25 noiembrie 2023 Lect. dr. Anca GRAD

Limite de funţii

Breviar teoretic

Context:

- $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$
- $f : A \to \mathbb{R}$
- $a \in A'$.

Definiţie: Funcţia f are limită în punctul a dacă

$$\forall (a_n) \subseteq A\backslash\{a\} \quad a.i. \quad \lim_{n\to\infty} a_n = a, \quad \exists \lim_{n\to\infty} f(a_n).$$

Teoremă de unicitate Funcţia f are limită în punctul a dacă şi numai dacă

$$\exists l \in \overline{\mathbb{R}} \quad a.i. \quad \forall (a_n) \subseteq A\backslash\{a\} \quad a.i. \quad \lim_{n\to\infty} a_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} f(a_n) = l$$

Teoremă de caracterizare cu vecinătăţi:

$$l = \lim_{x\to a} f(x) \Longleftrightarrow \forall V \in \mathcal{V}(l), \quad \exists U \in \mathcal{V}(a) \quad a.i. \quad \forall x \in U \cap A\backslash\{a\} \quad f(x) \in V.$$

Teoremă de caracterizare ε şi δ:

$$l = \lim_{x\to a} f(x) \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 \quad a.i. \quad \forall x \in A\backslash\{a\},$$

- dacă $a \in \mathbb{R}, l \in \mathbb{R}$
$$\text{cu } |x-a| < \delta \text{ are loc } |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$
- dacă $a \in \mathbb{R}, l = \infty$
$$\text{cu } |x-a| < \delta \text{ are loc } f(x) > \varepsilon.$$
- dacă $a \in \mathbb{R}, l = -\infty$
$$\text{cu } |x-a| < \delta \text{ are loc } f(x) < -\varepsilon.$$
- dacă $a = \infty, l \in \mathbb{R}$
$$\text{cu } x > \delta \text{ are loc } |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$
- dacă $a = \infty, l = \infty$
$$\text{cu } x > \delta \text{ are loc } f(x) > \varepsilon.$$

.... alte 4 cazuri

Obervaţie: Pentru a demonstra că nu există limita unei funţii într-un punct putem evidenţia două şiruri $(a_n), (b_n) \subseteq \mathbb{R}$ astfel încât

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n \text{ dar pentru care } \lim_{n\to\infty} a_n \neq \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Definiţie: Funcţia f are limită laterală la stânga în punctul a dacă

$$\forall (a_n) \subseteq \mathbb{A}\backslash\{a\} \quad \text{cu } a_n < a, \quad a.i. \quad \lim_{n\to\infty} a_n = a, \quad \exists \lim_{n\to\infty} f(a_n).$$

Definiţie: Funcţia f are limită laterală la dreapta în punctul a dacă

$$\forall (a_n) \subseteq \mathbb{A}\backslash\{a\} \quad \text{cu } a_n > a, \quad a.i. \quad \lim_{n\to\infty} a_n = a, \quad \exists \lim_{n\to\infty} f(a_n).$$

Obervaţie: Uneori, doar una dintre cele două limite laterale este bine definită, caz în care limita funcţiei în acel punct se confundă cu ea.
Obervaţie: Dacă ambele limite laterale sunt definite, atunci limita există dacă şi numai dacă amândouă sunt egale. Mai mult, dacă ambele limite laterale sunt bine definite şi distincte, funţia nu are limită în punctul respectiv.
Observaţie: Pentru cazurile de nederminare

$$\frac{0}{0} \quad sau \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$$

de cele mai multe ori, este mai facil să se utilizeze teorema lui L'Hoptial, dar in porgrama de liceu, ea poate fi predata doar dupa derivabilitate, astfel încât in exerciţiile care urmează, am încercat evitarea utilizării ei.

Reamintim următoarele:

$$\lim_{x\to\infty} q^x = \begin{cases} +\infty & : q > 1 \\ 1 & : q = 1 \\ 0 : & |q| < 1 \\ \nexists & : q \leq 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to x_0} q^x = q^{x_0}, \forall q \in (0,\infty) \quad si \quad x_0 \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x\to x_0} \log_a x = \log_a x_0, \forall a \in (0,\infty) \setminus \{1\}, x_0 > 0.$$

$$\lim_{x\to\infty} \log_a x = \begin{cases} +\infty & : a > 1 \\ -\infty & : 0 < a < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{q^x - 1}{x} = \ln q, \forall q > 0 \quad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{tgx}{x} = 1.$$

Exerciţii cu un grad scăzut de dificultatate:

