

Geometrie analitică

Coordonator

Lect. univ. dr. Daniel VĂCĂREȚU

2018

Cuprins

Partea 1. Geometrie analitică plană	5
Capitolul 1. Ecuatiile carteziane ale dreptelor în raport cu un reper ortonormat în plan (dreapta definită prin punct și vector director, dreapta definită prin două puncte, dreapta prin tăieturi)	7
1.1. Dreapta definită prin punct și vector director	7
1.2. Dreapta definită prin două puncte distincte	8
1.3. Unghiul dintre două drepte	10
1.4. Distanța de la un punct la o dreaptă	12
Capitolul 2.	15
2.1. Cercul	15
2.2. Elipsa	16
2.3. Hiperbola	17
2.4. Parabola	18
Partea 2. Geometrie analitică în spațiu	21
Capitolul 1. Ecuatiile carteziane ale dreptei în spațiu în raport cu un reper ortonormat (dreapta definită prin punct și vector director, dreapta definită prin două puncte distincte, dreapta definită ca intersecție de două plane)	23
1.1. Dreapta definită prin punct și vector director	23
1.2. Dreapta definită prin două puncte distincte	24
1.3. Dreapta definită ca intersecție de două plane	25

1.4. Distanța de la un punct la o dreaptă în spațiu. Aria unui triunghi în spațiu	26
Capitolul 2. Ecuațiile carteziane ale planului	29
2.1. Ecuația carteziană a planului prin punct și doi vectori directori	29
2.2. Ecuația carteziană a planului prin trei puncte distincte, necoliniare	30
2.3. Ecuația carteziană a planului prin tăieturi	31
2.4. Distanța de la un punct la un plan	32
2.5. Perpendiculara comună a două drepte necoplanare	33
2.6. Distanța dintre două drepte necoplanare	34
2.7. Unghiul dintre două drepte în spațiu	35
2.8. Unghiul dintre o dreaptă și un plan	35
2.9. Unghiul dintre două plane	36
2.10. Sfera	36
2.11. Probleme propuse	38
Bibliografie	43

Partea 1

Geometrie analitică plană

CAPITOLUL 1

Ecuatiile carteziene ale dreptelor în raport cu un reper ortonormat în plan (dreapta definită prin punct și vector director, dreapta definită prin două puncte, dreapta prin tăieturi)

1.1. Dreapta definită prin punct și vector director

Fie reperul cartezian ortonormat $\mathcal{R}\{0; \vec{i}, \vec{j}\}$ în plan. Fie d o dreaptă în plan care are un vector director \vec{d} de componente p și q , adică

$$\vec{d} = p\vec{i} + q\vec{j}$$

($\vec{d} \neq \vec{0}$, adică p și q nu sunt nule simultan). Pe dreapta d se consideră un punct fixat M_0 de coordonate (x_0, y_0) și un punct variabil M de coordonate (x, y) .

Fie \vec{r}_M și \vec{r}_{M_0} vectorii de poziție ai punctelor M și M_0 față de originea O .

Ecuția vectorială a dreptei d este:

$$d: \vec{r}_M = \vec{r}_{M_0} + \lambda\vec{d}, \text{ unde } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Propoziție. Ecuția carteziană a dreptei d în raport cu reperul $\mathcal{R}\{0; \vec{i}, \vec{j}\}$ este:

$$\frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q}.$$

Demonstrație. Ecuția vectorială a dreptei $d: \vec{r}_M = \vec{r}_{M_0} + \lambda\vec{d}$ se transcrie astfel:

$$x\vec{i} + y\vec{j} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + \lambda(p\vec{i} + q\vec{j}).$$

Deoarece versorii \vec{i} și \vec{j} sunt liniar independenți, avem:

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda p \\ y = y_0 + \lambda q \end{cases}$$

Acestea sunt ecuațiile parametrice ale dreptei d . Eliminând λ între cele două ecuații, avem:

$$\frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q}.$$

Observație. Dacă unul dintre numerele reale p sau q este zero atunci nu se poate face împărțirea cu el. Să presupunem că $p = 0$. Atunci din ecuațiile parametrice rezultă $x = x_0$ (și y variabil). Aceasta este ecuația unei drepte paralele cu axa Oy . Analog $y = y_0$ este ecuația unei drepte paralele cu axa Ox .

