25 noiembrie 2023 Conf. dr. Cosmin Pelea

Combinatorică

Probleme de numărare

Programa şcolară în vigoare ne pune cel mai adesea în situaţia de a număra pentru o mulţime finită nevidă A (sub)mulţimi finite de elemente din A, (sub)mulţimi ordonate finite de elemente din A şi sisteme ordonate finite de elemente din A.

Să începem cu ultimele dintre ele. Un *sistem ordonat finit de elemente din* A este un element $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ al produsului cartezian $\underbrace{A \times \cdots \times A}_{k \text{ mulţimi}}$ $(k \in \mathbb{N})$. O simplă schimbare de reprezentare — eliminarea parantezelor şi a virgulelor — conduce la scrierea

$$a_1 a_2 \ldots a_k,$$

care justifică denumirea de *cuvânt de lungime* k *peste* A sau *cuvânt cu elemente din* A pe care o preferăm celei de mai sus. Numărul k se numeşte *lungimea cuvântului*, iar elementele $a_1, \ldots, a_k$ se numesc *componentele cuvântului*. Pentru două cuvinte $a_1 a_2 \ldots a_k$ şi $b_1 b_2 \ldots b_s$,

$$a_1 a_2 \ldots a_k = b_1 b_2 \ldots b_s \;\Leftrightarrow\; k = s \text{ şi } a_i = b_i, \forall i = 1, 2, \ldots, k.$$

Cuvântul vid (peste A) este singurul cuvânt (peste A) care are lungimea 0.

Observaţiile 1 *i) Subliniem câteva deosebiri esenţiale între mulţime şi cuvânt:*
a) Într-o mulţime, ordinea în care scriem elementele nu contează, pe când în cuvânt ordinea componentelor este importantă.
b) Elementele unei mulţimi sunt distincte, dar componentele unui cuvânt pot să şi coincidă.
ii) Dacă mulţimea $A \neq \emptyset$ are n elemente, atunci numărul cuvintelor de lungime k peste A este

$$|A^k| = n^k \;\; (k, n \in \mathbb{N},\; n \neq 0).$$

Acest număr este egal cu numărul funcţiilor de la $\{1, \ldots, k\}$ la A şi, printr-o generalizare simplă, şi cu numărul funcţiilor de la o mulţime cu k elemente la o mulţime cu n elemente.

O submulţime finită a mulţimii $A \neq \emptyset$ în care elementele sunt aranjate într-o anumită ordine se numeşte *submulţime ordonată a mulţimii* A. Evidenţiind ordinea prin numerotarea elementelor, o submulţime ordonată cu k elemente din A $(k \in \mathbb{N})$ e un sistem ordonat $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ cu componente distincte, adică un cuvânt $a_1 a_2 \ldots a_k$ (peste A) care are componentele distincte.

Definiţia 2 *Fie $A \neq \emptyset$ o mulţime finită cu $|A| = n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ şi $k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$. Submulţimile ordonate de k elemente ale lui A se numesc* aranjamente de n (elemente) luate câte k.

Observaţia 3 *Două aranjamente de n luate câte k se deosebesc prin natura elementelor lor sau prin ordinea elementelor lor (sau ambele).*

Notaţia 4 *Notăm cu* A_n^k *numărul aranjamentelor de* n *luate câte* k.

Observaţia 5 *Dacă* $k, n \in \mathbb{N}$, $k \le n$ *atunci*

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}\,.$$

Cum pentru un alfabet vid se poate forma un singur cuvânt, cuvântul vid, iar acesta nu are componente care să se repete, putem scrie $A_0^0 = 1$. *Aşadar,* $A_n^0 = 1$ *chiar şi atunci când* $n = 0$.

Definiţia 6 *Fie* A *o mulţime finită (nevidă) cu* $|A| = n$. *Se numeşte permutare a mulţimii* A *sau permutare de* n *elemente orice mulţime ordonată (cuvânt cu componentele distincte) care se poate forma cu toate cele* n *elemente ale mulţimii* A. *Cu alte cuvinte, o permutare de* n *elemente este un aranjament de* n *elemente luate câte* n.

Observaţia 7 *Două permutări de* n *elemente se deosebesc doar prin ordinea elementelor lor.*

Notaţia 8 *Notăm cu* P_n *numărul permutărilor mulţimii* A *cu* n *elemente.*

Observaţia 9 *Ţinând cont de definiţia permutărilor,* $P_n = A_n^n$. *Aşadar,*

$$P_n = n! = n(n-1)(n-2)\cdot\dots\cdot 3\cdot 2\cdot 1,\ \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

Definiţia 10 *Pentru o mulţime (nevidă)* A *cu* n *elemente, submulţimile lui* A *având fiecare câte* k *elemente, unde* $k \in \mathbb{N}$, $0 \le k \le n$, *se numesc combinări de* n *(elemente) luate câte* k.

