BABEŞ-BOLYAI TUDOMÁNYEGYETEM KOLOZSVÁR
MATEMATIKA ÉS INFORMATIKA KAR

MODELL

FELVÉTELI 2019
MATEMATIKA írásbeli próba

"A" RÉSZ

FONTOS: Az "A" rész feladatainak lehet egy vagy több helyes válasza is a felsorolt válaszok között.

1. (6 pont) Az $(a_n)_{n\geq 1}$ és $(b_n)_{n\geq 1}$ sorozatokat az

$$a_n = \lim_{x\to 0}\left(1 - x\operatorname{arctg}(nx)\right)^{\frac{1}{x^2}}, \quad \text{illetve} \quad b_n = a_1 + \cdots + a_n$$

képletekkel értelmeztük. Az alábbi állítások közül melyek helyesek?

A Minden $n \geq 1$ esetén $a_n = e^{-n}$.

B A $(b_n)_{n\geq 1}$ sorozat monoton.

C A $(b_n)_{n\geq 1}$ sorozat nem korlátos.

D $\lim_{n\to\infty} b_n \in (0,1)$.

2. (6 pont) A $\lim_{x\to 0}\dfrac{x - \sin x\cos x}{x^3}$ határérték

A $\dfrac{1}{6}$; B nem létezik; C $\dfrac{2}{3}$; D $-\dfrac{2}{3}$.

3. (6 pont) Az $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ függvényt a $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ képlettel értelmeztük.Az alábbi állítások közül melyek helyesek?

A Az f függvénynek pontosan két aszimptotája van;

B Az f függvénynek pontosan két helyi szélsőértékpontja van;

C Az f függvénynek pontosan egy inflexiós pontja van.

D Az f függvény szigorúan növekvő és konkáv a $(0,e]$ intervallumon.

4. (6 pont) Az $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x\cos^2 x\,\mathrm{d}x$ integrál értéke

A $\dfrac{\pi^2-4}{16}$; B $\dfrac{1}{16}$; C $\dfrac{\pi^2+4}{16}$; D $\dfrac{1}{4}$.

5. (6 pont) Az ABC háromszögben $A(1,2)$, $B(5,-1)$ és a háromszög súlypontja $G(-1,-1)$. A következő állítások közül melyek helyesek?

A A C pont távolsága az AB egyenestől $\frac{54}{5}$.

B A C pont rajta van a $d: x+2y+17=0$ egyenletű egyenesen.

C Az ABC háromszög területe $\frac{29}{6}$.

D $C(-9,-4)$.

6. (6 pont) Adottak az $\vec{i}$ és $\vec{j}$ nemkollineáris vektorok, az a valós szám és értelmezzük az $\vec{u} = (3a+1)\vec{i} + (a+1)\vec{j}$ és $\vec{v} = (a-3)\vec{i} - a\vec{j}$ vektorokat. Ha $\vec{u}$ és $\vec{v}$ kollineáris vektorok, akkor az $a \in \mathbb{R}$ paraméter értéke

$\boxed{\text{A}}$ -2; $\boxed{\text{B}}$ $-\dfrac{3}{4}$; $\boxed{\text{C}}$ 1; $\boxed{\text{D}}$ nem létezik a feltételt kielégítő $a \in \mathbb{R}$.

7. (6 pont) Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt az $f(x) = m^2x^2 - 2(x+1)^2$ képlettel értelmeztük, ahol $m \in \mathbb{R}$. Az f függvény injektív, ha

$\boxed{\text{A}}$ $m = -1$; $\boxed{\text{B}}$ $m = -\sqrt{2}$; $\boxed{\text{C}}$ $m = \sqrt{2}$; $\boxed{\text{D}}$ $m = 1$.

8. (6 pont) A $\log_2 |x| + \log_{|x|} 4 = 3$ egyenlet valós megoldásainak a száma

$\boxed{\text{A}}$ 1; $\boxed{\text{B}}$ 2; $\boxed{\text{C}}$ 3; $\boxed{\text{D}}$ 4.

9. (6 pont) Adott a p valós szám és az $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p & 1 & -1 \\ p^2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ mátrix. Az alábbi állítások közül melyek helyesek?