Observație. Dacă $p \neq 0$, ecuația dreptei d se poate scrie:

$$y - y_0 = \frac{q}{p}(x - x_0).$$

Dacă notăm cu $m = \frac{q}{p}$, ecuația devine:

$$y - y_0 = m(x - x_0).$$

m se numește panta dreptei d și este egală cu $\operatorname{tg} \alpha$, unde α este unghiul dintre axa Ox și dreapta d .

1.2. Dreapta definită prin două puncte distincte

Fie dreapta d în planul xOy , raportată la reperul ortonormat $\mathcal{R}\{0; \vec{i}, \vec{j}\}$. Se consideră pe dreapta d punctele distincte fixate M_1 și M_2 de coordonate (x_1, y_1) respectiv (x_2, y_2) și punctul variabil M de coordonate (x, y) .

Ecuația vectorială a dreptei d este:

$$\vec{r}_M = \vec{r}_{M_1} + \alpha(\vec{r}_{M_2} - \vec{r}_{M_1}).$$

Propoziție. Ecuația carteziană a dreptei d este:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Demonstrație. Ecuația vectorială a dreptei se explicitază astfel:

$$x \vec{i} + y \vec{j} = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + \alpha(x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} - x_1 \vec{i} - y_1 \vec{j}) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = x_1 + \alpha(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + \alpha(y_2 - y_1) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Observație. Dacă $x_2 - x_1 = 0$ atunci ecuația dreptei este $x = x_1$ și reprezintă o dreaptă paralelă cu axa Oy , iar dacă $y_2 - y_1 = 0$, atunci ecuația dreptei este $y = y_1$ și reprezintă o dreaptă paralelă cu axa Ox .

Dacă $x_2 - x_1 \neq 0$ atunci ecuația dreptei este

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

și atunci panta dreptei d este

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Observație. Ecuația dreptei date prin două puncte distincte

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

se poate scrie în mod echivalent:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Observație. Dacă punctul $M_3(x_3, y_3)$ aparține dreptei d determinată de punctele distincte $M_1(x_1, y_1)$ și $M_2(x_2, y_2)$ atunci coordonatele punctului M_3 verifică ecuația dreptei M_1M_2 , deci avem:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Aceasta este condiția de coliniaritate a punctelor M_1, M_2, M_3 .

Observație. Dacă dreapta d intersectează axa Ox în punctul $A(a, 0)$ și axa Oy în punctul $B(0, b)$, atunci ecuația dreptei $d = AB$ se scrie:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & 0 & 1 \\ 0 & b & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Această ecuație se numește ecuația dreptei prin tăieturi.

1.3. Unghiul dintre două drepte

Definiție. Unghiul dintre două drepte plane este prin definiție unghiul dintre vectorii lor directori.

Propoziție. Dacă dreptele d_1 și d_2 au vectorii directori $\vec{d}_1(p_1, q_1)$ și $\vec{d}_2(p_2, q_2)$, atunci

$$\cos(\widehat{d_1, d_2}) = \frac{p_1 p_2 + q_1 q_2}{\sqrt{p_1^2 + q_1^2} \cdot \sqrt{p_2^2 + q_2^2}}.$$

Demonstrație. Din definiția produsului scalar avem:

$$\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2 = \|\vec{d}_1\| \cdot \|\vec{d}_2\| \cdot \cos(\widehat{d_1, d_2}).$$

Explicitând produsul scalar și normele, adică:

$$\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2 = p_1 p_2 + q_1 q_2 \quad \text{și} \quad \|\vec{d}_1\| = \sqrt{p_1^2 + q_1^2}, \quad \|\vec{d}_2\| = \sqrt{p_2^2 + q_2^2},$$

rezultă formula care permite calculul cosinusului unghiului dintre două drepte.

Propoziție. Dacă dreptele d_1 și d_2 sunt date prin punct și pantă, adică:

$$d_1 : y - y_1 = m_1(x - x_1) \Leftrightarrow y = m_1 x + n_1$$

$$d_2 : y - y_2 = m_2(x - x_2) \Leftrightarrow y = m_2 x + n_2$$

atunci

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

unde θ este unghiul dintre cele două drepte.