Observaţia 11 *Două combinări de* n *luate câte* k *se deosebesc prin natura elementelor lor.*

Notaţia 12 *Notăm cu* C_n^k *numărul combinărilor de* n *luate câte* k.

Observaţia 13 *Dacă* $k, n \in \mathbb{N}$, $k \le n$ *atunci*

$$\rightarrow\ C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (k \le n)\,.$$

Chiar şi când $A = \emptyset$ *există o singură submulţime cu 0 elemente a mulţimii* A, *prin urmare putem scrie* $C_n^0 = 1$ *pentru orice* $n \in \mathbb{N}$.

Propoziţia 14 **(Formula binomului lui Newton)** *Fie* $n \in \mathbb{N}^*$. *Atunci*

$$(a+b)^n = \underbrace{a^n}_{C_n^0} + C_n^1 a^{n-1} b + \cdots + \underbrace{C_n^k a^{n-k} b^k}_{= T_{k+1}} + \cdots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n.$$

Enunţuri

1. Determinaţi $n \in \mathbb{N}$ pentru care

$$C_n^5 > C_n^7.$$

2. Considerăm cifrele 0, 1, 2, 3, 4, 5 şi 6. $A = \{0,1,2,3,4,5,6\}$

a) Câte numere de 8 cifre pot fi formate cu aceste cifre? Câte dintre acestea sunt pare?

b) Câte numere pot fi formate cu aceste cifre astfel încât în fiecare număr fiecare cifră apare exact o dată? Câte dintre acestea sunt pare?

i

numărăm aranjamente

c) Câte numere de 4 cifre pot fi formate cu aceste cifre astfel încât în fiecare număr fiecare cifră apare cel mult o dată? Câte dintre acestea sunt pare?

d) Câte numere pot fi formate cu aceste cifre astfel încât în fiecare număr fiecare cifră apare cel mult o dată? Câte dintre acestea sunt pare? Pt. fiecare $i = 1, \dots, 7$ rezolvăm o pb. ca cea de la c)

e) Câte numere de 4 cifre pot fi formate cu aceste cifre astfel încât în fiecare număr fiecare cifră este strict mai mică (respectiv mai mare) decât precedenta? Câte dintre acestea sunt pare?

3. În câte moduri se pot împărţi 7 creioane de culori diferite la 10 copii de vârste diferite în aşa fel încât fiecare copil să primească cel mult un creion? Dar dacă cel mai mic dintre copii primeşte neapărat un creion?

4. Să se arate că pentru o mulţime finită nevidă A, numărul submulţimilor cu un număr par de elemente este acelaşi cu numărul submulţimilor cu un număr impar de elemente.

5. Să se determine suma coeficienţilor dezvoltării $(2x-3)^{2023}$. R: -1.

1

6. Fie $m, n \in \mathbb{N}^*$, $k \in \mathbb{N}$, $k \le m \le n$. Să se arate că:

$$C_{m+n}^k = C_m^0 C_n^k + C_m^1 C_n^{k-1} + C_m^2 C_n^{k-2} + \cdots + C_m^{k-1} C_n^1 + C_m^k C_n^0 .$$

TEMĂ

Completări, indicații și soluții

Obs:

cuvânt de lungime k peste A

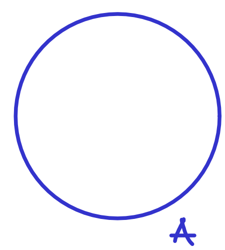
$a_1 \, a_2 \, \dots \, a_k$

a) $\boxed{a_1 \mid a_2 \mid \dots \mid a_k}$ k căsuțe

b)

x	1	2	...	k
$f(x)$	a_1	a_2	...	a_k

$\in A \longleftrightarrow N_k = \{1, 2, \dots, k\} \xrightarrow{f}$



1. $C_n^5 > C_n^7$ $\quad n \in \mathbb{N}, \quad n \ge 5, \ n \ge 7$

$n - 7 < n - 5$ și $(n-5)! = (n-7)!(n-6)(n-5)$

$\Updownarrow$

$$\frac{n!}{5!(n-5)!} > \frac{n!}{7!(n-7)!} \Big| \cdot \frac{5!(n-7)!}{n!} \iff \frac{1}{(n-6)(n-5)} > \frac{1}{6 \cdot 7} \iff$$

$(n+1)(n-12) =$

$$\iff n^2 - 11n + 30 < 42 \iff n^2 - 11n - 12 < 0 \overset{n \in \mathbb{N}}{\underset{n \ge 7}{\iff}} n \in \{7, 8, 9, 10, 11\}.$$

$n \in (-1, 12)$

Mulțimea soluțiilor $n \in \{7, 8, 9, 10, 11\}$.

