BABEŞ-BOLYAI UNIVERSITÄT CLUJ-NAPOCA
FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK UND INFORMATIK

# MUSTER-THEMEN

**MATHE-INFO BBU Wettbewerb und AUFNAHMEPRÜFUNG 2018**
**Schriftliche Prüfung in MATHEMATIK**

## TEIL A

**MAN BEACHTE: Bei jeder Aufgabe aus Teil A ist wenigstens eine Antwort richtig, es können jedoch auch mehrere Antworten richtig sein.**

**1. (5 Punkte)** Sind $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ und $\cos x = \frac{2}{3}$, dann ist der Ausdruck $\frac{\sin x + \operatorname{tg} x}{\cos x + \operatorname{ctg} x}$ gleich:

$\boxed{A}$ $\frac{3}{4}(3-\sqrt{5})$, $\boxed{B}$ $\frac{4}{5}(3+\sqrt{5})$, $\boxed{C}$ $\frac{25}{16}(3+\sqrt{5})$, $\boxed{D}$ $\frac{16}{25}(3-\sqrt{5})$, $\boxed{E}$ $\frac{25}{16}(3-\sqrt{5})$.

**2. (5 Punkte)** Die Gleichung der Geraden, die den Schnittpunkt der Geraden $(d_1) : x + 2y - 7 = 0$ und $(d_2) : 2x - y + 1 = 0$ enthält und parallel zur Geraden $(d) : 2x + 3y + 1 = 0$ verläuft, ist:

$\boxed{A}$ $3x + y - 6 = 0$, $\boxed{B}$ $\frac{y-3}{-3} = x - 1$, $\boxed{C}$ $2x + 3y - 11 = 0$, $\boxed{D}$ $3x + 2y - 9 = 0$, $\boxed{E}$ $\frac{y-3}{-2} = \frac{x-1}{3}$.

**3. (5 Punkte)** Ein Monoid $(G, \cdot)$ ist genau dann eine Gruppe, wenn:

$\boxed{A}$ alle Elemente von $G$, mit Ausnahme des neutralen Elementes, umkehrbar sind; $\boxed{B}$ das neutrale Element von $G$ umkehrbar ist; $\boxed{C}$ es umkehrbare Elemente in $G$ gibt; $\boxed{D}$ alle seine Elemente umkehrbar sind; $\boxed{E}$ es keine umkehrbaren Elemente in $G$ gibt.

**4. (5 Punkte)** Für jedes Polynom $P$ mit reellen Koeffizienten ist die Anzahl der reellen Nullstellen:

$\boxed{A}$ gleich dem Grad des Polynoms; $\boxed{B}$ höchstens gleich dem Grad des Polynoms, mit Ausnahme des Falles, wenn das Polynom das Nullpolynom ist; $\boxed{C}$ wenigstens gleich dem Grad des Polynoms; $\boxed{D}$ höchstens gleich dem Grad des Polynoms; $\boxed{E}$ gleich der Anzahl der Polynome aus $\mathbb{R}[X]$, die $P$ teilen.

**5. (5 Punkte)** Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch $f(x) = \begin{cases} 2\sin x + \cos x, & x \geq 0 \\ ax^2 + bx + c, & x < 0 \end{cases}$, sei zweimal differenzierbar ($a, b, c \in \mathbb{R}$ sind reelle Parameter). Das Produkt $a \cdot b \cdot c$ befindet sich in der Menge

$\boxed{A}$ $(-\infty, 0)$; $\boxed{B}$ $[-2, 2]$ ; $\boxed{C}$ $[-\frac{\pi \cdot e}{8}, \pi + e)$; $\boxed{D}$ $[-1, \infty)$; $\boxed{E}$ $\{-1, 1, -i, i\}$.

**6. (5 Punkte)** Die durch $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$, $\forall n \geq 1$, erklärte Folge:

$\boxed{A}$ hat nichtnegative Glieder; $\boxed{B}$ ist wachsend; $\boxed{C}$ ist beschränkt; $\boxed{D}$ ist periodisch; $\boxed{E}$ ist divergent.

## TEIL B

**1. (10 Punkte)** In der $xOy$-Ebene seien die Punkte $A(1, 2)$, $B\left(-\frac{5}{3}, 0\right)$ und $C(0, 2)$ gegeben. Die Winkelhalbierende des Winkels $\widehat{BAC}$ schneidet die Seite [BC] im Punkt D. Man berechne die Länge der Strecke [AD].

**2. a) (10 Punkte)** Man bestimme die ganzen Zahlen $a$ und $b$ so, dass die komplexe Zahl

$$z = (-2a^2 + a + 6) + (a - b^2)i$$

der Bedingung $z = |z|$ genügt.

**b) (15 Punkte)** Man bestimme die Anzahl der Polynome vom Grad höchstens 4 aus $\mathbb{Z}_5[X]$, die verschiedene Koeffizienten haben. Wie viele dieser Polynome haben das Element $\widehat{0}$ als Nullstelle? Man begründe die Antworten.

**3.** Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

**a) (10 Punkte)** Man bestimme

$$\lim_{x\to\infty} [f(x)]^{x^2}.$$

**b) (10 Punkte)** Man zeige, dass

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{4x}{x^4 - 1}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, \text{ ist.}$$

**c) (5 Punkte)** Man berechne

$$\lim_{x\to\infty} x^2 \int_2^x \frac{4t}{t^4 - 1}\, dt.$$

BEMERKUNGEN:

Alle Themen sind verpflichtend. Die Bewertung fängt mit 10 Punkten an.

Die Bearbeitungszeit beträgt 3 Stunden.