Geometrie Analitică

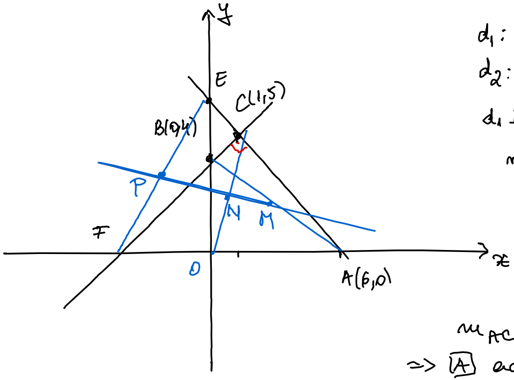
Dr.Veronica Oana Nechita

Universitatea Babeș-Bolyai Cluj-Napoca

27 ianuarie 2024

1. Într-un reper cartezian ortonormat se dau punctele $A(6,0)$, $B(0,4)$, $C(1,5)$. Dreapta AC intersectează axa Oy în punctul E, iar dreapta BC intersectează axa Ox în punctul F. Fie M, N și P mijloacele segmentelor AB, OC și respectiv EF. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

A	$AC \perp BC$;	B	$P(3,-2)$;
C	$MN : x + 5y - 13 = 0$;	D	M, N, P sunt coliniare.



$d_1 : y = m_1 x + n_1$ $\quad$ m_1 panta dreptei d_1

$d_2 : y = m_2 x + n_2$ $\quad$ m_2 panta dreptei d_2

$d_1 \perp d_2 \iff m_1 \cdot m_2 = -1$

$$m_{AC} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{y_A - y_C}{x_A - x_C}$$

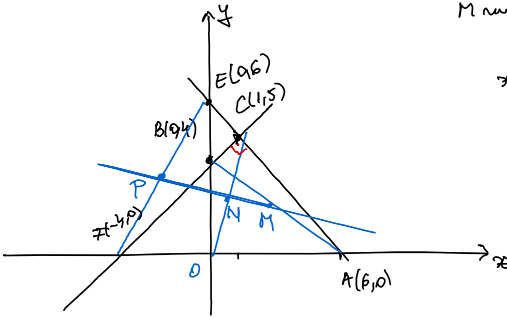
$$m_{AC} = \frac{5-0}{1-6} = \frac{5}{-5} = -1$$

$$m_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{5-4}{1-0} = \frac{1}{1} = 1$$

$m_{AC} \cdot m_{BC} = -1 \Rightarrow AC \perp BC$

$\Rightarrow$ $\boxed{A}$ adevărată

$\boxed{B}$ falsă



M mijlocul lui $[AB]$,

$M(x_M, y_M)$,

$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$, $y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$

$x_M = \frac{6+0}{2} = 3$, $y_M = \frac{0+4}{2} = 2$

$M(3,2)$

N mijlocul lui $[OC]$

$x_N = \frac{x_O + x_C}{2}$, $y_N = \frac{y_O + y_C}{2}$

$x_N = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$, $y_N = \frac{0+5}{2} = \frac{5}{2}$

$N\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$

$AC: y - y_A = m_{AC}(x - x_A) \Rightarrow AC: y - 0 = -1(x - 6) \Rightarrow$

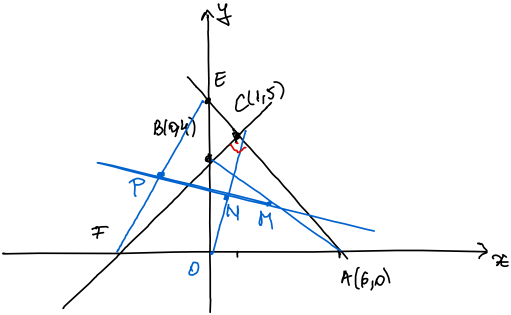
$\begin{cases} AC: y = -x + 6 \\ Oy: x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} y = 6 \\ x = 0 \end{matrix} \Rightarrow CA \cap Oy = \{E\}$, $E(0,6)$

