Trigonometrie

1. (Admitere 2019) Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^*$ definită prin $f(x) = \cos x + i \cdot \sin x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
Să se indice care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate:

   A f este un morfism de grupuri între grupurile $(\mathbb{R}, +)$ şi $(\mathbb{C}^*, \cdot)$. B f este injectivă.
   C f este surjectivă. D f este un izomorfism de grupuri între grupurile $(\mathbb{R}, +)$ şi $(\mathbb{C}^*, \cdot)$.

B – $f(0) = f(2\pi)$, deci f nu este injectivă.

C – (f este surjectivă, dacă $\operatorname{Im} f = \mathbb{C}^*$.)

$$|\cos x + i \sin x| = \sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x} = 1.$$

f nu este surjectivă, deoarece

$$\operatorname{Im} f = \{ z \in \mathbb{C} : |z| = 1 \}.$$

D – este fals pentru că B este fals.

A – este adevărat, deoarece

$$f(x) \cdot f(y) = (\cos x + i \sin x) \cdot (\cos y + i \sin y) =$$

$$= \underbrace{(\cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y)}_{= \cos(x+y)} + i \cdot (\underbrace{\sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y}_{\sin(x+y)})$$

$$= \cos(x+y) + i \cdot \sin(x+y) = f(x+y).$$

2. Să se determine valoarea de adevăr a propoziţiei

$$E(x) := \frac{\sin 2x}{1+\cos 2x} \cdot \frac{\cos x}{1+\cos x} \cdot \frac{\cos \frac{x}{2}}{1+\cos \frac{x}{2}} = \tan \frac{x}{4}$$

pentru valorile $x \in \mathbb{R}$ pentru care expresiile din ambii membrii sunt definite.

$\sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$

$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \Rightarrow 1 + \cos 2x = 2\cos^2 x.$

$1 + \cos x = 2\cos^2 \frac{x}{2}$

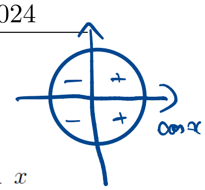
$1 + \cos \frac{x}{2} = 2\cos^2 \frac{x}{4}$

$$E(x) = \frac{\cancel{2} \cdot \sin x \cdot \cancel{\cos x}}{\cancel{2}\, \cancel{\cos^2 x}} \cdot \frac{\cancel{\cos x}}{2\cos^2 \frac{x}{2}} \cdot \frac{\cancel{\cos \frac{x}{2}}}{2\cos^2 \frac{x}{4}}$$

$$= \frac{\cancel{2} \cdot \sin \frac{x}{2} \cdot \cancel{\cos \frac{x}{2}}}{\cancel{2} \cdot \cancel{\cos \frac{x}{2}} \cdot 2\cos^2 \frac{x}{4}} = \frac{\cancel{2} \cdot \sin \frac{x}{4} \cdot \cancel{\cos \frac{x}{4}}}{\cancel{2}\cos^{\cancel{2}} \frac{x}{4}}$$

$$= \frac{\sin \frac{x}{4}}{\cos \frac{x}{4}} = \tan \frac{x}{4}.$$

3. Demonstraţi că pentru $x \in (0, \pi/2)$ are loc relaţia



$$E(x) = \sqrt{2+2\cos x} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+2\cos x}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos x}}} = \frac{\sin x}{\sin \frac{x}{8}}.$$

$$2+2\cos x = 2(1+\cos x) = 2 \cdot 2 \cdot \cos^2\frac{x}{2} = 4 \cdot \cos^2\frac{x}{2}.$$

$$\sqrt{4 \cdot \cos^2\frac{x}{2}} = 2 \cdot \cos\frac{x}{2}.$$

$$\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos x}} = \sqrt{2+2\cdot\cos\frac{x}{2}} = \sqrt{4\cdot\cos^2\frac{x}{4}}$$

$$= 2\cdot\cos\frac{x}{4}.$$

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos x}}} = \sqrt{2+2\cdot\cos\frac{x}{4}}$$

$$= \sqrt{4\cdot\cos^2\frac{x}{8}} = 2\cdot\cos\frac{x}{8}.$$

$$E(x) = 8\cdot\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{4}\cdot\cos\frac{x}{8}$$

$$= \frac{4\cdot\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{4}\cdot\left(2\cdot\sin\frac{x}{8}\cdot\cos\frac{x}{8}\right)}{\sin\frac{x}{8}}$$

$$= \frac{4\cdot\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{4}\cdot\sin\frac{x}{4}}{\sin\frac{x}{8}} = \frac{2\cdot\cos\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{8}}$$

$$= \frac{\sin x}{\sin\frac{x}{8}}.$$

4. (Mate-Info 2018) Dacă $\sin\alpha + \sin\beta = x$ şi $\cos\alpha + \cos\beta = y$ atunci aflaţi $\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$, $\cos(\alpha-\beta)$ şi $\cos(\alpha+\beta)$ în funcţie de x şi y.