2. $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

a) Formăm numere de 8 cifre peste A. Pentru aceasta

— u — cuvinte de lungime 8 peste A care nu încep cu 0. $\quad 0 \underbrace{\qquad\qquad}_{7 \text{ componente}}$

$\Longrightarrow$ $7^8 - 7^7$ numere de 8 cifre peste A.

cuvinte de lungime 8 peste A

Dintre acestea sunt pare: - ultima cifră $\rightarrow$ 4 moduri

$\boxed{\ }$

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}$

7 componente $\Longrightarrow$ $\underset{\text{cuvinte}}{7^7} - 7^6$ ← cuvinte care încep cu 0

R: $4\cdot(7^7 - 7^6)$ nr. pare de 8 cifre (cu cifrele din A).

b) R: $6\cdot\underbrace{6!}$ numărul de moduri de a completa celelalte părți a numărului

moduri de alege prima cifră

Sau: - avem de numărat permutări $\Rightarrow$ putem forma $7!$ cuvinte peste A cu componentele distincte, dar dintre acestea $6!$ încep cu 0, deci nu convin

$\Rightarrow$ nr. căutat este $7! - 6! (= 6!\,6)$.

Să le numărăm pe cele pare dintre acestea:

- cu 0 ultima cifră: $6!$ (cuvinte = numere)

$\underbrace{\qquad\qquad}_{6 \text{ cifre distincte}}\ 0$

- cu ultima cifră 2, 4 sau 6: $5!\cdot 5 = 6! - 5!$

$\Longrightarrow$ nr. căutat este $6! + 3(6! - 5!) = \dots$

c) Numărăm cuvinte de lungime 4 peste A, cu componentele distincte, adică aranjamente ...

$\rightarrow$ cuvinte de lungime 4 peste A, cu componentele distincte $\rightarrow A_7^4$

$\rightarrow$ cuvinte de lungime 4 peste A, cu componentele distincte care încep cu 0 $\rightarrow$

$\rightarrow$ în nr. de A_6^3

Nr. căutat este $A_7^4 - A_6^3$.

Să numărăm între acestea pe cele pare:

- cu ultima 0: A_6^3
- cu ultima cifră 2: $A_6^3 - A_5^2$
- — " — 4: — " —
- — " — 6: — " —

$\Longrightarrow$ nr. căutat este $A_6^3 + 3(A_6^3 - A_5^2) = \dots$

d) Temă

e) I) Ordinea cifrelor este strict descrescătoare:

Odată ce alegem 4 cifre din A ele vor fi așezate în nr. format în ordinea impusă $\Longrightarrow$ noi formăm cu elem. din A submulțimi cu 4 elemente $\Longrightarrow$

$\Rightarrow$ nr. căutat este C_7^4.

- Dintre acestea sunt pare: $C_6^3 + C_4^3$
  - cu 0 ultima cifră: C_6^3
  - cu 2 ultima cifră: C_4^3 ← cifrele pe care le vom folosi sunt 3, 4, 5, 6
  - cu 4 — " — : 0
  - 6 — " — : 0

II) Ordinea cifrelor este strict crescătoare

Formăm submulțimi cu 4 elemente din $A \setminus \{0\}$ și aranjăm cifrele în ordinea impusă $\Rightarrow$ nr. căutat este C_6^4

- Dintre acestea sunt pare: $1 + C_5^3 = \ldots$
  - cu 0 ultima cifră: 0
  - — " — 2 — " — : 0
  - — " — 4 — " — : $1 = C_3^3$
  - — " — 6 — " — : C_5^3

4. Fie $|A| = n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$. Atunci:

$$C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = (1+1)^n = 2^n \qquad (1)$$

$$C_n^0 - C_n^1 + \ldots = (1-1)^n = 0 \qquad (2)$$

$(1)+(2) \Longrightarrow C_n^0 + C_n^2 + \ldots = 2^{n-1}$ ← nr. submulțimilor lui A cu nr. par de elemente

coincid

$(1)-(2) \Longrightarrow C_n^1 + C_n^3 + \ldots = 2^{n-1}$ ← nr. submulțimilor lui A cu nr. impar de elemente

5. Pentru un polinom (sau pentru o expresie polinomială) suma coeficienților se obține înlocuind nedeterminata (resp. variabilele) cu 1. Prin urmare, suma coef. dezvoltării $(2x-3)^{2023}$ este $(2\cdot 1-3)^{2023} = (-1)^{2023} = -1$.

Obs: A se face distincție într-o dezvoltare binomială între suma coef. binomiali $(C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n)$ și suma coef. dezvoltării.