Stabiliţi limitele următoarelor funcţii reale în punctele specificate:

$$a) \lim_{x\to\infty} x\cos^2\frac{x+2}{x} \quad b) \lim_{x\to 1} \frac{x}{x^2+1} \quad c) \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2+5}{x^3} \quad d) \lim_{x\to\infty} \frac{(x+2)(2x+1)}{x^2+3x+5}$$

$$e) \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^3-1} \quad f) \lim_{x\to 2} \left(\frac{1}{2-x} - \frac{2x}{4-x^2}\right)$$

$$g)\ \lim_{x\to 1}\frac{1+x+x^2+...+x^n-(n+1)}{x-1}, n\in\mathbb{N} \quad h)\ \lim_{x\to 1}\frac{x+x^2+...+x^n-n}{x+x^2+...+x^m-m}, \forall m,n\in\mathbb{N}.$$

$$i)\ \lim_{x\to 27}\frac{x-27}{\sqrt[3]{x}-3} \quad j)\ \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$$

Problema 1. Fie

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{ax^3+x^2+bx+c}-(bx+c)\right)\ \forall a,b,c>0$$

Care din următoarele afirmaţii este adevărată?

$\boxed{\text{A}}$ $l=0$ dacă $a=b^3$ şi $1-3b^2c=0$.

$\boxed{\text{B}}$ $l=\infty$ dacă $b<a^3$.

$\boxed{\text{C}}$ $\nexists l$ dacă a şi b sunt <1.

$\boxed{\text{D}}$ $l=1$ pentru $\forall a,b>1$.

Exerciţii cu un grad intermediar de dificultatate, care utilizează limite remarcabile:
Stabiliţi limitele următoarelor funcţii reale în punctele specificate:

$$a)\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{5x+1}{2x+4}} \quad b)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{3\sin x-\tan x}{x}\right)^{\frac{\sin x+2x}{x}}$$

$$c)\ \lim_{x\to 0}(1+\cos x)^{\frac{1}{x^2}} \quad d)\ \lim_{x\to 0}(e^x-x+1)^{\frac{1}{1-\cos x}}$$

$$e)\ \lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}} \quad f)\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+7}{x}\right)^{x}$$

Problema 2. Fie

$$\lim_{n\to\infty}\left[\lim_{x\to 0}\left(1+\sin^2 x+\sin^2 2x+...+\sin^2 nx\right)^{\frac{1}{n^3x^2}}\right].$$

Care din următoarele afirmaţii este adevărată?

$\boxed{\text{A}}$ limita nu există.

$\boxed{\text{B}}$ limita este 0.

$\boxed{\text{C}}$ limita este $e^{\frac{1}{3}}$.

$\boxed{\text{D}}$ limita este ∞.

Problema 3. Fie

$$\lim_{n\to\infty}\left[\lim_{x\to 0}\left(1+\ln(1+x)+\ln(1+2x)+...+\ln(1+nx)\right)^{\frac{1}{n^2x}}\right].$$

Care din următoarele afirmaţii este adevărată?

$\boxed{\text{A}}$ limita este infintiă.

$\boxed{\text{B}}$ limita este $\sqrt{3}$.

$\boxed{\text{C}}$ limita este $e^{\frac{1}{3}}$.

$\boxed{\text{D}}$ limita este finită.

Problema 4.

Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & x \in \mathbb{Q} \\ \cos x & x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases}$$

Care din următoarele afirmaţii este adevărată?

$\boxed{\text{A}}$ Există o infinitate de puncte $a \in \mathbb{R}$ în care funţia f nu limită

$\boxed{\text{B}}$ Funţia f are limită finită într-un ininit de elemente din $\mathbb{R}$.

$\boxed{\text{C}}$ Dacă $a \in \mathbb{R}$ este astfel încât există $\lim\limits_{x\to a} f(x) \in \mathbb{R}$, atunci $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.

$\boxed{\text{D}}$ Dacă $a \in \mathbb{R}$ este astfel încât există $\lim\limits_{x\to a} f(x) \in \mathbb{R}$, atunci $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Problema 5. Stabiliţi care dintre următoarele limite este finită.

$\boxed{\text{A}}$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x} \sin x$.

$\boxed{\text{B}}$ $\lim\limits_{x\to 0} x \sin x$.

$\boxed{\text{C}}$ $\lim\limits_{x\to 0} x \sin \dfrac{1}{x}$.

$\boxed{\text{D}}$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x} \sin \dfrac{1}{x}$.