$$\begin{cases} x^2 = (\sin\alpha)^2 + (\sin\beta)^2 + 2\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta \\ y^2 = (\cos\alpha)^2 + (\cos\beta)^2 + 2\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 2 + 2\cdot\cos(\alpha-\beta) \qquad (1) \\ y^2 - x^2 = (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + (\cos^2\beta - \sin^2\beta) + 2\cdot\cos(\alpha+\beta). \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow y^2 - x^2 = \cos 2\alpha + \cos 2\beta + 2\cdot\cos(\alpha+\beta)$$

$$= 2\cdot\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta) + 2\cdot\cos(\alpha+\beta) \quad (2)$$

Din (1), avem $\cos(\alpha-\beta) = \frac{x^2+y^2}{2} - 1$;

$$\cos(\alpha-\beta) = 2\cos^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) - 1 \Rightarrow$$

$$2\cos^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \frac{x^2+y^2}{2} \Rightarrow \cos^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \frac{x^2+y^2}{4}$$

$$\Rightarrow \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \in \left\{-\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}, \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}\right\}.$$

Din (2), avem:

$$y^2 - x^2 = \cos(\alpha+\beta)\cdot\left[x^2+y^2-2+2\right]$$

$$\Rightarrow \cos(\alpha+\beta) = \frac{y^2-x^2}{x^2+y^2}.$$

$-1 \leq \sin 2x \leq 1$.

5. (Mate-Info 2018) Rezolvaţi ecuaţia $4^{\sin 2x} + 4^{3-\sin 2x} = 65$, unde $x \in \mathbb{R}$.

Notăm $4^{\sin 2x} = t$; Obs. că $t \in \left[\frac{1}{4}, 4\right]$. (*)

Ecuaţia se rescrie:

$$t + \frac{64}{t} = 65 \Leftrightarrow t^2 - 65t + 64 = 0$$

$\Leftrightarrow (t-1)\cdot(t-64) = 0$

Din (*) avem $t = 1$, deci $4^{\sin 2x} = 1$.

Cum $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 4^x$ este injectivă şi $4^0 = 1$, deducem $\sin(2x) = 0$.

Aşadar $2x \in \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, aşadar $x \in \left\{k \cdot \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

$\boxtimes$

6. Să se calculeze $\cos 36°$.

Fie $a := 36°$. $5a = 180°$.

$\sin(108°) = \underline{\sin 3a} = \sin(180° - 108°) = \sin(72°) = \underline{\sin(2a)}$

$\sin(2a) = 2 \cdot \sin a \cdot \cos a$.

$\sin(3a) = 3 \cdot \sin a - 4 \cdot \sin^3 a$

$2 \cdot \sin a \cdot \cos a = 3 \cdot \sin a - 4 \cdot \sin^3 a \quad \Big| : \sin a$

$2 \cdot \cos a = 3 - 4 \cdot \sin^2 a \Rightarrow$

$4 \cdot \cos^2 a - 2 \cdot \cos a - 1 = 0$

$\cos a \in \left\{ \frac{1-\sqrt{5}}{4}, \frac{1+\sqrt{5}}{4} \right\}$. Deci $\cos a = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$,

deoarece $\cos a > 0$.

7. Să se arate că $\sin 1° + \cos 1° \notin \mathbb{Q}$.

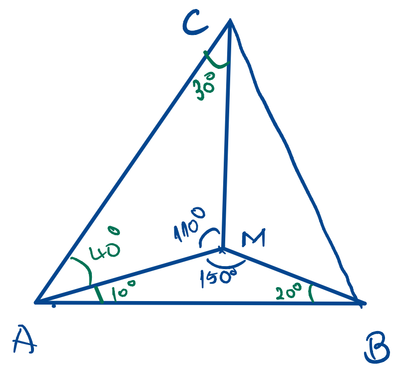
Soluţie. Fie $x = \sin 1° + \cos 1°$ şi presupunem prin reducere la absurd că $x \in \mathbb{Q}$. Prin calcule, avem:

$$\begin{aligned} & x^2 = 1 + \sin 2°, \text{ deci } \sin 2° \in \mathbb{Q}, \\ & \cos 4° = 1 - 2\sin^2 2°, \text{ deci } \cos 4° \in \mathbb{Q}, \\ & \cos 12° = \cos 3 \cdot 4° = 4\cos^3 4° - 3\cos 4° \in \mathbb{Q}, \\ & \cos 36° = 4\cos^3 12° - 3\cos 12° \in \mathbb{Q}. \end{aligned}$$

