UNIVERSITATEA BABEŞ-BOLYAI CLUJ-NAPOCA
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

MODEL

Concurs MATE-INFO UBB şi ADMITERE, 2018
Proba scrisă la MATEMATICĂ

PARTEA A

IMPORTANT: La fiecare problemă din Partea A cel puţin un răspuns este corect, şi pot fi corecte mai multe răspunsuri.

1. (5 puncte) Fie punctele $A(2m^2, m+3)$, $B(-1,1)$ şi $C(3,5)$ în planul xOy. Valoarea $m \in \mathbb{R}$ pentru care punctele A, B şi C sunt coliniare este:

$\boxed{\text{A}}$ -1; $\boxed{\text{B}}$ 1; $\boxed{\text{C}}$ $-\frac{1}{2}$; $\boxed{\text{D}}$ $\frac{1}{2}$; $\boxed{\text{E}}$ 0.

2. (5 puncte) O soluţie a ecuaţiei $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 0$ din intervalul $[0, 2\pi]$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $\frac{5\pi}{4}$; $\boxed{\text{B}}$ $\frac{5\pi}{6}$; $\boxed{\text{C}}$ $\frac{\pi}{3}$; $\boxed{\text{D}}$ $\frac{11\pi}{6}$; $\boxed{\text{E}}$ $\frac{\pi}{4}$.

3. (5 puncte) Fie X o mulţime cu 3 elemente şi Y o mulţime cu 2 elemente. Numărul funcţiilor $f : X \to Y$ este:

$\boxed{\text{A}}$ C_3^2; $\boxed{\text{B}}$ A_3^2; $\boxed{\text{C}}$ 0; $\boxed{\text{D}}$ 8; $\boxed{\text{E}}$ 9.

4. (5 puncte) Fie $x_1, x_2 \in \mathbb{C}$ soluţiile ecuaţiei $x^2 - 2x + 3 = 0$. Valoarea lui $x_1^2 + x_2^2$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 3; $\boxed{\text{B}}$ $\frac{2}{3}$; $\boxed{\text{C}}$ $\frac{3}{2}$; $\boxed{\text{D}}$ 1; $\boxed{\text{E}}$ -2.

5. (5 puncte) Fie $a \in \mathbb{R}^*$ şi funcţia $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+a^2}}{x-1}$. Stabiliţi care afirmaţii sunt adevărate:

$\boxed{\text{A}}$ graficul lui f admite 2 asimptote; $\boxed{\text{B}}$ graficul lui f admite 3 asimptote;

$\boxed{\text{C}}$ pe $(1,\infty)$, f este descrescătoare; $\boxed{\text{D}}$ pe $(1,\infty)$, f este crescătoare;

$\boxed{\text{E}}$ pe $(0,\infty) \setminus \{1\}$, f este monotonă.

6. (5 puncte) Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 e^x$. Derivata de ordinul al II-lea a funcţiei f este:

$\boxed{\text{A}}$ $f''(x) = (x^2+2x+2)e^x$; $\boxed{\text{B}}$ $f''(x) = (x^2+4x+2)e^x$; $\boxed{\text{C}}$ $f''(x) = 2e^x$;

$\boxed{\text{D}}$ $f''(x) = (2x^2+x+2)e^x$; $\boxed{\text{E}}$ $f''(x) = 2(x^2+x+1)e^x$.

PARTEA B

1. (10 puncte) Fie $\triangle ABC$ şi punctele $N \in (AB)$, $P \in (BC)$ şi $Q \in (AC)$ astfel ca $AN = 2BN$, $BP = 2CP$ şi $CQ = 2AQ$. Exprimaţi vectorii $\overrightarrow{NP}$, $\overrightarrow{PQ}$ şi $\overrightarrow{QN}$ în funcţie de vectorii $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{AC}$.

2. a) (10 puncte) Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Calculaţi $A + A^2 + \cdots + A^{2018}$.

b) (15 puncte) Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie „$*$” prin $x * y = xy + ax + ay + b$. Determinaţi $a, b \in \mathbb{Z}$ cu $|a| \le 2$ şi $|b| \le 2$ astfel ca $(\mathbb{R}, *)$ să fie un monoid.

3. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \min\{x, x^2, x^3\}$.
a) (15 puncte) Trasaţi graficul funcţiei f.

b) (10 puncte) Determinaţi $\displaystyle\int_{1/2}^{2} f(x)dx$.

NOTĂ:
Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

Răspunsuri şi soluţii

PARTEA A

1. $\boxed{\text{B}}$, $\boxed{\text{C}}$; **2.** $\boxed{\text{B}}$, $\boxed{\text{D}}$; **3.** $\boxed{\text{D}}$; **4.** $\boxed{\text{E}}$; **5.** $\boxed{\text{B}}$, $\boxed{\text{C}}$; **6.** $\boxed{\text{B}}$.

PARTEA B

1. Avem $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$. Rezultă că:

$$\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{BP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC},$$
$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) - \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC},$$
$$\overrightarrow{QN} = \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{QA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.$$

Având exprimaţi 2 dintre cei 3 vectori în funcţie de $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{AC}$, al treilea se poate determina şi din egalitatea $\overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QN} = \overrightarrow{0}$.

2. a) Avem $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_2$, $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -A$, $A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$, deci $A + A^2 + A^3 + A^4 = O_2$. Inductiv, $A^{4k+1} + A^{4k+2} + A^{4k+3} + A^{4k+4} = O_2$ pentru orice $k \in \mathbb{N}$. Rezultă că $A + A^2 + \cdots + A^{2018} = (A + A^2 + \cdots + A^{2016}) + A^{2017} + A^{2018} = A^{2017} + A^{2018} = A + A^2 = A - I_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

b) $(\mathbb{R}, *)$ este monoid dacă şi numai dacă legea de compoziţie „$*$” este asociativă şi există element neutru relativ la „$*$”. Pentru ca „$*$” să fie asociativă trebuie să avem $(x*y)*z = x*(y*z)$ pentru orice $x, y, z \in \mathbb{R}$. Folosind definiţia legii de compoziţie „$*$”, condiţia are loc dacă şi numai dacă $(a+b)z + a^2x = (a+b)x + a^2z$ pentru orice $x, z \in \mathbb{R}$ dacă şi numai dacă $(z-x)(a^2-a-b) = 0$ pentru orice $x, z \in \mathbb{R}$. Astfel avem $a^2 - a - b = 0$. Deoarece căutăm $a, b \in \mathbb{Z}$ cu $|a| \le 2$ şi $|b| \le 2$, rezultă că $(a, b) \in \{(-1, 2), (0, 0), (1, 0), (2, 2)\}$.

Presupunem că există element neutru $e \in \mathbb{R}$ relativ la „$*$”, deci $e * x = x$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$ (legea este evident comutativă). Condiţia are loc dacă şi numai dacă $(e + a - 1)x + ae + b = 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Astfel avem $e + a - 1 = 0$ şi $ae + b = 0$, de unde $e = 1 - a$ şi $a^2 - a - b = 0$. Rezultă că valorile $a, b \in \mathbb{Z}$ cu $|a| \le 2$ şi $|b| \le 2$ pentru care există element neutru sunt aceleaşi cu cele pentru care legea este asociativă.

În concluzie, avem $(a, b) \in \{(-1, 2), (0, 0), (1, 0), (2, 2)\}$.

3. a) Numerele $-1, 0, 1$ sunt rădăcini pentru cel puţin una dintre ecuaţiile $x = x^2$, $x = x^3$, $x^2 = x^3$. Comparând cantităţile x, x^2, x^3 succesiv pe intervalele $(-\infty, -1]$, $(-1, 0]$, $(0, 1]$, $(1, \infty)$, obţinem:

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{dacă } x \in (-\infty, -1] \cup [0, 1], \\ x, & \text{dacă } x \in (-1, 0) \cup (1, \infty). \end{cases}$$

Trasarea graficului lui f se bazează pe trasarea graficelor funcţiilor $x \mapsto x$ şi $x \mapsto x^3$.

b) Avem:

$$\int_{1/2}^{2} f(x)dx = \int_{1/2}^{1} x^3\,dx + \int_{1}^{2} x\,dx = \frac{111}{64}.$$