Exercițiul 1: Stabiliți limitele următoarelor funcții reale în punctele specificate:

$$a)\ \lim_{x\to\infty} x\cos^2\frac{x+2}{x} \quad b)\ \lim_{x\to 1}\frac{x}{x^2+1} \quad c)\ \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+5}{x^3} \quad d)\ \lim_{x\to\infty}\frac{(x+2)(2x+1)}{x^2+3x+5} = 2$$

$= \infty \cdot \cos^2 1 = \infty$ $\quad = \frac{1}{2}$ $\quad \frac{1}{-\infty} = 0$

$$e)\ \lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^3-1} \quad f)\ \lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{2-x}-\frac{2x}{4-x^2}\right)$$

$= \frac{2}{3}$

$\infty - \infty$ $= \lim_{x\to 2}\frac{2+x-2x}{4-x^2} = \lim_{x\to 2}\frac{\cancel{2-x}}{(\cancel{2-x})(2+x)} = \frac{1}{4}$

$$g)\ \lim_{x\to 1}\frac{1+x+x^2+...+x^n-(n+1)}{x-1}, n\in\mathbb{N} \quad h)\ \lim_{x\to 1}\frac{x+x^2+...+x^n-n}{x+x^2+...+x^m-m}, \forall m,n\in\mathbb{N}.$$

$= \frac{n(n+1)}{2}$ $\quad = \frac{n(n+1)}{m(m+1)}$

$$i)\ \lim_{x\to 27}\frac{x-27}{\sqrt[3]{x}-3} \quad j)\ \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$$

$$k)\ \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{ax^3+x^2+bx+c}-(bx+c)\right)\ \forall a,b,c>0.$$

$$\bullet\ \lim_{x\to 1}\frac{(\cancel{x-1})(x+1)}{(\cancel{x-1})(x^2+x+1)} = \lim_{x\to 1}\frac{x+1}{x^2+x+1} = \frac{2}{3}$$

$x \to 1 \Leftrightarrow \boxed{x-1} \to 0$

$$g)\ \lim_{x\to 1}\frac{1+x+x^2+...+x^n-(n+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\cancel{1-1}+x-1+x^2-1+...+x^n-1}{x-1} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)+(x-1)(x+1)+...+(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+...+x+1)}{x-1} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{(\cancel{x-1})}{(\cancel{x-1})}\cdot\left[1+(x+1)+...+(x^{n-1}+x^{n-2}+...+x+1)\right] =$$

$$= 1+2+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$k)\ \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{ax^3+x^2+bx+c}-(bx+c)\right)\ \forall a,b,c>0.$$

$\infty \quad \infty$

a) $l = 0$ dacă $a = b^3$ și $1-3b^2c=0$

b) $l = \infty$ dacă $b < a^3$

c) $\nexists\, l$ dacă $a, b < 1$

d) $l = 1$ $\forall a, b > 1$

$$\lim_{x\to\infty} x\cdot\left(\sqrt[3]{a+\underbrace{\frac{1}{x}+\frac{b}{x^2}+\frac{c}{x}}_{\downarrow 0}}-b-\underbrace{\frac{c}{x}}_{\downarrow 0}\right) = \infty\cdot\left(\sqrt[3]{a}-b\right) = \begin{cases}\infty & : \sqrt[3]{a}>b\\ \infty\cdot 0 & \sqrt[3]{a}=b\\ -\infty & : \sqrt[3]{a}<b\end{cases}$$

$$\left(\sqrt[3]{u}-\sqrt[3]{v}\right)\left(\sqrt[3]{u^2}+\sqrt[3]{uv}+\sqrt[3]{v^2}\right)=\sqrt[3]{u^3}-\sqrt[3]{v^3}$$
$$u - v$$

$$u = ax^3 + x^2 + bx + c$$

$\infty \cdot 0$

$$v = (bx+c)^3$$

$$l = \lim_{x\to\infty} \frac{b^3x^3 + x^2 + bx + c - (bx+c)^3}{\sqrt[3]{(b^3x^3+x^2+bx+c)^2} + \sqrt[3]{(b^3x^3+x^2+bx+c)(bx+c)^3} + \sqrt[3]{(bx+c)^{2\cdot 3}}}$$

$\sqrt[3]{a} = b$

$a = b^3$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+bx+c-3b^2x^2c-3bxc^2-c^3}{x^2\underbrace{\left[\sqrt[3]{b^6+\ldots}+\sqrt[3]{b^6+\ldots}+\sqrt[3]{b^6+\ldots}\right]}_{3\cdot b^2}}$$

$$= \frac{1}{3b^2}\lim_{x\to\infty}\frac{x^2(1-3b^2c)+x(b-3bc^2)+c-c^3}{x^2}$$

$$= \frac{1}{3b^2}\begin{cases} 1-3b^2c & : 1-3b^2c \neq 0 \\ 0 & : 1-3b^2c = 0 \end{cases} = \frac{1-3b^2c}{3b^2}, \quad a=b^3$$

