Continuitate și derivabilitate

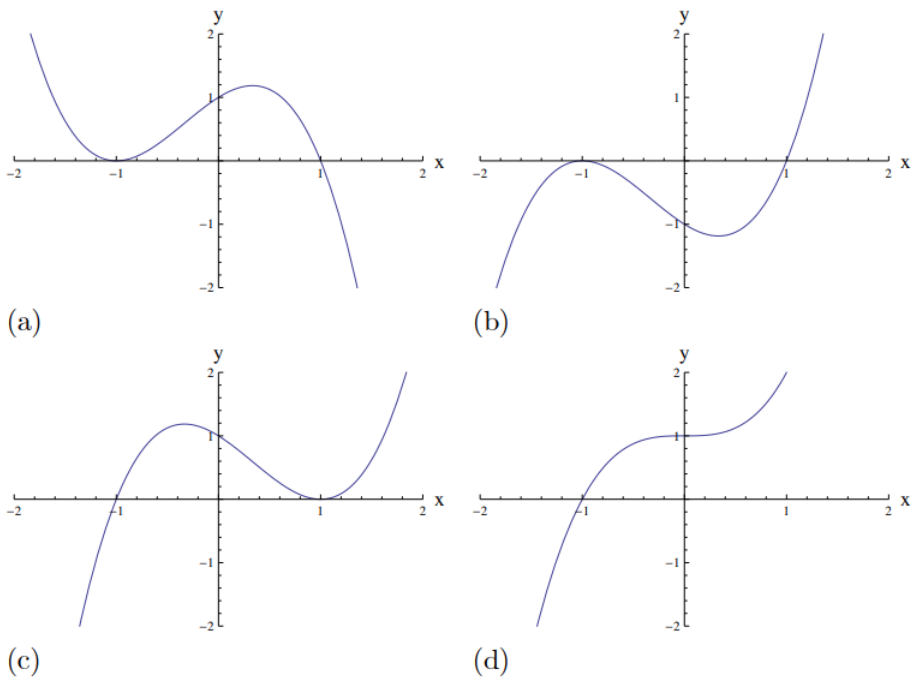
1. Funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = kx^3 - (k+1)x^2 + (2-k)x - k$ are un minim local în $x = 1$ dacă:

   A $k > 0$. B $0 < k < 1$. C $k > 1/2$. D $k \in \mathbb{R}$.

2. Valorile $a, b \in \mathbb{R}$ a.î. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^4 + ax + 1, & \text{dacă } x < 1 \\ b + \ln x, & \text{dacă } x \geq 1, \end{cases}$ e derivabilă pe $\mathbb{R}$ sunt:

   A $a = 3$, $b = 1$. B $a = -3$, $b = 1$. C $a = -3$, $b = -1$. D $a = 1$, $b = 3$.

3. Care dintre graficele de mai jos corespunde funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$?



4. Funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2+ax+5}{\sqrt{x^2+1}}$, $a \in \mathbb{R}$, are trei puncte de extrem local dacă:

   A $a \in (-1, 1)$. B $a \in [-1, 1]$. C $a \in [-2, 2]$. D $a \in (-2, 2)$.

5. Numărul valorilor $a \in (0, 2\pi)$ pentru care $f(x) = |x^2 - 1| \sin(ax)$ este derivabilă pe $\mathbb{R}$ este:

   A 0. B 1. C 3. D infinit.

6. Fie funcția $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x \ln x$. Dacă d este tangenta la graficul lui f care trece prin punctul $(0, 1)$, iar m este panta dreptei d, care din următoarele afirmații sunt adevărate?

   A $m \in [-2, 0]$. B $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \in d$. C $m \in (-\infty, -2]$. D $(\frac{1}{e}, \frac{1}{e}) \in d$.

7. Fie funcția $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 \ln^2 x, & \text{dacă } x > 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0, \end{cases}$ și fie n numărul punctelor de extrem local ale lui f. Care din următoarele afirmații sunt adevărate?

   A f este continuă pe $\mathbb{R}$.
   B $n = 2$.
   C f este strict crescătoare pe $[1, \infty)$.
   D $n = 3$.

8. Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x + e^{-x} - x^2$. Care din următoarele afirmații sunt adevărate?

   A $f'(0) = f''(0) = 0$.
   B 0 nu este punct de extrem local pt f.
   C funcția f' este strict monotonă.
   D 0 este punct de extrem global pt f''.