$BC: \frac{y - y_B}{y_C - y_B} = \frac{x - x_B}{x_C - x_B} \Rightarrow BC: \frac{y-4}{5-4} = \frac{x-0}{1-0} \Rightarrow BC: y - 4 = x$

$\begin{cases} BC: y = x + 4 \\ Ox: y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x = -4 \\ y = 0 \end{matrix}$ $\quad BC \cap Ox = \{F\}$, $F(-4,0)$

P mijlocul lui $[EF] \Rightarrow x_P = \frac{x_E + x_F}{2} = -2$, $y_P = \frac{y_E + y_F}{2} = 3$

$$MN: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_M & y_M & 1 \\ x_N & y_N & 1 \end{vmatrix} = 0$$



$$MN: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{2} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$MN: 2x + \frac{15}{2} + \frac{y}{2} - 1 - \frac{5}{2}x - 3y = 0$$

$$MN: -\frac{1}{2}x - \frac{5}{2}y + \frac{13}{2} = 0 \Rightarrow$$

$$MN: x + 5y - 13 = 0$$

$\boxed{C}$ adevărată

M, N, P coliniare $\Leftrightarrow P \in MN \Leftrightarrow x_P + 5y_P - 13 = 0 \Leftrightarrow$

$P(-2,3)$ $\qquad -2 + 5 \cdot 3 - 13 = 0$

$13 - 13 = 0$

$\boxed{D}$ adevărată

Răspuns: $\boxed{A}, \boxed{C}, \boxed{D}$

M, N, P coliniare $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_M & y_M & 1 \\ x_N & y_N & 1 \\ x_P & y_P & 1 \end{vmatrix} = 0$

2. Se dă dreapta de ecuație $d : y = \frac{4}{3}x + 1$. Care dintre următoarele drepte d' este paralelă cu dreapta dată și se află la distanța 3 de aceasta?

A	$d' : 3y = 4x + 18$;	B	$d' : 3y = 4x + 12$;
C	$d' : 3y = 4x - 12$;	D	$d' : 3y = 4x - 18$.

$d_1 : y = m_1 x + n_1$

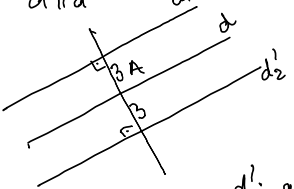
$d_2 : y = m_2 x + n_2$

$d_1 \parallel d_2 \Leftrightarrow m_1 = m_2$

$d : y = \frac{4}{3}x + 1 \Rightarrow m_d = \frac{4}{3}$

$d \parallel d'$

$\Rightarrow m_{d'} = m_d = \frac{4}{3}$



$d' : y = \frac{4}{3}x + n \quad | \cdot 3$

$d' : 3y = 4x + 3n \Rightarrow d' : 4x - 3y + 3n = 0$

$dist(d', d) = dist(A, d')$, unde $A \in d$

$d' : ax + by + c = 0$, $A(x_A, y_A)$

$$dist(A, d') = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$A \in d \Rightarrow x = 0,\ y = 1 \Rightarrow A(0, 1)$

$$\text{dist}(A,d') = \frac{|4x_A - 3y_A + 3m|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}} = \frac{|4\cdot 0 - 3\cdot 1 + 3\cdot m|}{\sqrt{16+9}} = \frac{|3m-3|}{\sqrt{25}} = \frac{3|m-1|}{5}$$

$$\text{dist}(A,d') = 3 \Rightarrow \frac{3|m-1|}{5} = 3 \Rightarrow |m-1| = 5 \left[\begin{array}{l} m-1=5 \Rightarrow m=6 \\ m-1=-5 \Rightarrow m=-4 \end{array}\right.$$

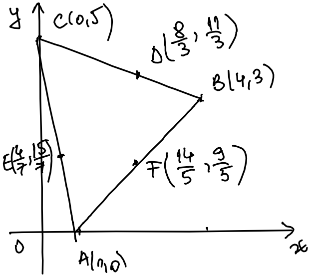
$$\begin{array}{l} d_1': 4x-3y+18=0 \\ d_2': 4x-3y-12=0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} d_1': 3y = 4x+18 \\ d_2': 3y = 4x-12 \end{array}$$

