Structuri algebrice

(Operații. Grupuri. Morfisme)

Def O operație (lege de compoziție internă) pe o mulțime M este o funcție

$* : M \times M \to M$ arbitrară

$*(x, y) \overset{not}{=} x * y$

Exemplu $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$+(1, 4) = 1 + 4 = 5$

Def Un grup este o mulțime G înzestrată cu o operație $*$, care satisface urm condiții

1) Asociativitate

$\forall x,y,z \in G: (x*y)*z = $
$= x*(y*z)$

2) $\exists$ elem. neutru

$e \in G$: $\forall x \in G$

$x*e = e*x = x$

3) toate elem din G sunt simetrizabile

$\forall x \in G, \exists x' \in G$ a.î. — simetricul lui x

$x*x' = x'*x = e$

Dacă $*$ este comutativă

$(\forall x,y \in G : x*y = y*x)$

at. sp. că G este un grup comutativ (grup abelian)

① Pe mulțimea $G = (0, +\infty)$ se dă op. $x * y = \frac{|x-y|}{x+y}$

Care dintre urm. afirm sunt adev

A) op $*$ este comutativă

~~B)~~ $1*(2*3) = (1*2)*3$

C) $x * y < 1$, $\forall x, y \in G$

~~D)~~ op $*$ adm. el neutru.

B) $1*(2*3) = 1 * \frac{|2-3|}{2+3}$

$= 1 * \frac{|-1|}{5} = 1 * \frac{1}{5}$

$= \frac{\left|1 - \frac{1}{5}\right|}{1 + \frac{1}{5}} = \frac{\left|\frac{4}{5}\right|}{\frac{6}{5}} = \frac{\cancel{\frac{4}{5}}}{\cancel{\frac{6}{5}}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

$$(1 * 2) * 3 = \frac{|1-2|}{1+2} * 3$$

$$= \frac{|-1|}{3} * 3 = \frac{1}{3} * 3 =$$

$$= \frac{\left|\frac{1}{3} - 3\right|}{\frac{1}{3} + 3} = \frac{\frac{8}{3}}{\frac{10}{3}} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow 1 * (2 * 3) \neq (1 * 2) * 3$$

$\boxed{A}$ $x * y = y * x, \ \forall x, y \in G$ ~~?~~

$$x * y = \frac{|x-y|}{x+y}$$

$$y * x = \frac{|y-x|}{y+x} = \frac{|x-y|}{x+y}$$

$\boxed{C}$ $\forall x, y \in G$, $\boxed{x * y < 1}$?

$$\Leftrightarrow \frac{|x-y|}{x+y} < 1 \Leftrightarrow |x-y| < x+y$$

$x+y>0$

I) Dc $x \geq y \Rightarrow |x-y| = x-y$

$x-y \overset{?}{<} x+y \mid -x \Leftrightarrow -y < y \mid +y$

$\Leftrightarrow 0 < 2y \mid :2 \Leftrightarrow 0 < y$ adev

II) Dc $x < y \Rightarrow |x-y| = y-x$

$y-x \overset{?}{<} x+y \mid +x \Leftrightarrow y < 2x+y$

$\Leftrightarrow 0 < 2x \mid :2 \Leftrightarrow 0 < x$ adev.

D) op adm el neutru.

$\exists e \in (0,+\infty)$ ai $x * e = x$
$\forall x \in G$.

$\Leftrightarrow \dfrac{|x-e|}{x+e} = x, \forall x \in G = (0,\infty)$

Luăm $x=1$ $\dfrac{|1-e|}{1+e} = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |1-e| = 1(1+e) \Leftrightarrow$

$|1-e| = 1+e$

I) Dc $1 \geq e \Rightarrow 1-e = 1+e \Rightarrow$

$-e = e \Rightarrow 0 = 2e \Rightarrow e = 0$ fals

II) Dc $1 < e \Rightarrow e-1 = 1+e \mid -e \Rightarrow$

$-1 = 1$ fals

Def Un morfism de grupuri este o funcție $f : (G, *) \rightarrow (H, \circ)$

grupuri

dacă

$f(x * y) = f(x) \circ f(y)$

op din G   op din H

$\forall x, y \in G$

Dacă în plus f este o fct bijectivă atunci spunem că f este un izomorfism

---

(2) Fie p un nr prim și

$G_p = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ pb & a \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Q}) \;\middle|\; a^2 - p \cdot b^2 \neq 0 \right\}$

a) Dem că G_p este un grup în raport cu op de înmulțire a matricilor.

b) Det un morfism de la $(G_p, \cdot)$ la $(\mathbb{R}^*, \cdot)$

---

a) 1) Dem că înmulțirea matricilor este o lege de comp. internă pe G_p.