9. Inegalitatea $a^x \geq x + 1$ are loc pentru orice $x \in \mathbb{R}$ dacă și numai dacă:

   A $a = e$. B $a = 1$. C $a = e^e$. D $a = 1/e$.

10. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{dacă } x < 1 \\ 2x^2 - 6x + 6, & \text{dacă } x \geq 1, \end{cases}$ și $g : (1, 2) \to \mathbb{R}$, $g(t) = \displaystyle\int_{t-1}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x$.
    Numărul punctelor de extrem local ale lui g în intervalul $(1, 2)$ este:

    A 0. B 1. C 2. D 3.

Universitatea Babeș-Bolyai, Facultatea de Matematică și Informatică
Consultații la matematică pentru pregătirea concursului de admitere 2024

Continuitate și derivabilitate

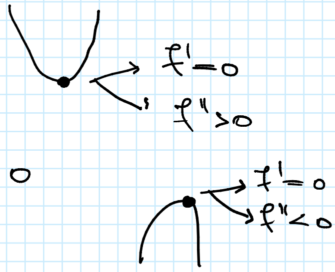
1. Funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = kx^3 - (k+1)x^2 + (2-k)x - k$ are un minim local în $x = 1$ dacă:

[A] $k > 0$. [B] $0 < k < 1$. [C] $k > 1/2$. [D] $k \in \mathbb{R}$.

$f'(1) = 0$, $f'(x) = 3kx^2 - 2(k+1)x + 2-k$, $f'(1) = 3k - 2(k+1) + 2k = 3k - 3k - 2 + 2 = 0$.

$\Rightarrow f'(1) = 0$, $\forall k \in \mathbb{R}$. $\Rightarrow$ $x=1$ punct critic.

$x=1$ punct de minim local $\Rightarrow f''(1) > 0$



$f''(x) = 6kx - 2(k+1) \Rightarrow f''(1) = 6k - 2k - 2 = 4k - 2 > 0$

$\boxed{k > \frac{1}{2}}$

2. Valorile $a, b \in \mathbb{R}$ a.î. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^4 + ax + 1, & \text{dacă } x < 1 \\ b + \ln x, & \text{dacă } x \geq 1, \end{cases}$ e derivabilă pe $\mathbb{R}$ sunt:

[A] $a = 3$, $b = 1$. [B] $a = -3$, $b = 1$. [C] $a = -3$, $b = -1$. [D] $a = 1$, $b = 3$.

f derivabilă $\Rightarrow$ f continuă.

Vom impune condițiile de continuitate și derivabilitate.

Continuitatea în $x=1$: $\lim_{x \nearrow 1} f(x) = \lim_{x \searrow 1} f(x) = f(1)$.

$1 + a + 1 = b \Rightarrow b = a+2$

$f'(x) = \begin{cases} 4x^3 + a, & x < 1 \\ \frac{1}{x}, & x > 1 \end{cases}$, $f'_s(1) = 4+a$, $f'_d(1) = 1$.

Derivabilitatea în $x=1$: $f'_s(1) = f'_d(1) \Leftrightarrow 4+a = 1$, $a = -3$

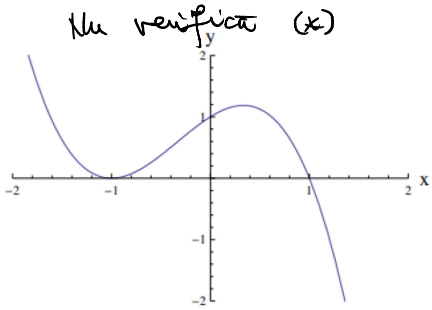
$b = -1$

3. Care dintre graficele de mai jos corespunde funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$?

$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$.

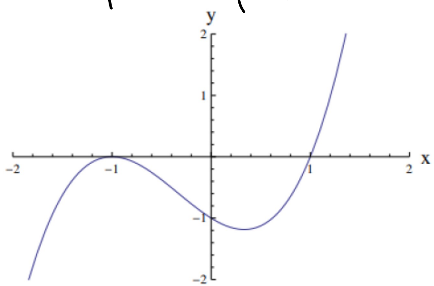
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ $\Big\}$ $(*)$

Nu verifică $(*)$



(a)