Concluzie:
$$l = \begin{cases} \infty & : a > b^3 \\ \dfrac{1-3b^2c}{3b^2} & : a = b^3 \\ -\infty & : a < b^3 \end{cases}$$

$c^\infty \quad \frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$ + polinomiale

Exercițiul 2: Stabiliți limitele următoarelor funcții reale în punctele specificate:

$$0 = 0^{\frac{5}{2}} = a)\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{5x+1}{2x+4}} \qquad b)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{3\sin x-\tan x}{x}\right)^{\frac{\sin x+2x}{x}} = (3-1)^{1+2} = 2^3 = 8$$

$$\infty = 2^{\frac{1}{+0}} = 2^{\infty} = c)\ \lim_{x\to 0}(1+\cos x)^{\frac{1}{x^2}} \qquad d)\ \lim_{x\to 0}(e^x-x+1)^{\frac{1}{1-\cos x}} = \underbrace{(1-0+1)^{\frac{1}{+0}}}_{} = 2^{\infty}$$

$$e = e)\ \lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}} \qquad f)\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+7}{x}\right)^x = e^7$$

$\cos x \leq 1 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow 1-\cos x \geq 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0} 1-\cos x = 0_+$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{1}{1-\cos x} = \infty$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$$

$$e)\ \lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\left[\underbrace{(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}}_{\downarrow\, e}\right]^{\frac{\sin x}{x}} =$$

$$= e^{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}} = e^1 = e$$

$$a)\ \lim_{n\to\infty}\left[\lim_{x\to 0}(1+\sin^2 x+\sin^2 2x+\ldots+\sin^2 nx)^{\frac{1}{n^3x^2}}\right]$$

Fie $n\in\mathbb{N}$ arbitrar ales, $n\geq 1$

$$\lim_{x\to 0}(1+\underset{\downarrow 0}{\sin^2 x}+\underset{\downarrow 0}{\sin^2 2x}+\ldots+\underset{\downarrow 0}{\sin^2 nx})^{\frac{1}{n^3x^2}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 kx}{\cancel{x^2}} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(kx)}{kx}\right)^2\cdot k^2 = k^2\cdot 1 \quad \forall k\in\mathbb{N},\ k\geq 1$$

$$1^{\infty} = \lim_{x\to 0}\left[(1+\sin^2 x+\ldots+\sin^2 nx)^{\frac{1}{\sin^2 x+\ldots+\sin^2 nx}}\right]^{\frac{\sin^2 x+\ldots+\sin^2 nx}{n^3x^2}} =$$

$$= e^{\frac{1}{n^3}\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin^2 x}{x^2}+\frac{\sin^2 2x}{x^2}+\ldots+\frac{\sin^2 nx}{x^2}\right]} = e^{\frac{1}{n^3}\cdot(1+2^2+\ldots+n^2)}$$

$$= e^{\frac{1}{n^{\cancel{3}2}}\cdot\frac{\cancel{n}(n+1)(2n+1)}{6n^2}} = e^{\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}}$$

$$\lim_{n\to\infty} e^{\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}} = e^{\frac{1}{3}}$$

$$a)\ \lim_{n\to\infty}\left[\lim_{x\to 0}(1+\ln(1+x)+\ln(1+2x)+\ldots+\ln(1+nx))^{\frac{1}{n^2x}}\right]$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+kx)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+kx)}{kx}\cdot k = k$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+kx)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+kx)}{kx}\cdot k=k$$

n fixat $\therefore$ $e^{\frac{1}{n^2}\cdot(1+\dots+n)}=e^{\frac{n(n+1)}{2n^2}}=e^{\frac{n+1}{2n}}$ $\quad \lim_{n\to\infty}e^{\frac{n+1}{2n}}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$

a) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{3x}$; b) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-\cos x}{3x}$. $\overset{L'H}{=}\frac{e^x+\sin x}{3}=\frac{1}{3}$

$\overset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot e^{2x}}{3}=\frac{2}{3}$

$\boxed{\text{Ex:}}$ Fie $f:A\to\mathbb{R}$ $\quad f(x)=\begin{cases}\sin x & : x\in\mathbb{Q}\\ \cos x & : x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$

b) det. mulțimea punctelor pt. care f are limită finită

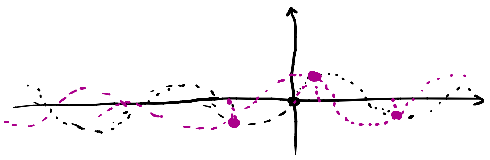
a) det. mulțimea punctelor pt. care $\lim_{x\to a}f(x)$ este bine definită

c) $\exists$? limite laterale

Rezolvare: $A=\mathbb{R}$ $\to$ domeniul lui f

a) $A'=\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}=\overline{\mathbb{R}}$ $\Rightarrow$ $\forall a\in\overline{\mathbb{R}}$ $\lim_{x\to a}f(x)$ este definită

b)