$\boxed{\text{A}}$ $\text{rang}(A) = 3$ minden $p \in \mathbb{R}$ esetén;

$\boxed{\text{B}}$ $\text{rang}(A) = 2$ minden $p \in \mathbb{R}$ esetén;

$\boxed{\text{C}}$ Egyetlen olyan $p \in \mathbb{R}$ létezik, amelyre $\text{rang}(A) = 2$;

$\boxed{\text{D}}$ Létezik két különböző olyan $p \in \mathbb{R}$, amelyre $\text{rang}(A) = 2$.

10. (6 pont) Legyen $A = \{a - ia \mid a \in \mathbb{R}\}$ és jelöljük "+"-szal, illetve "·"-sal a megszokott összeadást és szorzást a $\mathbb{C}$ halmazon. Az alábbi állítások közül melyek helyesek?

$\boxed{\text{A}}$ A részcsoportja a $(\mathbb{C}, +)$ csoportnak;

$\boxed{\text{B}}$ A részcsoportja a $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ csoportnak;

$\boxed{\text{C}}$ $(A, +, \cdot)$ gyűrű;

$\boxed{\text{D}}$ $(A, +, \cdot)$ kommutatív test.

"B" RÉSZ

FONTOS: A "B" rész feladatai esetén teljes megoldás megadása szükséges.

1. (10 pont) Ábrázoljuk az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{ha } x \leq 1 \\ \frac{x^2}{x-1} & \text{ha} x > 1 \end{cases}$$

függvényt!

2. (10 pont) (a) Oldjuk meg a $\cos 5x + \sin \frac{5x}{2} = 1$ egyenletet a $[0, \pi]$ halmazon!

(b) Határozzuk meg az $A = \left\{\sin \frac{2k\pi}{5} | k \in \mathbb{Z}\right\}$ halmaz elemeinek a számát!

3. (10 pont) Adott az $a \in \mathbb{R}$ paraméter és tekintsük az

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x + ay - z = 1 \\ x + y + az = a \end{cases}$$

lineáris egyenletrendszert. Határozzuk meg az $a \in \mathbb{R}$ azon lehetséges értékeit, amelyekre az egyenletrendszer összeférhető és határozott, majd ezekben az esetekben oldjuk is meg az egyenletrendszert.

MEGJEGYZÉS: Minden feladat kötelező. Minden résztvevőnek 10 pont jár hivatalból. A munkaidő 3 óra.

Válaszok és megoldások

"A" RÉSZ

1. $\boxed{\text{A}}, \boxed{\text{B}}, \boxed{\text{D}}$; **2.** $\boxed{\text{C}}$; **3.** $\boxed{\text{A}}, \boxed{\text{C}}, \boxed{\text{D}}$; **4.** $\boxed{\text{A}}$; **5.** $\boxed{\text{A}}, \boxed{\text{B}}, \boxed{\text{D}}$;

6. $\boxed{\text{B}}, \boxed{\text{C}}$; **7.** $\boxed{\text{B}}, \boxed{\text{C}}$; **8.** $\boxed{\text{D}}$; **9.** $\boxed{\text{D}}$; **10.** $\boxed{\text{A}}$.

"B" RÉSZ

1. Az f függvény $(-\infty, 1]$ intervallumra való leszűkítésének grafikona egy zárt félegyenes, mely az első szögfelezőn helyezkedik el.

A továbbiakban vizsgáljuk az f leszűkítését az $(1, \infty)$ intervallumra:

$\diamond$ mivel $\lim\limits_{x \searrow 1} f(x) = +\infty$, az $x = 1$ egyenes függőleges aszimptotája f-nek;

$\diamond$ mivel $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = +\infty$, f-nek nincs vízszintes aszimptotája $+\infty$-ben;

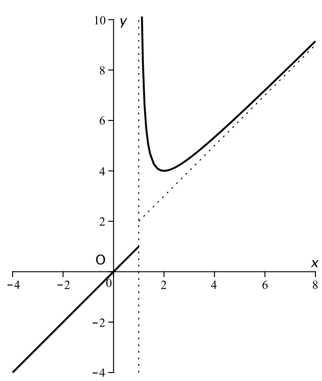
$\diamond$ mivel $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$ és $\lim\limits_{x \to \infty} \big(f(x) - x\big) = 1$, az $y = x + 1$ egyenes $+\infty$-ben ferde aszimptotája az f-nek;

$\diamond f'(x) = \dfrac{x(x-2)}{(x-1)^2}$ és $f''(x) = \dfrac{2}{(x-1)^3}$ minden $x \in (1, \infty)$ esetén.