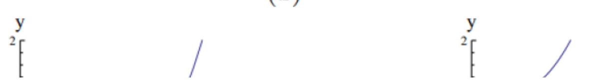
Nu verifică $(**)$

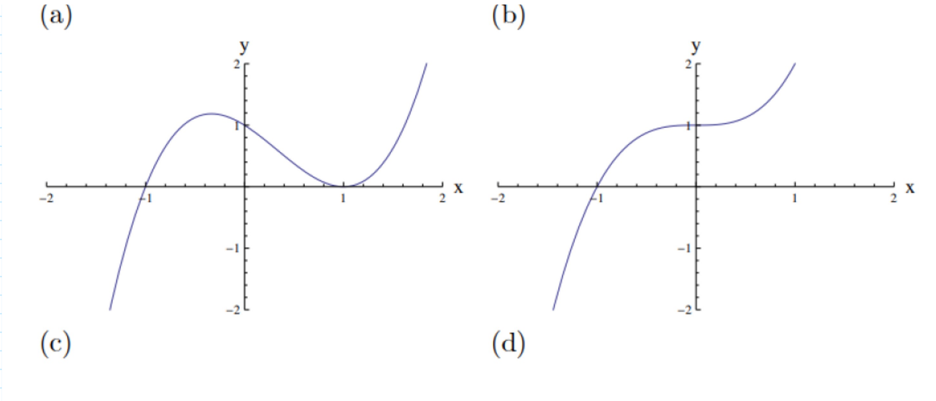


(b)

$f(0) = 1$ $(**)$

$f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$
$= 3x^2 - 3x + x - 1$
$= (x-1)(3x+1)$.





$= 3x^2 - 3x + x - 1$

$= (x-1)(3x+1).$

$f'(1) = 0 \Rightarrow x = 1$ pct. de extrem local

$f''(x) = 6x - 2$

$f''(1) = 4 > 0 \rightarrow x = 1$ pct. de minim local.

4. Funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2+ax+5}{\sqrt{x^2+1}}$, $a \in \mathbb{R}$, are trei puncte de extrem local dacă: și numai dacă

A $a \in (-1, 1)$. B $a \in [-1, 1]$. C $a \in [-2, 2]$. $\boxed{\text{D } a \in (-2, 2).}$

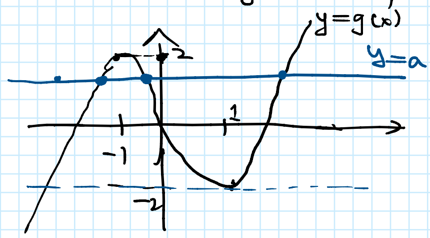
$$f'(x) = \frac{(2x+a)\sqrt{x^2+1} - (x^2+ax+5)\cdot\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{(2x+a)(x^2+1) - x(x^2+ax+5)}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}.$$

$$= \frac{2x^3 + 2x + \cancel{ax^2} + a - x^3 - \cancel{ax^2} - 5x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = \frac{x^3 - 3x + a}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}.$$

$f'(x) = 0$ are 3 soluții : $x^3 - 3x + a = 0$ are 3 sol $\Leftrightarrow x^3 - 3x = -a$ are 3 sol.

Considerăm $g(x) = x^3 - 3x$, $g'(x) = 3x^2 - 3$, $g'(x) = 0$ pt $x = \pm 1$.

x	$-\infty$		-1		1		∞
$g'(x)$	$+$	$+$	0	$-\ -$	0	$+$	$+$
$g(x)$	$\nearrow$	$\nearrow$	2	$\searrow\ \searrow$	-2	$\nearrow$	$\nearrow$



$g(x) = a$ are 3 sol.

$a \in (-2, 2)$.

5. Numărul valorilor $a \in (0, 2\pi)$ pentru care $f(x) = |x^2 - 1| \sin(ax)$ este derivabilă pe $\mathbb{R}$ este:

A 0. $\boxed{\text{B } 1.}$ C 3. D infinit.

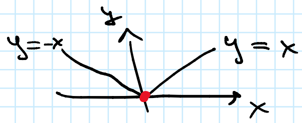
$$f(x) = \begin{cases} (x^2-1)\sin ax, & x < -1 \\ (1-x^2)\sin ax, & -1 \le x < 1 \\ (x^2-1)\sin a, & x \ge 1 \end{cases}, \quad f'(x) = \begin{cases} 2x\cdot\sin ax + (x^2-1)\cdot a\cos ax, & x < -1 \\ -2x\sin ax - (x^2-1)a\cos ax, & -1 < x < 1 \\ 2x\sin ax + (x^2-1)a\cos ax, & x > 1 \end{cases}$$

f derivabilă în $x = \pm 1 \Rightarrow f'_s(\pm 1) = f'_d(\pm 1)$.

