BABEŞ-BOLYAI UNIVERSITÄT CLUJ-NAPOCA
FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK UND INFORMATIK

MUSTER-THEMEN

AUFNAHMEPRÜFUNG 2019
Schriftliche Prüfung in MATHEMATIK

TEIL A

WICHTIG ZU BEACHTEN: Jede Aufgabe aus Teil A hat eine oder mehrere richtige Antworten.

1. (6 Punkte) Es seien $(a_n)_{n\geq 1}$ und $(b_n)_{n\geq 1}$ die wie folgt definierten Folgen

$$a_n = \lim_{x\to 0} \big(1 - x\operatorname{arctg}(nx)\big)^{\frac{1}{x^2}} \quad \text{und} \quad b_n = a_1 + \cdots + a_n.$$

Dann gelten:

$\boxed{\text{A}}$ $a_n = e^{-n}$ für alle $n \geq 1$;

$\boxed{\text{B}}$ die Folge $(b_n)_{n\geq 1}$ ist monoton;

$\boxed{\text{C}}$ die Folge $(b_n)_{n\geq 1}$ ist unbeschränkt;

$\boxed{\text{D}}$ $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \in (0,1)$.

2. (6 Punkte) Der Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \sin x \cos x}{x^3}$ beträgt

$\boxed{\text{A}}$ $\dfrac{1}{6}$; $\boxed{\text{B}}$ existiert nicht; $\boxed{\text{C}}$ $\dfrac{2}{3}$; $\boxed{\text{D}}$ $-\dfrac{2}{3}$.

3. (6 Punkte) Es sei $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ die durch $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ definierte Funktion. Dann gelten:

$\boxed{\text{A}}$ der Graph von f hat genau zwei Asymptoten;

$\boxed{\text{B}}$ f besitzt genau zwei lokale Extremstellen;

$\boxed{\text{C}}$ der Graph von f hat einen einzigen Wendepunkt;

$\boxed{\text{D}}$ f ist auf $(0,e]$ streng wachsend und konkav.

4. (6 Punkte) Das Integral $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x\cos^2 x \,\mathrm{d}x$ beträgt

$\boxed{\text{A}}$ $\dfrac{\pi^2-4}{16}$; $\boxed{\text{B}}$ $\dfrac{1}{16}$; $\boxed{\text{C}}$ $\dfrac{\pi^2+4}{16}$; $\boxed{\text{D}}$ $\dfrac{1}{4}$.

5. (6 Punkte) Im Dreieck ABC sind die Eckpunkte $A(1,2)$, $B(5,-1)$ sowie der Schwerpunkt $G(-1,-1)$ bekannt. Dann gelten:

$\boxed{\text{A}}$ die Entfernug vom Punkt C zu AB beträgt $\frac{54}{5}$;

$\boxed{\text{B}}$ der Punkt C liegt auf der Gerade $d : x + 2y + 17 = 0$;

$\boxed{\text{C}}$ der Flächeninhalt des Dreiecks ABC beträgt $\frac{29}{6}$;

$\boxed{\text{D}}$ $C(-9,-4)$.

6. (6 Punkte) Es seien $\vec{u} = (3a+1)\vec{i} + (a+1)\vec{j}$ und $\vec{v} = (a-3)\vec{i} - a\vec{j}$, wobei $a \in \mathbb{R}$, und $\vec{i}$ und $\vec{j}$ nichtkollineare Vektoren sind. Der Wert des Parameters $a \in \mathbb{R}$, für den die Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ kollinear sind, beträgt

[A] -2; [B] $-\frac{3}{4}$; [C] 1; [D] es gibt kein solches a.

7. (6 Punkte) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = m^2x^2 - 2(x+1)^2$, wobei $m \in \mathbb{R}$. Die Funktion f ist injektiv falls:

[A] $m = -1$; [B] $m = -\sqrt{2}$; [C] $m = \sqrt{2}$; [D] $m = 1$

ist.

8. (6 Punkte) Die Anzahl der reellen Lösungen der Gleichung $\log_2 |x| + \log_{|x|} 4 = 3$ ist

[A] 1; [B] 2; [C] 3; [D] 4.

