BABEŞ-BOLYAI UNIVERSITY CLUJ-NAPOCA
FACULTY OF MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE

MODEL

MATE-INFO UBB COMPETITION and ADMISSIONS EXAM, 2018
Written test in MATHEMATICS

PART A

IMPORTANT: For each problem in Part A, at least one answer is correct, and several answers may be correct.

1. (5 points) If $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ and $\cos x = \frac{2}{3}$, then the value of $\frac{\sin x + \operatorname{tg} x}{\cos x + \operatorname{ctg} x}$ is:

$\boxed{A}$ $\frac{3}{4}(3-\sqrt{5})$, $\boxed{B}$ $\frac{4}{5}(3+\sqrt{5})$, $\boxed{C}$ $\frac{25}{16}(3+\sqrt{5})$, $\boxed{D}$ $\frac{16}{25}(3-\sqrt{5})$, $\boxed{E}$ $\frac{25}{16}(3-\sqrt{5})$.

2. (5 points) The equation of the line that passes through the point of intersection of the lines $(d_1) : x + 2y - 7 = 0$ and $(d_2) : 2x - y + 1 = 0$ and is parallel to the line $(d) : 2x + 3y + 1 = 0$ is:

$\boxed{A}$ $3x + y - 6 = 0$, $\boxed{B}$ $\frac{y-3}{-3} = x - 1$, $\boxed{C}$ $2x + 3y - 11 = 0$, $\boxed{D}$ $3x + 2y - 9 = 0$, $\boxed{E}$ $\frac{y-3}{-2} = \frac{x-1}{3}$.

3. (5 points) A monoid $(G, \cdot)$ is a group if and only if:

$\boxed{A}$ all elements of G, except the identity element, are invertible; $\boxed{B}$ the identity element of G is invertible; $\boxed{C}$ G has invertible elements; $\boxed{D}$ all elements of G are invertible; $\boxed{E}$ G has no invertible elements.

4. (5 points) For any polynomial with real coefficients P, the number of real roots is:

$\boxed{A}$ equal to the degree of the polynomial; $\boxed{B}$ at most equal to the degree of the polynomial, except for the zero polynomial; $\boxed{C}$ at least equal to the degree of the polynomial; $\boxed{D}$ at most equal to the degree of the polynomial; $\boxed{E}$ equal to the number of polynomials in $\mathbb{R}[X]$ that divide P.

5. (5 points) The function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ defined by $f(x) = \begin{cases} 2\sin x + \cos x, & x \geq 0 \\ ax^2 + bx + c, & x < 0 \end{cases}$ is twice differentiable ($a, b, c \in \mathbb{R}$ are real parameters). The value of $a \cdot b \cdot c$ belongs to the set

$\boxed{A}$ $(-\infty, 0)$; $\boxed{B}$ $[-2, 2]$; $\boxed{C}$ $[-\frac{\pi \cdot e}{8}, \pi + e)$; $\boxed{D}$ $[-1, \infty)$; $\boxed{E}$ $\{-1, 1, -i, i\}$.

6. (5 points) The sequence defined by $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$, $\forall n \geq 1$ is:

$\boxed{A}$ a sequence with negative terms; $\boxed{B}$ increasing; $\boxed{C}$ bounded; $\boxed{D}$ periodic; $\boxed{E}$ divergent.

PARTEA B

1. (10 points) In the xOy plane, consider the points $A(1,2)$,$B\left(-\frac{5}{3}, 0\right)$ and $C(0,2)$. The bisector of the angle $\widehat{BAC}$ intersects [BC] in D. Compute the length of the segment [AD].

2. a) (10 points) Find the integers a and b so that the complex number

$$z = (-2a^2 + a + 6) + (a - b^2)i$$

satisfies the condition $z = |z|$.

b) (15 points) Find the number of polynomials of degree at most 4 from $\mathbb{Z}_5[X]$, with distinct coefficients. How many of these have $\widehat{0}$ as a root? Justify your answers.

3. Let $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be defined by

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

a) (10 points) Compute

$$\lim_{x\to\infty} [f(x)]^{x^2}.$$

b) (10 points) Show that

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{4x}{x^4-1}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}.$$

c) (5 points) Find

$$\lim_{x\to\infty} x^2 \int_2^x \frac{4t}{t^4-1}\, dt.$$

NOTE:

All subjects are mandatory. Grading starts at 10 points.
Working time is 3 hours.

