Ecuații

Saturday, December 9, 2023 8:48 AM

15. Suma soluţiilor ecuaţiei $6^{x+1} - 4^x = 3^{2x}$ este

A -1; B 0; C 1; D 2.

Răspuns : $\boxed{B}$

ec. exponențială $\quad 6 = 2\cdot 3 \quad 4 = 2\cdot 2$

$4^x = (2^2)^x = 2^{2x} = 2^{x+x} = 2^x \cdot 2^x$

$3^{2x} = 3^x \cdot 3^x$

$6^{x+1} = 6\cdot 6^x = 6\cdot(2\cdot 3)^x = 6\cdot 2^x\cdot 3^x$

$6\cdot 2^x\cdot 3^x - 2^x\cdot 2^x = 3^x\cdot 3^x \quad \Big| : (3^x\cdot 3^x)$

$6\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^x - \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} = 1$ (ideea unei eleve)

Notăm $t = \left(\frac{2}{3}\right)^x$. Avem $t^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^{2x}$.

$t = \left(\frac{2}{3}\right)^x \iff t > 0$ și $x = \log_{\frac{2}{3}} t$

ec. $\iff 6t - t^2 = 1 \iff t^2 - 6t + 1 = 0 \overset{(*)}{\iff} t = t_1 > 0$ sau $t = t_2 > 0$

(*) rezolvăm ec $t^2 - 6t + 1 = 0 \quad \Delta = 6^2 - 4\cdot 1 = 36 - 4 = 32 > 0 \Rightarrow \exists\, t_1, t_2 \in \mathbb{R},\ t_1 \neq t_2$

$t_1 + t_2 = 6 \quad t_1 t_2 = 1 \Rightarrow t_1 > 0$ și $t_2 > 0$

Fie $x_1 = \log_{\frac{2}{3}} t_1$ și $x_2 = \log_{\frac{2}{3}} t_2$. Avem că mulț. sol. ec. date este $\{x_1, x_2\}$.

$x_1 + x_2 = \log_{\frac{2}{3}} t_1 + \log_{\frac{2}{3}} t_2 = \log_{\frac{2}{3}} t_1 t_2 = \log_{\frac{2}{3}} 1 = 0$.

25. Considerăm în $\mathbb{R}$ ecuaţia

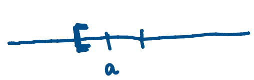
$$\left[\frac{x+2}{3}\right] = \frac{x+1}{4},$$

unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a. Dacă notăm cu S mulţimea soluţiilor acestei ecuaţii, care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate?

A $S = [-9, 3]$; B $S = \{-9, -5, -1, 3\}$;
C $S = [-5, 3]$; D $S = \{-5, -1, 3\}$.

Răspuns: $\boxed{D}$

$\forall a \in \mathbb{R} \quad [a] \in \mathbb{Z}$,



$[a] \leq a < [a] + 1$.

Ne propunem să aflăm mulțimea S.

Notație: $n = \left[\frac{x+2}{3}\right] \iff n \in \mathbb{Z}$ și $n \leq \frac{x+2}{3} < n+1$. (1)

revenim la ec. $\quad n = \frac{x+1}{4} \iff x = 4n - 1$. (2)

(1) și (2) $\iff n \leq \frac{4n-1+2}{3} < n+1 \iff n \leq n + \frac{n+1}{3} < n+1 \iff 0 \leq \frac{n+1}{3} < 1 \quad |\cdot 3 \iff$

$|-n$

(1) și (2) $\Leftrightarrow \quad n \le \dfrac{4n-1+2}{3} < n+1 \Leftrightarrow n \le n + \dfrac{n+1}{3} < n+1 \;\big|-n \Leftrightarrow 0 \le \dfrac{n+1}{3} < 1 \;\big|\cdot 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0 \le n+1 < 3 \Leftrightarrow -1 \le n < 2 \underset{n\in\mathbb{Z}}{\Leftrightarrow} n = -1$ sau $n = 0$ sau $n = 1$.

$n = -1 \Rightarrow x = -5$; $n = 0 \Rightarrow x = -1$; $n = 1 \Rightarrow x = 3$

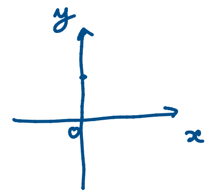
Cu ajutorul unei eleve, am ajuns la urm. observație.

Mulț. sol. este $S = \{-5, -1, 3\}$. Obs. În condiții de examen, când optimizarea timpului este importantă, această problemă se poate rezolva fără a determina S. Din (2) deducem că $S \subset \mathbb{Z}$. Prin urmare, A și C sunt răspunsuri incorecte. Trebuie să alegem între B și D. Prin verificare deducem că $-9 \notin S$. Deci B este incorect. Știm că există un răspuns corect (regula celor care au propus subiectul). Prin urmare, D este singurul corect.