Răspuns: $\boxed{A}$, $\boxed{C}$

3. Se dă un tringhi ABC cu vârfurile în punctele de coordonate $A(1,0)$, $B(4,3)$, $C(0,5)$ și punctele D, E, F situate pe laturile triunghiului, astfel încât $2\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{DC}$, $3\overrightarrow{CE} = 4\overrightarrow{EA}$, $2\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{FB}$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

$\boxed{A}$ $AD : 11x - 5y - 11 = 0$; $\boxed{B}$ $BE : x + 4y + 8 = 0$;

$\boxed{C}$ $CF : 8x - 7y - 35 = 0$; $\boxed{D}$ AD, BE, CF sunt concurente.



$2\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{DC} \iff D \in [BC], \ \frac{BD}{DC} = \frac{1}{2}$

$\overrightarrow{BD}(x_D - x_B, y_D - y_B) \Rightarrow \overrightarrow{BD}(x_D - 4, y_D - 3)$

$\overrightarrow{DC}(x_C - x_D, y_C - y_D) \Rightarrow \overrightarrow{DC}(-x_D, 5 - y_D)$

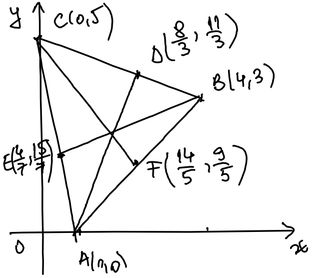
$\begin{cases} 2(x_D - 4) = -x_D \\ 2(y_D - 3) = 5 - y_D \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{ll} 2x_D + x_D = 8 & \Rightarrow x_D = \frac{8}{3} \\ 2y_D + y_D = 11 & \Rightarrow y_D = \frac{11}{3} \end{array}$

$\frac{CE}{EA} = k = \frac{4}{3} \Rightarrow E(x_E, y_E)$

$x_E = \frac{x_C + k x_A}{1 + k}, \ y_E = \frac{y_C + k y_A}{1 + k}$

$x_E = \frac{0 + \frac{4}{3}\cdot 1}{1 + \frac{4}{3}} = \frac{4}{3}\cdot\frac{3}{7} = \frac{4}{7}, \ y_E = \frac{5 + \frac{4}{3}\cdot 0}{1 + \frac{4}{3}} = \frac{5}{1}\cdot\frac{3}{7} = \frac{15}{7} \Rightarrow E\left(\frac{4}{7}, \frac{15}{7}\right)$

$\frac{AF}{FB} = \frac{3}{2} \Rightarrow x_F = \frac{x_A + \frac{3}{2}x_B}{1 + \frac{3}{2}} = \frac{1 + \frac{3}{2}\cdot 4}{1 + \frac{3}{2}} = \frac{7}{1}\cdot\frac{2}{5} = \frac{14}{5}, \ y_F = \frac{y_A + \frac{3}{2}y_B}{1 + \frac{3}{2}} = \frac{9}{2}\cdot\frac{2}{5} = \frac{9}{5}$



$$AD: \frac{x-x_A}{x_D-x_A} = \frac{y-y_A}{y_D-y_A}$$

$$AD: \frac{x-1}{\frac{8}{3}-1} = \frac{y-0}{\frac{11}{3}-0} \Rightarrow AD: \frac{x-1}{\frac{5}{3}} = \frac{y}{\frac{11}{3}} \quad \Big| \cdot \frac{1}{3}$$

$$AD: \frac{x-1}{5} = \frac{y}{11} \Rightarrow AD: 11(x-1) = 5y$$

$$AD: 11x - 5y - 11 = 0$$

$\boxed{A}$ adevărat

$$BE: \frac{x-x_B}{x_E-x_B} = \frac{y-y_B}{y_E-y_B}$$

$$BE: \frac{x-4}{\frac{4}{7}-4} = \frac{y-3}{\frac{15}{7}-3} \Rightarrow BE: \frac{x-4}{-24} = \frac{y-3}{-6} \quad \Big| \cdot (-24) \Rightarrow BE: x-4 = 4(y-3)$$