Densitatea lui $\mathbb{Q}$ și $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$

$\forall x<y\in\mathbb{R}$

$\exists q\in\mathbb{Q}$ și $\exists s\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ a.î. $x<q<y$ și $x<s<y$

$f(x)=\begin{cases}\sin x : x\in\mathbb{Q}\\ \cos x : x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$ (Funcții Dirichlet)

$\to$ Nu putem aborda pb. cu ajutorul limitelor laterale

$\mathcal{C}=\{x\in\mathbb{R} : \sin x=\cos x\}$ $\to$ m. de continuitate

$\mathbb{R}\setminus\mathcal{C}$ $\to$ m. de discontinuitate $\to$ d. de caract cu ε și δ

$\Rightarrow$ m. pe care $\nexists$ lim

• Fie $t\in\mathbb{R}\setminus\mathcal{C}$ arb. ales. Dem. că $\nexists\lim_{x\to t}f(x)$.

Evidențiem $(a_n)\subseteq\mathbb{Q}$ a.î. $\lim_{n\to\infty}a_n=t$ $\Rightarrow\lim_{n\to\infty}f(a_n)=\lim_{n\to\infty}\sin a_n=\sin t$

$(b_n)\subseteq\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ a.î. $\lim_{n\to\infty}b_n=t$ $\Rightarrow\lim_{n\to\infty}f(b_n)=\lim_{n\to\infty}\cos b_n=\cos t$

$\sin t\neq\cos t$ $\Rightarrow\lim_{n\to\infty}f(a_n)\neq\lim_{n\to\infty}f(b_n)\overset{def}{\Rightarrow}\nexists\lim_{x\to t}f(t)$

Ex: Determinați:

$\lim_{x\to 0} x \sin x = 0\cdot 0 = 0$

$\lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0 \cdot \text{mărg.} = 0$ $\quad \left|x\sin\frac{1}{x}\right| \le |x| \cdots < \varepsilon$ ✓

$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\sin x = 1$ (L'Hopital)

$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x} \overset{?}{=} \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ \infty \\ \frac{1}{\infty} \\ \exists \\ \nexists \end{array} \right. \to \nexists$

$\infty \underbrace{\sin\frac{1}{x}}_{\pm}$ $\quad \to -\infty \;\; \ldots \;\; \to \infty$

Evidențiem 2 șiruri $\to 0$ $\quad a_n = \frac{1}{2n\pi} \to 0$

$b_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}} \to 0$

$$\left[\begin{array}{l} f(a_n) = 2n\pi \cdot \sin(2n\pi) = 2n\pi \cdot 0 = 0 \quad \forall n\in\mathbb{N} \\ \lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0 \end{array}\right.$$

$\neq \Rightarrow \nexists \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$

$f(b_n) = (2n\pi + \frac{\pi}{2})\sin(2n\pi + \frac{\pi}{2}) = (2n\pi + \frac{\pi}{2})\cdot 1 = 2n\pi + \frac{\pi}{2} \quad \forall n\in\mathbb{N}$

$\lim_{n\to\infty} f(b_n) = \lim_{n\to\infty}(2n\pi + \frac{\pi}{2}) = \infty$

Obs: Utilizare inegalităților $f, g : A \to \mathbb{R}$, $a \in A'$

- $\left.\begin{array}{l} 0 \le |f(x) - l| \le g(x) \\ \lim_{x\to a} g(x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) = l$ $\quad \to 0$

- $\left.\begin{array}{l} f(x) \le g(x) \\ \lim_{x\to a} g(x) = -\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) = -\infty$

- $\left.\begin{array}{l} f(x) \ge g(x) \\ \lim_{x\to a} f(x) = \infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) = \infty$

$$\lim_{x\to\infty} \left|\underbrace{\sin\sqrt{x+1}}_{\nexists} - \underbrace{\sin\sqrt{x}}_{\nexists}\right| =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left|2\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\cdot\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right| =$$

$$= \lim_{x\to\infty} 2\cdot\left|\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\right|\cdot\left|\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right| =$$

$$= \lim_{x\to\infty} 2\left|\underbrace{\sin\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}}_{\to 0}\right|\cdot\underbrace{\left|\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right|}_{\text{mărg}} = 0$$