Demonstrație. $\theta = \alpha_2 - \alpha_1$

$$\operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1}{1 + \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}.$$

Propoziție. (a) Dacă dreptele d_1 și d_2 sunt date prin punct și vector director, adică:

$$d_1 : \frac{x - x_1}{p_1} = \frac{y - y_1}{q_1}$$

$$d_2 : \frac{x - x_2}{p_2} = \frac{y - y_2}{q_2}$$

atunci

$$d_1 \parallel d_2 \Leftrightarrow \frac{p_1}{p_2} = \frac{q_1}{q_2}.$$

(b) Dacă dreptele d_1 și d_2 sunt date prin punct și pantă, adică:

$$d_1 : y = m_1 x + n_1$$

$$d_2 : y = m_2 x + n_2$$

atunci $d_1 \parallel d_2 \Leftrightarrow m_1 = m_2$.

Demonstrație. (a) $d_1 \parallel d_2 \Leftrightarrow \vec{d}_1 \parallel \vec{d}_2 \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^*$ astfel încât

$$\vec{d}_1 = \lambda \vec{d}_2 \Leftrightarrow p_1 \vec{i} + q_1 \vec{j} = \lambda(p_2 \vec{i} + q_2 \vec{j}) \Leftrightarrow$$

$$p_1 = \lambda p_2 \text{ și } q_1 = \lambda q_2 \Leftrightarrow \frac{p_1}{p_2} = \frac{q_1}{q_2}.$$

(b) $d_1 \parallel d_2 \Leftrightarrow \theta = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} \theta = 0 \Leftrightarrow m_1 = m_2$.

Propoziție. (a) Dacă dreptele d_1 și d_2 sunt date prin punct și vector director, adică

$$d_1 : \frac{x - x_1}{p_1} = \frac{y - y_1}{q_1}$$

$$d_2 : \frac{x - x_2}{p_2} = \frac{y - y_2}{q_2}$$

atunci $d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow p_1 p_2 + q_1 q_2 = 0$.

(b) Dacă dreptele d_1 și d_2 sunt date prin punct și pantă, adică

$$d_1 : y = m_1 x + n_1$$

$$d_2 : y = m_2 x + n_2$$

atunci $d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow m_1 m_2 + 1 = 0$.

Demonstrație. (a) $d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow \cos(\widehat{\vec{d}_1, \vec{d}_2}) = 0 \Leftrightarrow p_1p_2 + q_1q_2 = 0$.
 (b) $d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \operatorname{ctg} \theta = 0 \Leftrightarrow m_1m_2 + 1 = 0$.

1.4. Distanța de la un punct la o dreaptă

Fie $M_0(x_0, y_0)$ un punct și d o dreaptă dată prin ecuația carteziană generală

$$d : ax + by + c = 0.$$

Observație. Ecuația dreptei d poate fi adusă la această formă generală, prin calcule directe în toate cazurile prezentate înainte, adică dreapta prin punct și vector director, dreapta prin două puncte distincte și cazul particular, dreapta prin tăieturi. Desigur coeficienții a și b din această ecuație nu sunt aceiași ca în cazul dreptei prin tăieturi.

Propoziție. Distanța de la punctul M_0 la dreapta d este

$$d(M_0, d) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Demonstrație. Panta dreptei d este

$$m_d = -\frac{a}{b}.$$

Atunci panta perpendicularei d' din M_0 pe d este

$$m_{d'} = \frac{b}{a},$$

deci ecuația perpendicularei din M_0 pe d este:

$$d' : y - y_0 = \frac{b}{a}(x - x_0).$$

Coordonatele piciorului perpendicularei din M_0 pe dreapta d , punctul M' , se obțin rezolvând sistemul format din ecuațiile dreptelor d și d'

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 & (d) \\ y - y_0 = \frac{b}{a}(x - x_0) & (d') \end{cases}$$

Se obține:

$$x_{M'} = \frac{b^2x_0 - aby_0 - ac}{a^2 + b^2}$$

$$y_{M'} = \frac{-abx_0 + a^2y_0 - bc}{a^2 + b^2}$$

(după efectuarea unor calcule elementare).

Distanța de la punctul M_0 la dreapta d este distanța dintre punctele M_0 și M' , adică

$$d(M_0, d) = d(M_0, M') = \sqrt{(x_{M'} - x_{M_0})^2 + (y_{M'} - y_{M_0})^2} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

(după efectuarea unor calcule elementare).