9. (6 Punkte) Es seien $p \in \mathbb{R}$ und die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p & 1 & -1 \\ p^2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Dann gelten:

[A] $\text{Rang}(A) = 3$ für alle $p \in \mathbb{R}$;

[B] $\text{Rang}(A) = 2$ für alle $p \in \mathbb{R}$;

[C] es gibt eine einzige Zahl $p \in \mathbb{R}$, für die $\text{Rang}(A) = 2$ ist;

[D] es gibt zwei verschiedene Zahlen $p \in \mathbb{R}$, für die $\text{Rang}(A) = 2$ ist.

10. (6 Punkte) Es sei $A = \{a - ia \mid a \in \mathbb{R}\}$. Mit "$+$" und "$\cdot$" bezeichnet man die gewöhnliche Addition und Multiplikation in $\mathbb{C}$. Dann gelten:

[A] A ist eine Untergruppe der Gruppe $(\mathbb{C}, +)$;

[B] A ist eine Untergruppe der Gruppe $(\mathbb{C}^*, \cdot)$;

[C] $(A, +, \cdot)$ ist ein Ring;

[D] $(A, +, \cdot)$ ist ein kommutativer Körper.

Teil B

WICHTIG ZU BEACHTEN: Bei den Aufgaben aus Teil B sollen vollständige Lösungen angegeben werden.

1. (10 Punkte) Man zeichne den Graphen der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{falls } x \leq 1 \\ \frac{x^2}{x-1} & \text{falls } x > 1. \end{cases}$$

2. (10 Punkte) (a) Man löse die Gleichung $\cos 5x + \sin \frac{5x}{2} = 1$ in der Menge $[0, \pi]$.
(b) Man bestimme die Anzahl der Elemente der Menge $A = \left\{\sin \frac{2k\pi}{5} | k \in \mathbb{Z}\right\}$.

3. (10 Punkte) Gegeben sei das lineare Gleichungssystem mit reellen Koeffizienten:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x + ay - z = 1 \\ x + y + az = a \end{cases}.$$

Man bestimme die Werte $a \in \mathbb{R}$, für die das Gleichungssystem eine einzige Lösung hat, und löse das System in diesem Fall.

BEMERKUNGEN: Alle Themen sind verpflichtend. Die Bewertung beginnt bei 10 Punkten. Die Bearbeitungszeit beträgt 3 Stunden.

Antworten und Lösungen

TEIL A

1. $\boxed{\text{A}}$, $\boxed{\text{B}}$, $\boxed{\text{D}}$; **2.** $\boxed{\text{C}}$; **3.** $\boxed{\text{A}}$, $\boxed{\text{C}}$, $\boxed{\text{D}}$; **4.** $\boxed{\text{A}}$; **5.** $\boxed{\text{A}}$, $\boxed{\text{B}}$, $\boxed{\text{D}}$;

6. $\boxed{\text{B}}$, $\boxed{\text{C}}$; **7.** $\boxed{\text{B}}$, $\boxed{\text{C}}$; **8.** $\boxed{\text{D}}$; **9.** $\boxed{\text{D}}$; **10.** $\boxed{\text{A}}$.

TEIL B

1. Der Graph der Einschränkung von f auf $(-\infty, 1]$ ist eine abgeschlossenen Halbgerade, die sich auf der ersten Winkelhalbierenden befindet.

Wir untersuchen nun die Einschränkung von f auf das Intervall $(1, \infty)$.

$\diamond \lim\limits_{x \searrow 1} f(x) = +\infty \quad \Rightarrow$ die Gerade $x = 1$ ist eine senkrechte Asymptote von G_f;

$\diamond \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = +\infty \quad \Rightarrow G_f$ besitzt keine waagerechte Asymptote nach $+\infty$;

$\diamond \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$ und $\lim\limits_{x \to \infty} \big(f(x) - x\big) = 1 \quad \Rightarrow$ die Gerade $y = x+1$ ist eine schiefe Asymptote nach $+\infty$ für G_f;

$\diamond f'(x) = \dfrac{x(x-2)}{(x-1)^2}$ und $f''(x) = \dfrac{2}{(x-1)^3}$, für alle $x \in (1, \infty)$.

Die folgende Tabelle zeigt das Verhalten der Funktion f.

x	1			2			$+\infty$
$f'(x)$	|	-	-	0	+	+	+
$f''(x)$	|	+	+	+	+	+	+
$f(x)$	|	$\searrow$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$

Der Graph von f ist in Abbildung 1 zu sehen.

