UNIVERSITATEA BABEŞ-BOLYAI CLUJ-NAPOCA
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

MODEL

ADMITERE 2019
Proba scrisă la MATEMATICĂ

PARTEA A

IMPORTANT: Problemele din Partea A au unul sau mai multe răspunsuri corecte.

1. (6 puncte) Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ şi $(b_n)_{n\geq 1}$ şirurile definite prin

$$a_n = \lim_{x\to 0}\big(1 - x\operatorname{arctg}(nx)\big)^{\frac{1}{x^2}} \quad \text{şi respectiv} \quad b_n = a_1 + \cdots + a_n.$$

Atunci:

A $a_n = e^{-n}$ oricare ar fi $n \geq 1$;

B şirul $(b_n)_{n\geq 1}$ este monoton;

C şirul $(b_n)_{n\geq 1}$ este nemărginit;

D $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \in (0,1)$.

2. (6 puncte) Valoarea limitei $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x - \sin x\cos x}{x^3}$ este

A $\dfrac{1}{6}$; B nu există; C $\dfrac{2}{3}$; D $-\dfrac{2}{3}$.

3. (6 puncte) Fie $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ funcţia definită prin $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$. Atunci:

A graficul lui f admite exact două asimptote;

B f posedă exact două puncte de extrem local;

C graficul lui f posedă un singur punct de inflexiune;

D f este strict crescătoare şi concavă pe $(0, e]$.

4. (6 puncte) Valoarea integralei $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x\cos^2 x\,\mathrm{d}x$ este

A $\dfrac{\pi^2-4}{16}$; B $\dfrac{1}{16}$; C $\dfrac{\pi^2+4}{16}$; D $\dfrac{1}{4}$.

5. (6 puncte) În triunghiul ABC sunt date vârfurile $A(1,2)$, $B(5,-1)$ şi centrul de greutate $G(-1,-1)$. Atunci:

A distanţa de la punctul C la AB este $\frac{54}{5}$;

B punctul C aparţine dreptei $d : x + 2y + 17 = 0$;

C aria triunghiului ABC este $\frac{29}{6}$;

D $C(-9,-4)$.

6. (6 puncte) Fie $\vec{u} = (3a+1)\vec{i} + (a+1)\vec{j}$ şi $\vec{v} = (a-3)\vec{i} - a\vec{j}$, unde $a \in \mathbb{R}$, iar $\vec{i}$ şi $\vec{j}$ sunt vectori necoliniari. Valoarea parametrului $a \in \mathbb{R}$ pentru care vectorii $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ sunt coliniari este

A -2; B $-\frac{3}{4}$; C 1; D nu există astfel de a.

7. (6 puncte) Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = m^2x^2 - 2(x+1)^2$, unde $m \in \mathbb{R}$. Funcţia f este injectivă dacă:

A $m = -1$; B $m = -\sqrt{2}$; C $m = \sqrt{2}$; D $m = 1$.

8. (6 puncte) Numărul soluţiilor reale ale ecuaţiei $\log_2 |x| + \log_{|x|} 4 = 3$ este

A 1; B 2; C 3; D 4.

9. (6 puncte) Fie $p \in \mathbb{R}$ şi matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p & 1 & -1 \\ p^2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Atunci:

A $\operatorname{rang}(A) = 3$ pentru orice $p \in \mathbb{R}$;

B $\operatorname{rang}(A) = 2$ pentru orice $p \in \mathbb{R}$;

C există un singur număr $p \in \mathbb{R}$ pentru care $\operatorname{rang}(A) = 2$;

D există două numere diferite $p \in \mathbb{R}$ pentru care $\operatorname{rang}(A) = 2$.

10. (6 puncte) Fie $A = \{a - ia \mid a \in \mathbb{R}\}$ şi se notează cu "+" şi "·" operaţiile uzuale de adunare şi înmulţire din $\mathbb{C}$. Atunci:

A A este un subgrup al grupului $(\mathbb{C}, +)$;

B A este un subgrup al grupului $(\mathbb{C}^*, \cdot)$;

C $(A, +, \cdot)$ este inel;

D $(A, +, \cdot)$ este corp comutativ.

PARTEA B

IMPORTANT: Pentru problemele din Partea B se cer rezolvări complete.

1. (10 puncte) Să se reprezinte grafic funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{dacă } x \leq 1 \\ \frac{x^2}{x-1} & \text{dacă } x > 1. \end{cases}$$

2. (10 puncte) (a) Să se rezolve ecuaţia $\cos 5x + \sin \frac{5x}{2} = 1$ pe mulţimea $[0, \pi]$.
(b) Să se determine cardinalul mulţimii $A = \left\{\sin \frac{2k\pi}{5} | k \in \mathbb{Z}\right\}$.

3. (10 puncte) Fie sistemul de ecuaţii liniare cu coeficienţi reali:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x + ay - z = 1 \\ x + y + az = a \end{cases}.$$

Să se determine valorile $a \in \mathbb{R}$ pentru care sistemul este compatibil determinat şi în acest caz să se rezolve.

NOTĂ: Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

Răspunsuri şi soluţii

PARTEA A

1. $\boxed{\text{A}}$, $\boxed{\text{B}}$, $\boxed{\text{D}}$; **2.** $\boxed{\text{C}}$; **3.** $\boxed{\text{A}}$, $\boxed{\text{C}}$, $\boxed{\text{D}}$; **4.** $\boxed{\text{A}}$; **5.** $\boxed{\text{A}}$, $\boxed{\text{B}}$, $\boxed{\text{D}}$;

6. $\boxed{\text{B}}$, $\boxed{\text{C}}$; **7.** $\boxed{\text{B}}$, $\boxed{\text{C}}$; **8.** $\boxed{\text{D}}$; **9.** $\boxed{\text{D}}$; **10.** $\boxed{\text{A}}$.

