BABEŞ-BOLYAI TUDOMÁNYEGYETEM, KOLOZSVÁR
MATEMATIKA ÉS INFORMATIKA KAR

MINTA TÉTELSOR A

MATE-INFO UBB versenyre és a FELVÉTELI vizsgára, 2018
MATEMATIKA írásbeli vizsga

I. RÉSZ

FONTOS: Az I. RÉSZ minden feladata esetén legalább egy válasz helyes, és több válasz is helyes lehet.

1. (5 pont) Ha $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ és $\cos x = \frac{2}{3}$, akkor a $\frac{\sin x + \operatorname{tg} x}{\cos x + \operatorname{ctg} x}$ kifejezés értéke:

$\boxed{\text{A}}$ $\frac{3}{4}(3-\sqrt{5})$, $\boxed{\text{B}}$ $\frac{4}{5}(3+\sqrt{5})$, $\boxed{\text{C}}$ $\frac{25}{16}(3+\sqrt{5})$, $\boxed{\text{D}}$ $\frac{16}{25}(3-\sqrt{5})$, $\boxed{\text{E}}$ $\frac{25}{16}(3-\sqrt{5})$.

2. (5 pont) A $(d_1): x+2y-7=0$ és $(d_2): 2x-y+1=0$ egyenesek metszéspontján áthaladó és a $(d): 2x+3y+1=0$ egyenessel párhuzamos egyenes egyenlete:

$\boxed{\text{A}}$ $3x+y-6=0$, $\boxed{\text{B}}$ $\frac{y-3}{-3}=x-1$, $\boxed{\text{C}}$ $2x+3y-11=0$, $\boxed{\text{D}}$ $3x+2y-9=0$, $\boxed{\text{E}}$ $\frac{y-3}{-2}=\frac{x-1}{3}$.

3. (5 pont) Egy $(G,\cdot)$ monoid pontosan akkor csoport, ha:

$\boxed{\text{A}}$ G-ben a semleges elem kivételével minden elem invertálható; $\boxed{\text{B}}$ a G semleges eleme invertálható; $\boxed{\text{C}}$ G-ben léteznek invertálható elemek; $\boxed{\text{D}}$ G-ben minden eleme invertálható; $\boxed{\text{E}}$ G-ben nem léteznek invertálható elemek.

4. (5 pont) Bármely való együtthatójú P polinom esetén a polinom valós gyökeinek száma:

$\boxed{\text{A}}$ egyenlő a polinom fokszámával; $\boxed{\text{B}}$ legfeljebb a polinom fokszámával egyenlő, kivéve a 0 polinom esetén; $\boxed{\text{C}}$ legalább a polinom fokszámával egyenlő; $\boxed{\text{D}}$ legfeljebb a polinom fokszámával egyenlő; $\boxed{\text{E}}$ egyenlő a P polinom $\mathbb{R}[X]$-beli osztóinak számával.

5. (5 pont) Az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} 2\sin x+\cos x, & x\geq 0\\ ax^2+bx+c, & x<0\end{cases}$ függvény kétszer folytonosan deriválható ($a,b,c\in\mathbb{R}$ valós paraméterek). Az $a\cdot b\cdot c$ szorzat értéke eleme a következő halmaznak:

$\boxed{\text{A}}$ $(-\infty,0)$; $\boxed{\text{B}}$ $[-2,2]$; $\boxed{\text{C}}$ $[-\frac{\pi\cdot e}{8},\pi+e)$; $\boxed{\text{D}}$ $[-1,\infty)$; $\boxed{\text{E}}$ $\{-1,1,-i,i\}$.

6. (5 pont) Az $x_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$, $\forall n\geq 1$ összefüggéssel értelmezett sorozat:

$\boxed{\text{A}}$ negatív tagú; $\boxed{\text{B}}$ növekvő; $\boxed{\text{C}}$ korlátos; $\boxed{\text{D}}$ periodikus; $\boxed{\text{E}}$ divergens.

II. RÉSZ

1. (10 pont) Az xOy koordinátarendszerben adottak az $A(1,2)$ $B\left(-\frac{5}{3},0\right)$ és $C(0,2)$ pontok. A $\widehat{BAC}$ szögfelezője a $[BC]$ oldalt D-ben metszi. Számítsd ki az $[AD]$ szakasz hosszát!

2. a) (10 pont) Határozd meg az a és b egész számokat úgy, hogy a

$$z=(-2a^2+a+6)+(a-b^2)i$$

komplex szám teljesítse a $z=|z|$ egyenlőséget!

b) (15 pont) Határozd meg $\mathbb{Z}_5[X]$-ben a páronként különböző együtthatókkal rendelkező, legfeljebb negyedfokú polinomoknak a számát! Ezek közül hánynak gyöke a $\widehat{0}$? Indokold meg a válaszaid!

