Continuitate și derivabilitate

1. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcția definită prin $f(x) = |x - 2k|$, pentru orice $x \in (2k-1, 2k+1]$ și orice $k \in \mathbb{Z}$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

   A f nu este continuă pe $\mathbb{R}$.
   B f este derivabilă pe $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.
   C f este derivabilă pe $\mathbb{R}$.
   D f nu este continuă pe $\{2k - 1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

2. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcția definită prin $f(x) = |x|(e^x - 1)$. Care afirmații sunt adevărate?

   A f nu este derivabilă în 0.
   B f este continuă în 0.
   C f este injectivă.
   D f este surjectivă.

3. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcția definită prin $f(x) = \sqrt[3]{x+2} - \sqrt[3]{x}$. Care afirmații sunt adevărate?

   A f este derivabilă pe $\mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}$.
   B f are exact un punct de extrem local.
   C f are puncte de minim global.
   D $\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{7} < 2\sqrt[3]{5}$.

4. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcția definită prin $f(x) = \sqrt[3]{(x^2-1)^2}$ și fie n numărul punctelor de extrem local ale lui f. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

   A $n = 0$.
   B $n = 1$.
   C $n = 2$.
   D $n = 3$.

5. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcția definită prin $f(x) = \sqrt[5]{x^3 - \sin^3 x}$. Atunci $f'(0)$:

   A este 0.
   B este $1/\sqrt[5]{2}$.
   C este ∞.
   D nu există.

6. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcția definită prin $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{if } x \neq 0 \\ 0, & \text{if } x = 0. \end{cases}$

   A f nu are limită în 0.
   B f nu este continuă în 0.
   C f este derivabilă în 0.
   D f' nu este continuă în 0.

7. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcția definită prin $f(x) = \displaystyle\int_0^1 |t - x|^3 \mathrm{d}t$. Care e valoarea minimă a lui f?

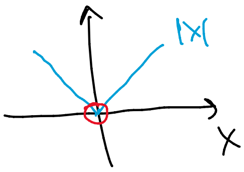
Universitatea Babeş-Bolyai, Facultatea de Matematică şi Informatică
Consultaţii la matematică pentru pregătirea concursului de admitere 2023

Continuitate şi derivabilitate

1. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcţia definită prin $f(x) = |x - 2k|$, pentru orice $x \in (2k - 1, 2k + 1]$ şi orice $k \in \mathbb{Z}$. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate?

× [A] f nu este continuă pe $\mathbb{R}$.
✓ [B] f este derivabilă pe $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.
× [C] f este derivabilă pe $\mathbb{R}$.
× [D] f nu este continuă pe $\{2k - 1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Ex: $g(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

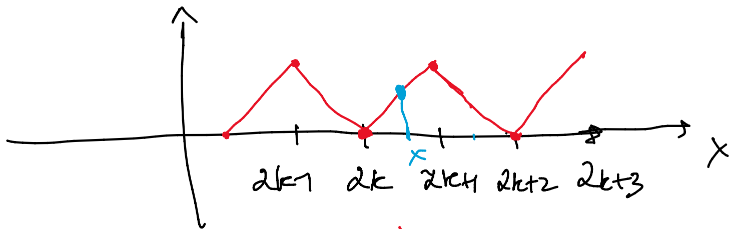


$g'(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$

$\nexists\, g'(0)$

- continuă pe $\mathbb{R}$
- derivabilă pe $\mathbb{R} \setminus \{0\}$
- minim global în 0.

$f(x) = |x - 2k|$, dacă $x \in (2k-1, 2k+1]$.



• f continuă pe $\mathbb{R}$; • f derivabilă pe $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

2. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcţia definită prin $f(x) = |x|(e^x - 1)$. Care afirmaţii sunt adevărate?