$f'_s(1) = -2\sin a$, $f'_d(1) = 2\sin a \longrightarrow \boxed{\sin a = 0}$, $a \in (0, 2\pi)$

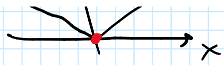
$f'_s(-1) = -2\sin(-a) = 2\sin a$, $f'_d(-1) = 2\sin(-a) = -2\sin a$ $\Rightarrow \underline{a = \pi}$.

<u>Reminder</u>: $|x|$ e continuă pe $\mathbb{R}$
nu e derivabilă în $x = 0$.



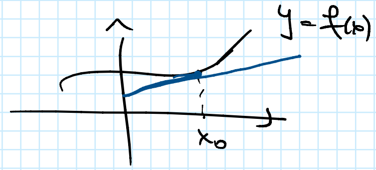
Reminder: $|x|$ e continuă pe $\mathbb{R}$

nu e derivabilă în $x=0$.



6. Fie funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = -x\ln x$. Dacă d este tangenta la graficul lui f care trece prin punctul $(0,1)$, iar m este panta dreptei d, care din următoarele afirmații sunt adevărate?

A $m \in [-2, 0]$. B $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \in d$. C $m \in (-\infty, -2]$. D $(\frac{1}{e}, \frac{1}{e}) \in d$.



Ecuația tangentei: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

$f'(x) = -\ln x - x\cdot\frac{1}{x} = -\ln x - 1.$

$(0,1)$ aparține tangentei: $1 - y_0 = f'(x_0)\cdot(-x_0)$.

$1 + x_0\ln x_0 = x_0(\ln x_0 + 1)$

$1 + x_0\cancel{\ln x_0} = x_0\cancel{\ln x_0} + x_0 \Rightarrow x_0 = 1,\ y_0 = 0.$

$f'(x_0) = -1.$

Ecuația tangentei: $y - 0 = -1\cdot(x-1)$

$y = -x + 1$. $m = -1$, $x + y = 1$

7. Fie funcția $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2\ln^2 x, & \text{dacă } x>0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0, \end{cases}$ și fie n numărul punctelor de extrem local ale lui f. Care din următoarele afirmații sunt adevărate?

A f este continuă pe $\mathbb{R}$. C f este strict crescătoare pe $[1,\infty)$.

B $n = 2$. D $n = 3$.

- Continuitatea în $x=0$: $\lim\limits_{x\searrow 0} f(x) = \lim\limits_{x\searrow 0} x^2\ln^2 x \overset{0\cdot\infty}{=} \lim\limits_{x\searrow 0}(x\ln x)^2 = 0 = f(0)$ ✓

$\lim\limits_{x\searrow 0} x\ln x \overset{0\cdot\infty}{=} \lim\limits_{x\searrow 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{l'H}{=} \lim\limits_{x\searrow 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\searrow 0} -x = 0$

- $f'(x) = 2x\ln^2 x + x^2\cdot 2\ln x\cdot\frac{1}{x} = 2x\ln^2 x + 2x\ln x = 2x(\ln^2 x + \ln x)$.
$= 2x\ln x(\ln x + 1)$.

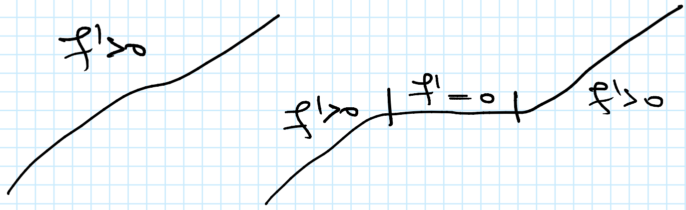
- $f'(x) = 0$ pt $\ln x = 0$, $\ln x = -1$; $\boxed{x = 1 \text{ sau } x = \frac{1}{e}}$.

x	0		$\frac{1}{e}$		1		∞
$f'(x)$		$+ + +$	0	$- - -$	0	$+ + +$	
$f(x)$	0 Min	$\nearrow \nearrow$	Max	$\searrow \searrow$	Min $= 0$	$\nearrow \nearrow$	

$f'(x) > 0$ pt $(1,\infty) \Rightarrow f$ strict crescătoare

$f(x) \geq 0$.