3. Tekintjük az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1},\quad \forall x\in\mathbb{R}$$

függvényt.

a) (10 pont) Számítsd ki:

$$\lim_{x\to\infty} [f(x)]^{x^2}.$$

b) (10 pont) Igazold, hogy:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{4x}{x^4-1}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}.$$

c) (5 pont) Számítsd ki:

$$\lim_{x\to\infty} x^2 \int_2^x \frac{4t}{t^4-1}\, dt.$$

MEGJEGYZÉS:

Minden feladat kötelező. Hivatalból 10 pont jár.

Munkaidő 3 óra.

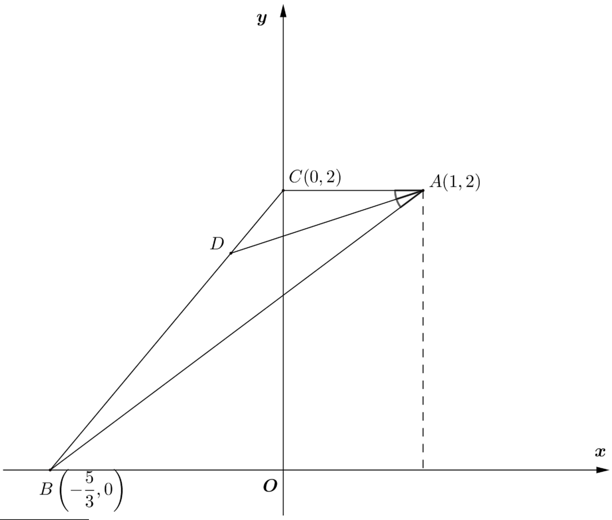
Válaszok és megoldások

I. RÉSZ

1. $\boxed{\text{E}}$; **2.** $\boxed{\text{C}}$, $\boxed{\text{E}}$; **3.** $\boxed{\text{D}}$; **4.** $\boxed{\text{B}}$; **5.** $\boxed{\text{A}}$, $\boxed{\text{B}}$,$\boxed{\text{C}}$,$\boxed{\text{D}}$;$\boxed{\text{E}}$; **6.** $\boxed{\text{B}}$, $\boxed{\text{E}}$.

II. RÉSZ

1. Két pont távolságára vonatkozó összefüggést használjuk:
$AC = \sqrt{(1-0)^2 + (2-2)^2} = 1$



$$AB = \sqrt{\left(1+\frac{5}{3}\right)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{\frac{64}{9}+4} = \frac{10}{3}$$

$\dfrac{DC}{DB} = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{3}{10}$ (szögfelező tétel)

$$x_D = \frac{x_C + \frac{3}{10}x_B}{1+\frac{3}{10}} = \frac{0+\frac{3}{10}\left(-\frac{5}{3}\right)}{\frac{13}{10}} = \frac{\frac{-5}{10}}{\frac{13}{10}} = -\frac{5}{13}$$

$$y_D = \frac{y_C + \frac{3}{10}y_B}{1+\frac{3}{10}} = \frac{2+\frac{3}{10}\cdot 0}{\frac{13}{10}} = \frac{20}{13}$$

$$AD = \sqrt{\left(1+\frac{5}{13}\right)^2 + \left(2-\frac{20}{13}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{18}{13}\right)^2 + \left(\frac{6}{13}\right)^2} = \frac{6}{13}\sqrt{9+1} = \frac{6\sqrt{10}}{13}$$

2. a) $z = |z| \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$ és $z \geq 0$.
$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow a - b^2 = 0 \Leftrightarrow a = b^2$.
Ebben az esetben $z = -2a^2 + a + 6$ és $a \geq 0$.
$z \geq 0 \Leftrightarrow -2a^2 + a + 6 \geq 0 \Leftrightarrow (2a+3)(a-2) \leq 0$, tehát $a \in \mathbb{Z} \cap \left[-\frac{3}{2}, 2\right] \cap [0, \infty) = \{0, 1, 2\}$.

$a = 0 \Leftrightarrow b^2 = 0$, $a = 1 \Leftrightarrow b^2 = 1 \Leftrightarrow b \in \{-1, 1\}$, és $a = 2 \Leftrightarrow b^2 = 2 \Rightarrow b \notin \mathbb{Z}$, nem megfelelő. Így a megoldások $(a, b) \in \{(0,0), (1,-1), (1,1)\}$.

b) A különböző fokszámú polinomokat külön számoljuk össze. A $-\infty$, illetve 0 fokszámú polinomok száma 5 ezek a $\widehat{0}, \widehat{1}, \widehat{2}, \widehat{3}, \widehat{4}$. Az elsőfokú polinomok alakja $aX + b$, ahol $a, b \in \{\widehat{0}, \widehat{1}, \widehat{2}, \widehat{3}, \widehat{4}\}$ különbözők és $a \neq \widehat{0}$. Mivel a 4 különböző módon választható meg és b szintén 4 különböző módon választható meg, ezeknek a polinomoknak a száma $4 \cdot 4 = 16$.