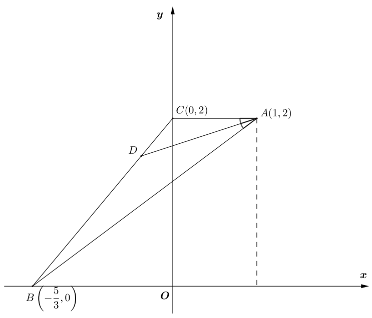
Răspunsuri şi soluţii

PARTEA I

1. $\boxed{E}$; **2.** $\boxed{C}$, $\boxed{E}$; **3.** $\boxed{D}$; **4.** $\boxed{B}$; **5.** $\boxed{A}$, $\boxed{B}$,$\boxed{C}$,$\boxed{D}$;$\boxed{E}$; **6.** $\boxed{B}$, $\boxed{E}$.

PARTEA II

1. Folosind formula distanţei dintre două puncte avem:
$AC = \sqrt{(1-0)^2+(2-2)^2} = 1$



$AB = \sqrt{\left(1+\frac{5}{3}\right)^2+(2-0)^2} = \sqrt{\frac{64}{9}+4} = \frac{10}{3}$

$\frac{DC}{DB} = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{10}$ (teorema bisectoarei)

$$x_D = \frac{x_C+\frac{3}{10}x_B}{1+\frac{3}{10}} = \frac{0+\frac{3}{10}\left(-\frac{5}{3}\right)}{\frac{13}{10}} = \frac{\frac{-5}{10}}{\frac{13}{10}} = -\frac{5}{13}$$

$$y_D = \frac{y_C+\frac{3}{10}y_B}{1+\frac{3}{10}} = \frac{2+\frac{3}{10}\cdot 0}{\frac{13}{10}} = \frac{20}{13}$$

$$AD = \sqrt{\left(1+\frac{5}{13}\right)^2+\left(2-\frac{20}{13}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{18}{13}\right)^2+\left(\frac{6}{13}\right)^2} = \frac{6}{13}\sqrt{9+1} = \frac{6\sqrt{10}}{13}$$

2. a) $z = |z| \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$ şi $z \geq 0$.
$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow a - b^2 = 0 \Leftrightarrow a = b^2$.
În acest caz $z = -2a^2 + a + 6$ şi $a \geq 0$.
$z \geq 0 \Leftrightarrow -2a^2+a+6 \geq 0 \Leftrightarrow (2a+3)(a-2) \leq 0$, deci $a \in \mathbb{Z} \cap \left[-\frac{3}{2}, 2\right] \cap [0,\infty) = \{0,1,2\}$.

$a = 0 \Leftrightarrow b^2 = 0$, $a = 1 \Leftrightarrow b^2 = 1 \Leftrightarrow b \in \{-1,1\}$, iar $a = 2 \Leftrightarrow b^2 = 2 \Rightarrow b \notin \mathbb{Z}$, nu convine. Astfel soluţiile sunt $(a,b) \in \{(0,0),(1,-1),(1,1)\}$

b) Polinoamele de grade diferite formează clase distincte. Avem 5 polinoame de grad $-\infty$ sau 0 (şi anume $\widehat{0},\widehat{1},\widehat{2},\widehat{3},\widehat{4}$). Polinoamele de grad 1 cu coeficienţi distincţi sunt de forma $aX+b$, cu $a,b \in \{\widehat{0},\widehat{1},\widehat{2},\widehat{3},\widehat{4}\}$ distincte şi $a \neq \widehat{0}$. Cum a poate fi ales în 4 moduri, iar pentru fiecare alegere a lui a, b poate fi oricare dintre celelalte 4 elemente, există $4\cdot 4 = 16$ polinoame de grad 1 cu coeficienţi distincţi.

Polinoamele de grad 2 din prima parte a problemei sunt de forma aX^2+bX+c, cu $a,b \in \{\widehat{0},\widehat{1},\widehat{2},\widehat{3},\widehat{4}\}$ distincte şi $a \neq \widehat{0}$; a poate fi ales în 4 moduri, pentru fiecare alegere a lui a, b poate fi oricare dintre celelalte 4 elemente diferite de a, iar pentru fiecare alegere a lui a şi b, c poate fi oricare dintre cele 3 elemente rămase. Prin urmare, există $4\cdot 4\cdot 3 = 48$ polinoame de grad 2 cu coeficienţi distincţi. Similar se deduce că numărul polinoamelor cu coeficienţi distincţi care au gradul 3 este $4\cdot 4\cdot 3\cdot 2 = 96$, iar al celor de grad 4 este $4\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 96$. Deci răspunsul la prima întrebare este $96+96+48+16+5 = 261$.