Aria triunghiului. Fie $M_i(x_i, y_i)$, $i = \overline{1, 3}$, trei puncte necoliniare în planul xOy .

Propoziție. *Aria triunghiului determinat de punctele necoliniare M_i , $i = \overline{1, 3}$, este:*

$$\sigma[M_1M_2M_3] = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{array}{ccc} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{array} \right|.$$

Demonstrație. Ecuația dreptei M_2M_3 este:

$$\left| \begin{array}{ccc} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{array} \right| = 0.$$

Aria triunghiului $M_1M_2M_3$ este:

$$\begin{aligned} \sigma[M_1M_2M_3] &= \frac{1}{2} \cdot M_2M_3 \cdot d(M_1, M_2M_3) \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2} \cdot \left| \begin{array}{ccc} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{array} \right| \cdot \frac{1}{\sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}} \\ &= \frac{1}{2} \left| \begin{array}{ccc} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{array} \right|. \end{aligned}$$

CAPITOLUL 2

2.1. Cercul

Definiție. Cercul este locul geometric al punctelor din plan egal depărtate de un punct fix, numit centrul cercului. Distanța de la orice punct al cercului la centru se numește raza cercului și se notează în general cu R .

Propoziție. *Ecuatia carteziană a cercului cu centrul în punctul $C(a, b)$ și de rază R este:*

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2.$$

Demonstrație. Fie punctul oarecare $M(x, y)$ al cercului. Avem $CM = R$, din definiție. Rezultă:

$$\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = R^2$$

sau

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2.$$

Observație. Ecuatia cercului se mai poate scrie:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R^2 = 0$$

sau

$$x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0$$

unde s-a notat:

$$m = -2a$$

$$n = -2b$$

$$p = a^2 + b^2 - R^2.$$

2.2. Elipsa

Fie c un număr real pozitiv și F, F' două puncte fixate în plan (distincte) astfel încât $FF' = 2c$. Fie $a \in \mathbb{R}$, $a > c$.

Definiție. Mulțimea E a punctelor M cu proprietatea că

$$MF + MF' = 2a$$

se numește elipsă.

Observație. Dacă $c = 0$, atunci elipsa se reduce la cercul de rază a .

Propoziție. Punctul $M(x, y)$ aparține elipsei E dacă și numai dacă

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ unde } b^2 = a^2 - c^2.$$

Demonstrație. Alegem originea reperului în mijlocul segmentului FF' , axa Ox fiind OF' , iar axa Oy fiind mediatoarea segmentului FF' . Avem: $F(-c, 0)$, $F'(c, 0)$.

$$M \in E \Leftrightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$$

Se trece un radical în membrul drept (de exemplu al doilea radical) și se ridică la pătrat fiecare membru al ecuației. Se obține:

$$4cx = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \Leftrightarrow$$

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx.$$

Se ridică din nou la pătrat și după efectuarea unor calcule elementare se obține:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1.$$

Deoarece $a > c > 0$, putem nota expresia pozitivă $a^2 - c^2$ cu b^2 . Rezultă ecuația canonică a elipsei:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

2.3. Hiperbola

Fie c un număr real strict pozitiv și F, F' două puncte fixate în plan (distincte) astfel încât $FF' = 2c$. Fie $a \in \mathbb{R}$, $a \in (0, c)$.

Definiție. Mulțimea H a punctelor M din plan cu proprietatea că

$$|MF - MF'| = 2a$$

se numește hiperbolă.

Propoziție. *Punctul $M(x, y)$ aparține hiperbolei H dacă și numai dacă:*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ unde } b^2 = c^2 - a^2.$$

Demonstrație. $M \in H \Leftrightarrow |MF - MF'| = 2a \Leftrightarrow$

$$MF - MF' = \pm 2a \Leftrightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a.$$

Am ales ca în cazul elipsei dreapta FF' drept axă Ox , O originea reperului cartezian fiind mijlocul segmentului FF' și mediatoarea segmentului FF' drept axă Oy . În aceste condiții punctele F și F' au coordonatele $(-c, 0)$ respectiv $(c, 0)$.