A másodfokú polinomok alakja $aX^2 + bX + c$, ahol $a, b \in \{\widehat{0}, \widehat{1}, \widehat{2}, \widehat{3}, \widehat{4}\}$ különbözők és $a \neq \widehat{0}$; a 4 módon választható és az a minden kiválasztása esetén a b szintén 4 különböző módon választható meg. Az a és b megválasztása után c megválasztására 3 lehetőség van, tehát összesen $4 \cdot 4 \cdot 3 = 48$ másodfokú polinom van, amelynek az együtthatói páronként különböznek. Hasonló gondolatmenet alapján a harmadfokú polinomok száma $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 96$ és a negyedfokú polinomok száma $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 96$. Tehát összesen $96 + 96 + 48 + 16 + 5 = 261$ polinom teljesíti a kért feltételeket.

Mivel egy polinom $\widehat{0}$-ban számolt behelyettesítési értéke a polinom szabadtagja, ezért azt kell meghatározni, hogy az előbbi polinomok közül hánynak 0 a szabadtagja. Az előbbihez hasonló gondolatmenetet alkalmazhatunk. Az identikusan 0 polinomon kívül az elsőfokú polinomok alakja aX, ahol $a \in \{\widehat{1}, \widehat{2}, \widehat{3}, \widehat{4}\}$. Ezek száma 4. A másodfokú polinomok alakja $aX^2 + bX$, ahol $a \neq b$ az $\{\widehat{1}, \widehat{2}, \widehat{3}, \widehat{4}\}$ halmaz elemei. Így $4 \cdot 3 = 12$ lehetőség van. A harmadfokú polinomok alakja $aX^3 + bX^2 + cX$, ahol $a, b, c \in \{\widehat{1}, \widehat{2}, \widehat{3}, \widehat{4}\}$ különbözők. Ennek a megválasztására $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ lehetőség van, míg az $aX^4 + bX^3 + cX^2 + dX$ alakú polinomok közül $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$, mert az együtthatók különbözőek és $a, b, c, d \in \{\widehat{1}, \widehat{2}, \widehat{3}, \widehat{4}\}$. Tehát összesen $1 + 4 + 12 + 24 + 24 = 65$ polinom teljesíti a kért feltételt.

3. a) A kiszámítandó határérték 1^∞ alakú, tehát használhatjuk, hogy $\lim\limits_{y \to 0} = (1 + y)^{\frac{1}{y}} = e$.

$$\lim_{x \to \infty} [f(x)]^{x^2} = \lim_{x \to \infty} [1 + (f(x) - 1)]^{x^2} = \lim_{x \to \infty} \left[[1 + (f(x) - 1)]^{\frac{1}{f(x)-1}} \right]^{x^2(f(x)-1)}.$$

Ebben a kifejezésben

$$\lim_{x \to \infty} x^2(f(x) - 1) = \lim_{x \to \infty} \frac{-2x^2}{x^2 + 1} = -2,$$

és $y = f(x) - 1 \to 0$, tehát $\lim\limits_{x \to \infty} [f(x)]^{x^2} = e^{-2}$.

b) f deriválható $\mathbb{R}$-en és az $f(x) = 0$ egyenlet megoldásai $x_{1,2} = \pm 1$, tehát az $\frac{f'(x)}{f(x)}$ tört jól értelmezett az $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ halmazon. A tört deriválási szabálya alapján:

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 + 1) - 2x(x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2},$$

tehát

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = \frac{4x}{(x^2 + 1)(x^2 - 1)} = \frac{4x}{x^4 - 1}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}.$$

c) Az $(1, \infty)$ intervallumon az f függvény pozitív értékeket vesz fel, tehát az előbbi tulajdonság alapján

$$\int_2^x \frac{4t}{t^4 - 1}\, dt = \int_2^x \frac{f'(t)}{f(t)}\, dt = \ln f(t) \Big|_2^x = \ln f(x) - \ln f(2).$$

Így

$$\lim_{x \to \infty} x^2 \int_2^x \frac{4t}{t^4 - 1}\, dt = \lim_{x \to \infty} [x^2 \ln f(x) - x^2 \ln f(2)].$$

Másrészt $\lim\limits_{x \to \infty} x^2 \ln f(x) = -2$ (az a) alpontban elvégzett számolások alapján) és $\ln f(2) = \ln \frac{3}{5} < 0$, tehát $\lim\limits_{x \to \infty} x^2 \ln f(2) = -\infty$, vagyis

$$\lim_{x \to \infty} x^2 \int_2^x \frac{4t}{t^4 - 1}\, dt = \infty.$$