× [A] f nu este derivabilă în 0.
✓ [B] f este continuă în 0.
✓ [C] f este injectivă.
✓ [D] f este surjectivă.

$$f(x) = |x|(e^x - 1) = \begin{cases} x(e^x - 1), & \text{dacă } x \geq 0 \\ -x(e^x - 1), & \text{dacă } x < 0 \end{cases}, \quad f'(x) = \begin{cases} (x+1)e^x - 1, & x > 0 \\ -(x+1)e^x + 1, & x < 0 \end{cases}$$

$$[x(e^x - 1)]' = e^x - 1 + x \cdot e^x = (x+1)e^x - 1.$$

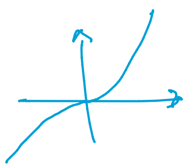
Derivatele laterale în 0:

$$f'_d(0) = e^0 - 1 = 0 = -e^0 + 1 = f'_s(0)$$

$$\Downarrow$$

$$f'(0) = 0.$$

x	$-\infty$		0		∞
$f'(x)$		$+++$	0	$+++$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow\nearrow\nearrow$	0	$\nearrow\nearrow\nearrow$	∞



• $x > 0$, $f'(x) = \underbrace{xe^x}_{>0} + \underbrace{e^x - 1}_{>0} > 0$; • $x < 0$, $f'(x) = \underbrace{-xe^x}_{>0} \underbrace{- e^x + 1}_{>0} > 0$.

$f' > 0 \Rightarrow f$ strict crescătoare $\Rightarrow$ f injectivă

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty \cdot (-1) = -\infty$, f continuă (deci Darboux) $\Rightarrow$ f surjectivă.

3. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ funcția definită prin $f(x)=\sqrt[3]{x+2}-\sqrt[3]{x}$. Care afirmații sunt adevărate?

✓ A f este derivabilă pe $\mathbb{R}\setminus\{-2,0\}$.

✓ B f are exact un punct de extrem local.

✗ C f are cel puțin un punct de minim global.

✓ D $\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{7}<2\sqrt[3]{5}$.

$$(\sqrt[3]{x})'=(x^{\frac{1}{3}})'=\frac{1}{3x^{2/3}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$; $\sqrt[3]{x}$ derivabilă pt $x\neq 0$. derivata în 0 e $+\infty$.

- $$f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{(x+2)^2}}-\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}=\frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{(x+2)^2}}{3\sqrt[3]{x^2(x+2)^2}}$$

Puncte de extrem: $f'(x)=0 \Rightarrow \sqrt[3]{x^2}=\sqrt[3]{(x+2)^2}\,\Big|^3$, $x^2=(x+2)^2 \Rightarrow \cancel{x^2}=\cancel{x^2}+4x+4$

$x=-1$, $f'(-1)=0$.

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+\ +\ +$	$+\infty \mid +\infty$	$+\ +$	0	$-\ -$	$-\infty \mid -\infty$	$-\ -\ -\ -$	
$f(x)$	0	$\nearrow$		$\nearrow$	2	$\searrow$		$\searrow$	0

- $\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{7}<2\sqrt[3]{5} \iff \sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{5}<\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{3} \iff f(5)<f(3)$ adevărat pt că f e descresc. pe $(0,\infty)$.

4. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ funcția definită prin $f(x)=\sqrt[3]{(x^2-1)^2}$ și fie n numărul punctelor de extrem local ale lui f. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

A $n=0$. B $n=1$. C $n=2$. ✓ D $n=3$.

$$(\sqrt[3]{u})'=\frac{u'}{3\sqrt[3]{u^2}},\quad f'(x)=\frac{2(x^2-1)2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^4}}=\frac{4x}{\sqrt[3]{x^2-1}},\quad x^2\neq 1,\ x\neq\pm 1$$

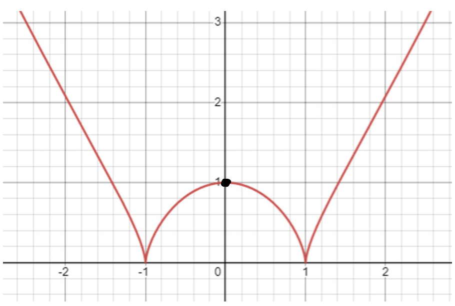
$u=(x^2-1)^2$, $u'=2(x^2-1)2x$

- Puncte de extrem local: $f'(x)=0 \Rightarrow x=0$.
(atunci când f e derivabilă)