20. Considerăm funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - [x] - \frac{1}{2}$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x. Stabiliţi valoarea de adevăr a următoarelor afirmaţii.

Răspuns : $\boxed{C}$

- [A] Graficul funcţiei f intersectează axa Oy în cel puţin 2 puncte.
- [B] Graficul funcţiei f nu intersectează axa Ox.
- [C] Graficul funcţiei f intersectează axa Ox într-o infinitate de puncte.
- [D] Graficul funcţiei f nu intersectează axa Oy.



Notăm G_f graficul funcției f. $G_f = \{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$.

$G_f \cap Oy = \{(0, f(0))\}$ $\qquad G_f \cap Ox = \{(x, 0) : f(x) = 0\}$.

A este fals pt $G_f \cap Oy$ într-un singur punct.

D este fals — " —

Nr. de puncte în care G_f int. Ox este egal cu nr. sol. ec. $f(x) = 0$.

$x - [x] - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow [x] = x - \frac{1}{2}$ $\qquad$ Not $n = [x] \Leftrightarrow n \in \mathbb{Z}$ și $n \le x < n+1$

ec $\Leftrightarrow n = x - \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = n + \frac{1}{2}$

revenim $n \le n + \frac{1}{2} < n+1 \Leftrightarrow 0 \le \frac{1}{2} < 1$ adevărată $\forall n \in \mathbb{Z}$

$S = \{n + \frac{1}{2} : n \in \mathbb{Z}\}$

8. Considerăm în $\mathbb{R}$ ecuaţia

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 1.$$

Mulţimea soluţiilor ecuaţiei este:

[A] $S = [3, 12]$; [B] $S = [1, \infty)$; [C] $S = [5, 10]$; [D] $S = \{4, 11\}$.

Răspuns $\boxed{C}$

Ne propunem să aflăm S.

Condiții de existență $\begin{cases} x - 1 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge 1 \Leftrightarrow x \in [1, \infty) \\ x + 3 - 4\sqrt{x-1} \ge 0 \\ x + 8 - 6\sqrt{x-1} \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow D = [1, +\infty)$

Notație : $t = \sqrt{x-1} \Leftrightarrow t \ge 0$ și $x = t^2 + 1$.

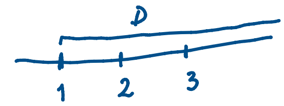
$x + 3 - 4\sqrt{x-1} = t^2 + 1 + 3 - 4t = t^2 - 4t + 4 = (t-2)^2 \ge 0 \quad \forall t$

Notație : $t = \sqrt{x-1} \Leftrightarrow t \geq 0$ și $x = t^2+1$.

$x+3-4\sqrt{x-1} = t^2+1+3-4t = t^2-4t+4 = (t-2)^2 \geq 0 \quad \forall t$

$x+8-6\sqrt{x-1} = t^2+1+8-6t = t^2-6t+9 = (t-3)^2 \geq 0 \quad \forall t$

ec $\Leftrightarrow \sqrt{(t-2)^2} + \sqrt{(t-3)^2} = 1 \Leftrightarrow |t-2| + |t-3| = 1$



Caz 1. $t \in [1,2) \Rightarrow t-2<0$ și $t-3<0$

ec $\Leftrightarrow -(t-2)-(t-3) = 1 \Leftrightarrow -2t+5=1 \Leftrightarrow -2t=-4 \Leftrightarrow t=2 \notin [1,2)$.

Nu am obț. sol. în $[1,2)$.

Caz 2. $t \in [2,3] \Rightarrow t-2 \geq 0$ și $t-3 \leq 0$

ec $\Leftrightarrow t-2-(t-3) = 1 \Leftrightarrow 1=1$ adevărat $\forall t$

Mulț sol. în acest caz este $[2,3]$.

Caz 3. $t \in (3,\infty) \Rightarrow t-2>0$ și $t-3>0$

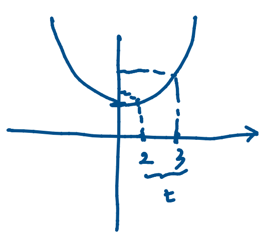
ec $\Leftrightarrow t-2+t-3=1 \Leftrightarrow 2t-5=1 \Leftrightarrow 2t=6 \Leftrightarrow t=3 \notin (3,+\infty)$

Nu avem sol. în acest caz.

În concluzie, mulț valorilor lui t este $[2,3]$.

Not $\Leftrightarrow t \geq 0$ și $x = t^2+1$

Obs. că orice nr. din $[2,3]$ este ≥ 0.



Obs. că funcția $f:[2,3]\to\mathbb{R}$, $f(t)=t^2+1$ este continuă și strict crescătoare. Prin urmare, imaginea ei este intervalul $[f(2), f(3)] = [5,10]$. Deci $S=[5,10]$.