Universitatea Babeş-Bolyai, Facultatea de Matematică şi Informatică
Consultaţii la Matematică pentru pregătirea concursului de admitere 2023

---

12 noiembrie 2022 Lect. dr. Mihai Iancu

Inducţie matematică

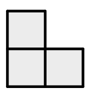
1. Fie $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, și $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt[k]{1 + x^k}}$. Determinați $\underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{\text{de 2022 de ori}}(1)$.

2. Există 2023 de numere naturale, distincte două câte două, astfel încât fiecare număr să dividă suma celorlalte 2022 de numere?

3. a) Fie f și g funcții de $n \in \mathbb{N}^*$ ori derivabile pe un interval deschis. Demnonstrați (formula generală a lui Leibniz):

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k)} \cdot g^{(k)}.$$

b) Fie $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$. Determinați $f^{(2022)}(0)$.

4. Demonstrați că orice tablă cu $2^n \times 2^n$ pătrățele, $n \in \mathbb{N}^*$, având un pătrățel oarecare lipsă, poate fi acoperită cu piese de forma  .

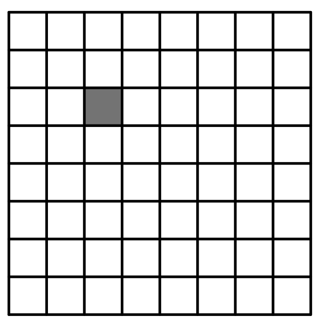


Tabla cu pătrățel lipsă pentru $n = 3$.

5. a) Demonstrați că $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left[\frac{n}{k}\right] = \sum_{k=1}^{n} D_k$, $n \in \mathbb{N}^*$, unde D_k este numărul divizorilor lui k.

b) Numărul $[\sqrt{2022}] + \displaystyle\sum_{k=1}^{2022} \left[\frac{2022}{k}\right]$ este par sau impar?

Bibliografie

[1] `https://www.cut-the-knot.org/induction.shtml`