Dar am văzut în problema precedentă că $\cos 36° = \frac{1+\sqrt{5}}{4} \notin \mathbb{Q}$. Aşadar $x \notin \mathbb{Q}$.

(USAMO)

8. Fie ABC un triunghi şi M un punct în interiorul său astfel încât $\angle MAB = 10°$, $\angle MBA = 20°$, $\angle MAC = 40°$ şi $\angle MCA = 30°$. Demonstraţi că triunghiul ABC este isoscel.



$\sphericalangle AMB = 150°$
$\sphericalangle AMC = 110°$.
$\sphericalangle CMB = 100°$

Fără a restrânge generalitatea, pres. că $AB = 1$.

Din T. sinusului în ΔAMB și ΔAMC

$$AM = AB \cdot \frac{\sin 20°}{\sin 150°} = 2 \cdot \sin 20°.$$

$$AC = AM \cdot \frac{\sin 110°}{\sin 30°} = 2 \cdot \sin 40°$$

Din T. cosinusului în ΔABC obținem:

$$BC^2 = 1^2 + (2\sin 40°)^2 - 2 \cdot 1 \cdot 2\sin 40° \cdot \underbrace{\cos 50°}_{\cos \sphericalangle BAC} = \sin 40°$$

$$= 1^2 + 4\sin^2 40 - 4 \cdot \sin^2 40$$

$$= 1.$$

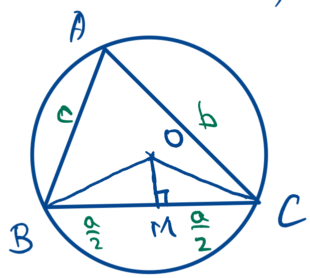
Deci $AB = BC$ și ΔABC este isoscel.

Teorema sinusului. Fie ABC un triunghi oarecare, în care notăm cu a, b, c lungimile laturilor BC, CA şi respectiv AB. Au loc următoarele egalităţi

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R,$$

unde R este raza cercului circumscris tringhiului ABC.

Dem: Presupunem că ΔABC este ascuțitunghic (în caz contrar, demonstrația se face în mod analog.)



$$\sphericalangle BOC = 2\cdot\sphericalangle A$$

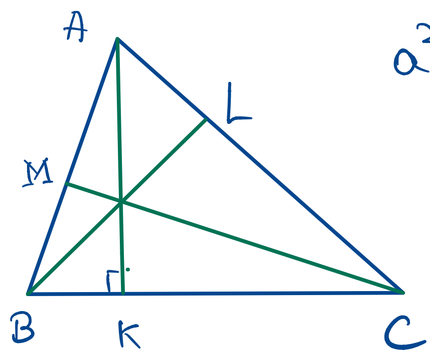
Deci, $\sphericalangle BOM = \sphericalangle A$. Din ΔBOM

$$\sin\sphericalangle A = \frac{BM}{OB} = \frac{\frac{a}{2}}{R}.$$

Rearanjând, $\boxed{\frac{a}{\sin\sphericalangle A} = 2R}$.

Teorema Cosinusului. Fie ABC un triunghi oarecare, în care notăm cu a, b, c lungimile laturilor BC, CA şi respectiv AB. Atunci are loc egalitatea

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\angle A.$$



$$\begin{aligned}
a^2 &= a\cdot(BK+KC)\\
&= a\cdot(c\cdot\cos\measuredangle B + b\cdot\cos\measuredangle C)\\
&= c\cdot(a\cdot\cos\measuredangle B) + b\cdot(a\cdot\cos\measuredangle C)\\
&= c\cdot BM + b\cdot CL\\
&= c\cdot(c-AM) + b\cdot(b-AL)\\
&= c\cdot(c-b\cdot\cos\measuredangle A) + b(b-c\cdot\cos\measuredangle A)\\
&= b^2+c^2-2bc\cdot\cos\measuredangle A.
\end{aligned}$$

În figură am presupus că ΔABC este ascuțitunghic, însă cazurile complementare se demonstrează în mod analog.