3 puncte de extrem local.



8. Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x + e^{-x} - x^2$. Care din următoarele afirmații sunt adevărate?

$\boxed{\text{A}}$ $f'(0) = f''(0) = 0.$ $\boxed{\text{C}}$ funcția f' este strict monotonă.

$\boxed{\text{B}}$ 0 nu este punct de extrem local pt f. $\boxed{\text{D}}$ 0 este punct de extrem global pt f''.

- $f'(x) = e^x - e^{-x} - 2x$, $f'(0) = 0 = f''(0)$
- $f''(x) = e^x + e^{-x} - 2 = e^x + \frac{1}{e^x} - 2 \geq 0$; egalitate pt $e^x = e^{-x}$, $e^{2x} = 1$, $\underline{x = 0}$.

f' strict monotonă $\Leftrightarrow$ $f'' > 0$ pe $\mathbb{R}$ (sau $f'' < 0$ pe $\mathbb{R}$).

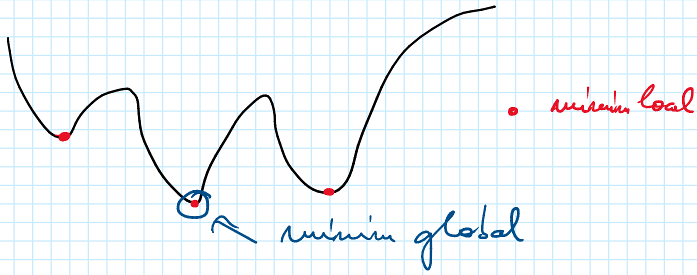
$a + \frac{1}{a} \geq 2$, $\forall a > 0$ (Inegalitatea mediilor $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$).

cu egalitate $a = \frac{1}{a}$ cu egalitate pt $a = b$.

- $f''(x) = e^x + e^{-x} - 2 \geq 0 = f''(0) \Rightarrow f''(x) \geq f''(0) \rightarrow 0$ pct de ~~maxim~~ minim global pt f''.

x	$-\infty$			0			∞
$f''(x)$	+	+	+	0	+	+	+
$f'(x)$	$-$	$\nearrow -$	$\nearrow -$	0	$+ \nearrow$	$+ \nearrow$	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\searrow$	2	$\nearrow$		$\nearrow$

$x = 0$ pct de minim global pt f.



9. Inegalitatea $a^x \geq x + 1$ are loc pentru orice $x \in \mathbb{R}$ dacă și numai dacă:

$\boxed{\text{A}}$ $a = e$. $\boxed{\text{B}}$ $a = 1$. $\boxed{\text{C}}$ $a = e^e$. $\boxed{\text{D}}$ $a = 1/e$.

$f(x) = a^x - x$, $f(x) \geq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$; $f(x) \geq f(0)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

$f(0) = 1$ $\rightarrow x = 0$ pct de minim global

$f'(x) = a^x \ln a - 1$ $\Rightarrow f'(0) = 0$.

$f'(0) = \ln a - 1 = 0 \rightarrow \ln a = 1$, $\underline{a = e}$.

10. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{dacă } x < 1 \\ 2x^2 - 6x + 6, & \text{dacă } x \geq 1, \end{cases}$ și $g : (1, 2) \to \mathbb{R}$, $g(t) = \int_{t-1}^{t} f(x)\,dx$.

Numărul punctelor de extrem local ale lui g în intervalul $(1, 2)$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 0. $\boxed{\text{B}}$ 1. $\boxed{\text{C}}$ 2. $\boxed{\text{D}}$ 3.

$$\int_{t-1}^{1} f(x)\,dx + \int_{1}^{t} f(x)\,dx.$$

$t - 1 \in (0, 1)$. $g(t) = \int_{t-1}^{t} f(x)\,dx = F(t) - F(t-1)$, unde F - primitivă a lui f.

$$g'(t) = 0 \iff F'(t) - F'(t-1) = 0 \iff f(t) - f(t-1) = 0$$

$\underline{t \in (1,2)}$.

$$f(t) = 2t^2 - 6t + 6, \quad f(t-1) = t$$

$$f(t) = f(t-1) \iff 2t^2 - 7t + 6 = 0 \iff (2t-3)(t-2) = 0$$

$\rightarrow t = \frac{3}{2} \in (1,2)$.