Cum imaginea unui polinom în $\widehat{0}$ este termenul liber, cerinţa problemei este de a găsi câte dintre polinoamele de mai sus au termenul liber 0. Putem raţiona ca mai sus şi, pe lângă polinomul nul, avem polinoamele de forma aX cu $a \in \{\widehat{1}, \widehat{2}, \widehat{3}, \widehat{4}\}$, în număr de 4, polinoamele de forma $aX^2 + bX$ cu $a \neq b$ din $\{\widehat{1}, \widehat{2}, \widehat{3}, \widehat{4}\}$ care sunt $4 \cdot 3 = 12$, polinoamele de forma $aX^3 + bX^2 + cX$ cu $a, b, c \in \{\widehat{1}, \widehat{2}, \widehat{3}, \widehat{4}\}$ distincte care sunt $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ şi polinoamele de forma $aX^4 + bX^3 + cX^2 + dX$ cu $a, b, c, d \in \{\widehat{1}, \widehat{2}, \widehat{3}, \widehat{4}\}$ care sunt $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$. Deci răspunsul la a doua întrebare este $1 + 4 + 12 + 24 + 24 = 65$.

Observaţie: Se poate observa că ceea ce numărăm de fapt sunt aranjamente. Mai exact, numărul polinoamelor:

- de gradul 1 cu coeficienţi distincţi este $A_5^2 - A_4^1$,
- de gradul 2 cu coeficienţi distincţi este $A_5^3 - A_4^2$,
- de gradul 3 cu coeficienţi distincţi este $A_5^4 - A_4^3$,
- de gradul 4 cu coeficienţi distincţi este $A_5^5 - A_4^4$,

unde scăzătorii numără submulţimi ordonate ale mulţimii $\{\widehat{1}, \widehat{2}, \widehat{3}, \widehat{4}\}$ ce corespund variantelor de alegere a coeficienţilor care nu convin deoarece au pe $\widehat{0}$ coeficient al lui X, X^2, X^3, respectiv X^4.

Pentru partea a doua, unde $\widehat{0}$ este termenul liber, numărăm submulţimi ordonate ale mulţimii $\{\widehat{1}, \widehat{2}, \widehat{3}, \widehat{4}\}$ care vor corespunde coeficienţilor celorlalti monoame din componenţa polinoamelor de numărat. Astfel, numărul polinoamelor cu $\widehat{0}$ rădăcină şi cu coeficienţi distincţi care au:

- gradul 1 este A_4^1,
- gradul 2 este A_4^2,
- gradul 3 este A_4^3,
- gradul 4 este A_4^4.

3. a) Limita din enunţ este o determinare de forma 1^∞, deci putem folosi limita $\lim\limits_{y \to 0} = (1+y)^{\frac{1}{y}} = e$.

$$\lim_{x\to\infty} [f(x)]^{x^2} = \lim_{x\to\infty} [1 + (f(x) - 1)]^{x^2} = \lim_{x\to\infty} \left[[1 + (f(x) - 1)]^{\frac{1}{f(x)-1}} \right]^{x^2(f(x)-1)}.$$

În această expresie avem

$$\lim_{x\to\infty} x^2(f(x) - 1) = \lim_{x\to\infty} \frac{-2x^2}{x^2 + 1} = -2,$$

şi $y = f(x) - 1 \to 0$, deci $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x)]^{x^2} = e^{-2}$.

b) Funcţia f este derivabilă pe $\mathbb{R}$, şi ecuaţia $f(x) = 0$ are soluţiile $x_{1,2} = \pm 1$, deci fracţia $\frac{f'(x)}{f(x)}$ este definită pe $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Calculăm derivata funcţiei f.

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 + 1) - 2x(x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2},$$

deci

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = \frac{4x}{(x^2 + 1)(x^2 - 1)} = \frac{4x}{x^4 - 1}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}.$$

c) Pe intervalul $(1, \infty)$ funcţia f este pozitivă, deci folosind proprietatea anterioară avem

$$\int_2^x \frac{4t}{t^4 - 1}\, dt = \int_2^x \frac{f'(t)}{f(t)}\, dt = \ln f(t)\Big|_2^x = \ln f(x) - \ln f(2).$$

Astfel avem

$$\lim_{x\to\infty} x^2 \int_2^x \frac{4t}{t^4 - 1}\, dt = \lim_{x\to\infty} [x^2 \ln f(x) - x^2 \ln f(2)].$$

Pe de altă parte $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 \ln f(x) = -2$ (datorită problemei a)) şi $\ln f(2) = \ln \frac{3}{5} < 0$, deci $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 \ln f(2) = -\infty$, adică

$$\lim_{x\to\infty} x^2 \int_2^x \frac{4t}{t^4 - 1}\, dt = \infty.$$