Fie $A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ pb_1 & a_1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ pb_2 & a_2 \end{pmatrix} \in G_p$

Vrem să dem că $A_1 \cdot A_2 \in G_p$.

$$A_1 A_2 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ pb_1 & a_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ pb_2 & a_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1a_2 + b_1pb_2 & a_1b_2 + b_1a_2 \\ pb_1a_2 + a_1pb_2 & pb_1b_2 + a_1a_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1a_2 + pb_1b_2 & a_1b_2 + b_1a_2 \\ p(a_1b_2 + b_1a_2) & a_1a_2 + pb_1b_2 \end{pmatrix} \overset{not}{=} P$$

$$\det P = \det A_1 A_2 = \det A_1 \det A_2$$

$$A_1, A_2 \in G_p \Rightarrow \begin{cases} \det A_1 \neq 0 \\ \det A_2 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$\det P \neq 0 \Longrightarrow A_1 \cdot A_2 \in G_p$.

2) Înmulțirea matricilor este asociativă pe $M_2(\mathbb{Q}) \Longrightarrow$ este asociativă pe $G_p \subseteq M_2(\mathbb{Q})$.

3) $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ este el. neutru pt op. de înmulțire din $M_2(\mathbb{Q})$

$I_2 \overset{?}{\in} G_p$.

$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p \cdot \underline{0} & \underline{1} \end{pmatrix}$

$\det I_2 = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1 \neq 0$ $\Bigg| \Rightarrow$ $I_2 \in G_p$

Prin urmare I_2 este el. neutru în G_p.

4) Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ pb & a \end{pmatrix} \in G_p$.

Vrem să dem că $\underline{\exists A^{-1}}$, a.î. $\underbrace{A^{-1} \in G_p}_{?}$.

$\det A = a^2 - pb^2 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1} \in M_2(\mathbb{Q})$

$A \in G_p$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} a & -b \\ -pb & a \end{pmatrix} = \frac{1}{a^2-pb^2}\begin{pmatrix} a & -b \\ -pb & a \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{a}{a^2-pb^2} & \frac{-b}{a^2-pb^2} \\ p\frac{-b}{a^2-pb^2} & \frac{a}{a^2-pb^2} \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} \in G_p$$

Clar $\det A^{-1} \neq 0$

Prin urmare $(G_p, \cdot)$ este un grup.

<u>Def</u> Fie $(G, *)$ un grup și $H \subseteq G$, $H \neq \emptyset$.

Atunci spunem că H este un subgrup în G $(H \leq G)$

dacă

$\rightarrow \forall\, x, y \in H,\ x * y \in H$

$\rightarrow \forall\, x \in H,\ x^{-1} \in H$.

Obs $(M_2(\mathbb{Q}), \cdot)$ NU este un grup.

deoarece nu orice matrice este inv.

ex. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Q})$

$\det A = 1 \cdot 0 - 0 \cdot 0 = 0 \Rightarrow \nexists\, A^{-1}$.

Obs 2) $(M_2(\mathbb{Q}), \cdot)$ este un monoid

(asoc + adm. elem. neutru)

Obs 3 $GL_2(\mathbb{Q}) = \{A \in M_2(\mathbb{Q}) \mid \det A \neq 0\}$

↳ grupul general liniar

Putem arăta că $G_p \leq GL_2(\mathbb{Q})$

---

b) $f : (G_p, \cdot) \to (\mathbb{R}^*, \cdot)$.

$f(A) = \det A \quad \forall A \in G_p$.

$A \in G_n \Rightarrow \det A \neq 0 \Rightarrow f(A) \neq 0$

$\Rightarrow f$ este bine-definită.

Fie $A, B \in G_n$

$f(A \cdot B) = \det(AB) = \det A \cdot \det B$

$= f(A) \, f(B) \Rightarrow f$ morfism de grupuri