- Funcția f nu e derivabilă în $x=\pm 1$.

$$f(-1)=f(1)=0\leq f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

pcte de extrem



5. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ funcția definită prin $f(x)=\sqrt[5]{x^3-\sin^3 x}$. Atunci $f'(0)$:

A este 0. B este 1/2. $\frac{1}{\sqrt[5]{2}}$ C este ∞. D nu există.

$$\left(\sqrt[5]{u}\right)' = \left(u^{\frac{1}{5}}\right)' = \frac{u'}{5\,u^{4/5}} = \frac{u'}{5\sqrt[5]{u^4}}$$. "Probleme" când $u=0$.

Definiție: $$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}.$$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{x^3-\sin^3 x}}{x}=\lim_{x\to 0}\sqrt[5]{\frac{x^3-\sin^3 x}{x^5}}=\Bigl(\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{x^3-\sin^3 x}{x^5}}_{L}\Bigr)^{\frac{1}{5}}=L^{\frac{1}{5}}.$$

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)(x^2+x\sin x+\sin^2 x)}{x^3\cdot x^2}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1}$$

$$=\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}}_{=\frac{1}{6}}\cdot\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{x^2+x\sin x+\sin^2 x}{x^2}}_{=3}\longrightarrow L=\frac{1}{2}\Rightarrow\boxed{f'(0)=\frac{1}{\sqrt[5]{2}}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}\overset{l'H}{\underset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}\overset{l'H}{\underset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}.$$

6. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ funcția definită prin $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x}, & \text{if } x\neq 0\\ 0, & \text{if } x=0.\end{cases}$

$$\nexists\lim_{x\to 0}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

✗ A f nu are limită în 0. ✓ C f este derivabilă în 0.

✗ B f nu este continuă în 0. ✓ D f' nu este continuă în 0.

$$0\le\left|x^2\sin\frac{1}{x}\right|=|x^2|\,\underbrace{\left|\sin\frac{1}{x}\right|}_{\le 1}\le x^2\longrightarrow\lim_{x\to 0}f(x)=0=f(0)$$

continuă în 0.

$$f'(x)=\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)'=2x\sin\frac{1}{x}-x^2\cdot\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x},\ x\neq 0.$$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0\Rightarrow\boxed{f'(0)=0}$$

(0 · mărginit) = 0

$$f'(x)=\begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases} \qquad \nexists \lim_{x\to 0} f'(x)$$

$\Rightarrow f'$ nu e continuă în 0.

7. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ funcția definită prin $f(x)=\int_0^1 |t-x|^3 dt$. Care e valoarea minimă a lui f?

Metoda 1: $f'(x)=0$.

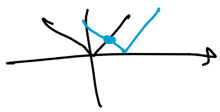
$$f(x)=\int_0^1 |t-x|^3 dt = \int_{-x}^{1-x} |u|^3 du \underset{u=-u}{=} -\int_{x}^{x-1} |u|^3 du = \int_{x-1}^{x} |u|^3 du.$$

$u=t-x$, $t=0, u=-x$; $t=1, u=1-x$

$\frac{du}{dt}=1$, $du=dt$

Fie $G(u)=\int |u|^3 du$.

$f(x)=G(x)-G(x-1)$.



- $f'(x)=G'(x)-G'(x-1)=|x|^3-|x-1|^3$.

$f'(x)=0 \Rightarrow |x|^3=|x-1|^3 \Rightarrow |x|=|x-1| \Rightarrow x=\frac{1}{2}$.

- Valoarea minimă e $f\left(\frac{1}{2}\right)=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |u|^3 du$.

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |u|^3 du = 2\int_0^{\frac{1}{2}} |u|^3 du = 2\int_0^{\frac{1}{2}} u^3 du = 2\cdot\frac{1}{4\cdot 2^4}=\frac{1}{2^5}=\boxed{\frac{1}{32}}$$

$|u|^3$ e pară

$|-u|^3=|u|^3$