PARTEA B

1. Graficul restricţiei lui f la $(-\infty, 1]$ este o semidreaptă închisă, situată pe prima bisectoare. Studiem în continuare variaţia restricţiei lui f la intervalul $(1, \infty)$.

$\diamond \lim\limits_{x\searrow 1} f(x) = +\infty \quad \Rightarrow \quad$ dreapta $x = 1$ este asimptotă verticală pentru G_f;

$\diamond \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty \quad \Rightarrow \quad G_f$ nu admite asimptotă orizontală spre $+\infty$;

$\diamond \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$ şi $\lim\limits_{x\to\infty} \big(f(x) - x\big) = 1 \quad \Rightarrow \quad$ dreapta de ecuaţie $y = x + 1$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ pentru G_f;

$\diamond f'(x) = \dfrac{x(x-2)}{(x-1)^2}$ şi $f''(x) = \dfrac{2}{(x-1)^3}$ oricare ar fi $x \in (1, \infty)$.

Tabelul care sintetizează variaţia lui f este prezentat mai jos.

x	1			2			$+\infty$
$f'(x)$	|	-	-	0	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	|	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	|	$\searrow$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$

Graficul lui f este prezentat în Figura 1.

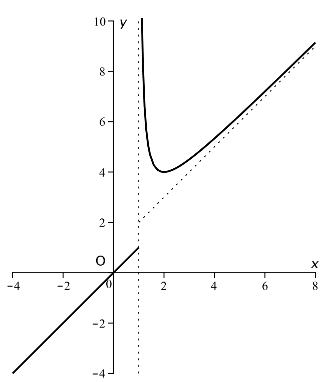

Figura 1: Graficul funcţiei f.

2. (a) Avem $\cos 5x + \sin \frac{5x}{2} = 1 \Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 \frac{5x}{2} + \sin \frac{5x}{2} = 1 \Leftrightarrow \sin \frac{5x}{2} \left(-2 \sin \frac{5x}{2} + 1\right) = 0$.
Deci $\sin \frac{5x}{2} = 0$, adică

$$x \in \left\{ \frac{2k\pi}{5} \middle| k \in \mathbb{Z} \right\} \cap [0, \pi] = \left\{ 0, \frac{2\pi}{5}, \frac{4\pi}{5} \right\}$$

sau $\sin \frac{5x}{2} = \frac{1}{2}$, adică $\frac{5x}{2} \in \left\{ \frac{\pi}{6} + 2k\pi | k \in \mathbb{Z} \right\} \bigcup \left\{ \frac{5\pi}{6} + 2k\pi | k \in \mathbb{Z} \right\}$ şi deci

$$x \in \left(\left\{ \frac{\pi}{15} + \frac{4k\pi}{5} \middle| k \in \mathbb{Z} \right\} \bigcup \left\{ \frac{\pi}{3} + \frac{4k\pi}{5} \middle| k \in \mathbb{Z} \right\} \right) \cap [0, \pi] = \left\{ \frac{\pi}{15}, \frac{13\pi}{15}, \frac{\pi}{3} \right\}.$$

Astfel soluţia problemei este mulţimea $\left\{0, \frac{\pi}{15}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}, \frac{13\pi}{15}\right\}$.
(b) Orice $k \in \mathbb{Z}$ se poate scrie sub forma $5l, 5l+1, 5l+2, 5l+3$ sau $5l+4$, unde $l \in \mathbb{Z}$. Astfel

$$\left\{\frac{2k\pi}{5} \middle| k \in \mathbb{Z}\right\} = \left\{2\pi l, 2\pi l + \frac{2\pi}{5}, 2\pi l + \frac{4\pi}{5}, 2\pi l + \frac{6\pi}{5}, 2\pi l + \frac{8\pi}{5} \middle| l \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Ştim că $2\pi l$ $(l \in \mathbb{Z})$ este perioadă a funcţiei $\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1]$, deci

$$A = \left\{\sin 0,\ \sin\frac{2\pi}{5},\ \sin\frac{4\pi}{5},\ \sin\frac{6\pi}{5},\ \sin\frac{8\pi}{5}\right\}.$$

Mai rămâne de verificat dacă sunt elemente egale în această mulţime. De aceea le readucem în primul cadran şi obţinem că

$$A = \left\{\sin 0, \sin\frac{2\pi}{5}, \sin\frac{4\pi}{5} = -\sin\frac{\pi}{5}, \sin\frac{6\pi}{5} = \sin\frac{\pi}{5}, \sin\frac{8\pi}{5} = -\sin\frac{2\pi}{5}\right\}.$$

Deci toate elementele sunt diferite între ele şi astfel cardinalul mulţimii A este 5.

3. Determinantul sistemului este $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & a & -1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a-1)(a+1)$.

Sistemul este compatibil determinat $\Leftrightarrow \Delta \neq 0 \Leftrightarrow a \notin \{-1, 1\}$. În acest caz avem:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & a & -1 \\ a & 1 & a \end{vmatrix} = 2a(a-1), \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & a & a \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a-1)^2.$$

Se obţine soluţia unică: $x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{2a}{a+1}, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 0, \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{a-1}{a+1}$.