = \frac{1}{2+\sqrt{7}} = \frac{-2+\sqrt{7}}{3}$ sind.

Weil $\frac{a}{2} \in \left(0, \frac{\pi}{8}\right)$und die tg-Funktion auf dem Intervall $\left(0, \frac{\pi}{8}\right]$ streng wachsend ist, muss die gefundene Lösung kleiner als $\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}$ sein. Diesen Wert kann man mithilfe der Formel $\operatorname{tg} a = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{a}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{a}{2}}$ bestimmen. Also ist $1 = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\pi}{8}}$. Aus $\operatorname{tg}\frac{\pi}{8} > 0$, folgt $\operatorname{tg}\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$. Da $x_1 > \sqrt{2} - 1$ und $x_2 < \sqrt{2} - 1$ ist, folgt schließlich, dass $\operatorname{tg}\frac{a}{2} = x_2 = \frac{-2+\sqrt{7}}{3}$ ist.