$$BE: x - 4y + 8 = 0$$

$\boxed{B}$ fals

$$CF: \frac{x-0}{\frac{14}{5}-0} = \frac{y-5}{\frac{9}{5}-5} \Rightarrow CF: \frac{x}{14} = \frac{y-5}{-16} \Rightarrow CF: -8x = 7(y-5)$$

$$CF: 8x + 7y - 35 = 0$$

$\boxed{C}$ fals

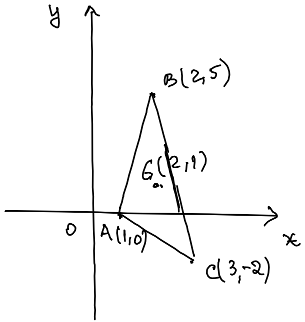
T. Ceva AD, BE, CF concurente $\Leftrightarrow \frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$

$\boxed{D}$ adevărat $\qquad \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2} = 1$ ✓

Răspuns $\boxed{A}$, $\boxed{D}$

4. Se dă un tringhi ABC cu vârfurile $A(1,0)$, $C(3,-2)$ și $G(2,1)$ centrul de greutate al triunghiului. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

- [A] $B(2,5)$;
- [B] Aria triunghiului ABC este egală cu 12;
- [C] distanța de la punctul B la latura AC este $3\sqrt{2}$;
- [D] mediana din vârful B este perpendiculară pe axa Ox.



G centrul de greutate ΔABC, $G(x_G, y_G)$

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \quad y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$$

$$2 = \frac{1 + x_B + 3}{3} \Rightarrow 6 = 4 + x_B \Rightarrow x_B = 2$$

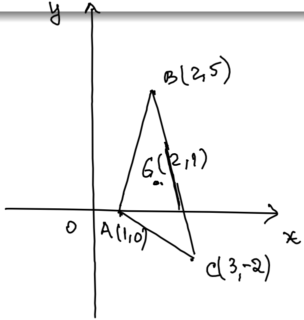
$$1 = \frac{0 + y_B - 2}{3} \Rightarrow 3 = y_B - 2 \Rightarrow y_B = 5$$

$\Rightarrow B(2,5)$ $\boxed{A}$ adevărată

$$\mathcal{A}_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left| \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left| \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2}|5 - 4 - 15 + 2| = \frac{1}{2}|-12| = 6$$

$\boxed{B}$ falsă



$$AC=\sqrt{(x_A-x_C)^2+(y_A-y_C)^2}$$

$$AC=\sqrt{(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2}$$

$$AC=\sqrt{(3-1)^2+(-2-0)^2}=\sqrt{2^2+(-2)^2}=\sqrt{4+4}$$
$$=2\sqrt{2}$$

$$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=6=\frac{AC\cdot dist(B,AC)}{2}$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{2}\cdot dist(B,AC)=12$$

$$dist(B,AC)=\frac{12}{2\sqrt{2}}=\frac{6}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$$

$\boxed{C}$ adevărată

BG mediană $B(2,5)$, $G(2,1)$

$$BG: \frac{x-x_G}{x_B-x_G}=\frac{y-y_G}{y_B-y_G} \Leftrightarrow BG: \frac{x-2}{2-2}=\frac{y-1}{5-1} \Leftrightarrow$$

$$BG: \frac{x-2}{0}=\frac{y-1}{4}$$

Convenție: dacă numitorul nul $\Rightarrow$ numărătorul devine nul

$$BG: x-2=0$$

$$BG: x=2 \quad \Rightarrow BG \parallel Oy$$

$y=mx+n$ BG nu are pantă

$\boxed{D}$ adev

Răspunsuri $\boxed{A}$, $\boxed{C}$, $\boxed{D}$

MULT SUCCES LA EXAMENE!