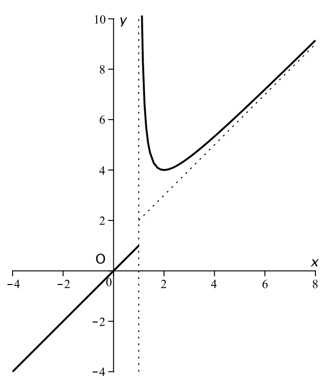

Abbildung 1: Der Graph der Funktion f.

2. (a) Es gelten $\cos 5x + \sin \frac{5x}{2} = 1 \Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 \frac{5x}{2} + \sin \frac{5x}{2} = 1 \Leftrightarrow \sin \frac{5x}{2} \left(-2\sin \frac{5x}{2} + 1\right) = 0$. Somit ist $\sin \frac{5x}{2} = 0$, also

$$x \in \left\{ \frac{2k\pi}{5} \Big| k \in \mathbb{Z} \right\} \cap [0, \pi] = \left\{ 0, \frac{2\pi}{5}, \frac{4\pi}{5} \right\},$$

oder $\sin \frac{5x}{2} = \frac{1}{2}$, also $\frac{5x}{2} \in \left\{ \frac{\pi}{6} + 2k\pi | k \in \mathbb{Z} \right\} \bigcup \left\{ \frac{5\pi}{6} + 2k\pi | k \in \mathbb{Z} \right\}$. Folglich gilt

$$x \in \left(\left\{ \frac{\pi}{15} + \frac{4k\pi}{5} \Big| k \in \mathbb{Z} \right\} \bigcup \left\{ \frac{\pi}{3} + \frac{4k\pi}{5} \Big| k \in \mathbb{Z} \right\} \right) \cap [0, \pi] = \left\{ \frac{\pi}{15}, \frac{13\pi}{15}, \frac{\pi}{3} \right\}.$$

Somit ist also $\left\{0, \frac{\pi}{15}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}, \frac{13\pi}{15}\right\}$ die Lösungsmenge der Gleichung.

(b) Jedes $k \in \mathbb{Z}$ kann als $5l, 5l+1, 5l+2, 5l+3$ oder $5l+4$, mit $l \in \mathbb{Z}$, geschrieben werden. Also ist

$$\left\{\frac{2k\pi}{5}\middle| k \in \mathbb{Z}\right\} = \left\{2\pi l, 2\pi l + \frac{2\pi}{5}, 2\pi l + \frac{4\pi}{5}, 2\pi l + \frac{6\pi}{5}, 2\pi l + \frac{8\pi}{5}\middle| l \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Es ist bekannt, dass $2\pi l$ ($l \in \mathbb{Z}$) die Periode der Funktion $\sin : \mathbb{R} \to [-1,1]$ ist, also ist

$$A = \left\{\sin 0,\ \sin\frac{2\pi}{5},\ \sin\frac{4\pi}{5},\ \sin\frac{6\pi}{5},\ \sin\frac{8\pi}{5}\right\}.$$

Es bleibt noch zu überprüfen, ob in dieser Menge manche Elemente öfters vorkommen. Aus diesem Grund werden die Argumente in den ersten Quadranten gebracht und man erhält

$$A = \left\{\sin 0, \sin\frac{2\pi}{5}, \sin\frac{4\pi}{5} = -\sin\frac{\pi}{5}, \sin\frac{6\pi}{5} = \sin\frac{\pi}{5}, \sin\frac{8\pi}{5} = -\sin\frac{2\pi}{5}\right\}.$$

Somit sind die Elemente paarweise verschieden, also hat die Menge A genau 5 Elemente.

3. Die Determinante des Systems ist $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & a & -1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a-1)(a+1)$.

Das System hat genau eine Lösung $\Leftrightarrow \Delta \neq 0 \Leftrightarrow a \notin \{-1, 1\}$. In diesem Fall sind

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & a & -1 \\ a & 1 & a \end{vmatrix} = 2a(a-1), \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & a & a \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a-1)^2.$$

Die einzige Lösung ist also $x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{2a}{a+1}, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 0, \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{a-1}{a+1}$.