Az f függvény változásának táblázata:

x	1			2			$+\infty$
$f'(x)$	$\vert$	-	-	0	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$\vert$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$\vert$	$\searrow$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$

Az f függvény grafikona az alábbi ábrán látható.



Ábra 1: Az f függvény grafikona.

2. (a) $\cos 5x + \sin \frac{5x}{2} = 1 \Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 \frac{5x}{2} + \sin \frac{5x}{2} = 1 \Leftrightarrow \sin \frac{5x}{2} \left(-2 \sin \frac{5x}{2} + 1\right) = 0.$

Tehát $\sin \frac{5x}{2} = 0$, vagyis

$$x \in \left\{ \frac{2k\pi}{5} \middle| k \in \mathbb{Z} \right\} \cap [0, \pi] = \left\{ 0, \frac{2\pi}{5}, \frac{4\pi}{5} \right\}$$

vagy $\sin \frac{5x}{2} = \frac{1}{2}$, vagyis $\frac{5x}{2} \in \left\{ \frac{\pi}{6} + 2k\pi | k \in \mathbb{Z} \right\} \bigcup \left\{ \frac{5\pi}{6} + 2k\pi | k \in \mathbb{Z} \right\}$, tehát

$$x \in \left(\left\{ \frac{\pi}{15} + \frac{4k\pi}{5} \middle| k \in \mathbb{Z} \right\} \bigcup \left\{ \frac{\pi}{3} + \frac{4k\pi}{5} \middle| k \in \mathbb{Z} \right\} \right) \cap [0, \pi] = \left\{ \frac{\pi}{15}, \frac{13\pi}{15}, \frac{\pi}{3} \right\}.$$

Így a feladat megoldáshalmaza $\left\{0, \frac{\pi}{15}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}, \frac{13\pi}{15}\right\}$.

(b) Bármely $k \in \mathbb{Z}$ felírható $5l, 5l+1, 5l+2, 5l+3$ vagy $5l+4$ alakba, ahol $l \in \mathbb{Z}$. Ezért

$$\left\{\frac{2k\pi}{5}\Big| k \in \mathbb{Z}\right\} = \left\{2\pi l, 2\pi l + \frac{2\pi}{5}, 2\pi l + \frac{4\pi}{5}, 2\pi l + \frac{6\pi}{5}, 2\pi l + \frac{8\pi}{5}\Big| l \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Tudjuk, hogy $2\pi l$ $(l \in \mathbb{Z})$ periódusa a $\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ függvénynek, tehát

$$A = \left\{\sin 0,\ \sin\frac{2\pi}{5},\ \sin\frac{4\pi}{5},\ \sin\frac{6\pi}{5},\ \sin\frac{8\pi}{5}\right\}.$$

Még kell ellenőrizni, hogy az A halmazban vannak-e egyenlő elemek. Ezért visszavezetjük mindeniket az első negyedre és kapjuk, hogy

$$A = \left\{\sin 0, \sin\frac{2\pi}{5}, \sin\frac{4\pi}{5} = -\sin\frac{\pi}{5}, \sin\frac{6\pi}{5} = \sin\frac{\pi}{5}, \sin\frac{8\pi}{5} = -\sin\frac{2\pi}{5}\right\}.$$

Tehát az A halmaz elemei egymástól különbözőek és így a halmaz számossága 5.

3. A rendszer deerminánsa $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & a & -1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a-1)(a+1)$.

Az egyenletrendszer összeférhető és határozott $\Leftrightarrow \Delta \neq 0 \Leftrightarrow a \notin \{-1, 1\}$. Ekkor:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & a & -1 \\ a & 1 & a \end{vmatrix} = 2a(a-1), \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & a & a \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a-1)^2.$$

A feladat egyetlen megoldása $x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{2a}{a+1}, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 0, \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{a-1}{a+1}$.