Se trece al doilea radical în membrul drept, se ridică la pătrat și se obține:

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = x^2 - 2cx + c^2 + y^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + 4a^2.$$

După efectuarea calculelor și după o altă ridicare la pătrat se obține ecuația hiperbolei:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

unde am notat expresia pozitivă $c^2 - a^2$ cu b^2 .

Observație. Punctele F și F' se numesc focare, atât în cazul elipsei cât și în cazul hiperbolei.

Observație. Hiperbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

are ca asimptote oblice dreptele:

$$y = \pm \frac{b}{a}x.$$

2.4. Parabola

Fie h o dreaptă în plan și F un punct care nu aparține lui h .

Definiție. Mulțimea \mathcal{P} a punctelor M din plan cu proprietatea că

$$d(M, h) = MF$$

se numește parabolă.

Punctul F se numește focarul parabolei, dreapta h se numește directoarea parabolei iar MF se numește raza focală corespunzătoare punctului M .

Fie A proiecția focarului F pe directoarea h și O mijlocul segmentului $[AF]$. Alegem ca axă Ox semidreapta $[OF]$, iar ca axă Oy mediatoarea segmentului AF . Notăm cu p lungimea segmentului $[AF]$. Acest număr real pozitiv p se numește parametrul parabolei.

Propoziție. Punctul $M(x, y)$ aparține parabolei dacă și numai dacă

$$y^2 = 2px.$$

Demonstrație. $M \in \mathcal{P} \Leftrightarrow d(M, h) = MF \Leftrightarrow$

$$d^2(M, h) = MF^2 \Leftrightarrow \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 \Leftrightarrow y^2 = 2px.$$

Tangenta într-un punct la parabolă. Propoziție. Fie parabola de ecuație $y^2 = 2px$ și $M_0(x_0, y_0)$ un punct al parabolei. Tangenta la parabolă în punctul M_0 are ecuația:

$$yy_0 = p(x + x_0).$$

Demonstrație. $y^2 = 2px \Rightarrow y = \pm\sqrt{2px}$

Ecuația generală a tangentei la curba $y = f(x)$ în punctul (x_0, y_0) unde $y_0 = f(x_0)$ este:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

În cazul parabolei avem

$$f'(x_0) = \pm \frac{\sqrt{2p}}{2\sqrt{x_0}} = \frac{p}{y_0}.$$

Deci ecuația tangentei este:

$$y - y_0 = \frac{p}{y_0}(x - x_0) \Leftrightarrow yy_0 = p(x + x_0).$$

Teoremă. (Proprietatea optică a parabolei) *Tangenta și normala la parabolă într-un punct M al ei sunt bisectoarele unghiului format de raza focală M_0F și paralela la axa Ox dusă prin punctul M_0 .*

Demonstrație. Fie $B\left(-\frac{p}{2}, y_0\right)$ punctul de intersecție al directoarei h cu paralela dusă prin M_0 la axa Ox . Din definiția parabolei rezultă că triunghiul M_0BF este isoscel, deci pentru a demonstra că tangenta în M_0 este bisectoarea unghiului $\widehat{BM_0F}$ este suficient să demonstrăm că tangenta este mediana corespunzătoare laturii BF .

Ecuația tangentei în M_0 este

$$yy_0 = p(x + x_0).$$

Mijlocul lui BF are coordonatele $\left(0, \frac{y_0}{2}\right)$ și se verifică imediat că aceste coordonate verifică ecuația tangentei.

Partea 2

Geometrie analitică în spațiu

CAPITOLUL 1

Ecuatiile carteziene ale dreptei în spațiu în raport cu un reper ortonormat (dreapta definită prin punct și vector director, dreapta definită prin două puncte distincte, dreapta definită ca intersecție de două plane)

1.1. Dreapta definită prin punct și vector director

Fie reperul cartezian ortonormat $\mathcal{R}\{0; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ în spațiu. Fie d o dreaptă în spațiu care are un vector director \vec{d} de componente p, q și r , adică

$$\vec{d} = p\vec{i} + q\vec{j} + r\vec{k}$$

($\vec{d} = \vec{0}$, adică p, q, r nu sunt nule simultan).

Pe dreapta d se consideră un punct fixat M_0 de coordonate (x_0, y_0, z_0) și un punct variabil M de coordonate (x, y, z) .

Fie \vec{r}_M și \vec{r}_{M_0} vectorii de poziție ai punctelor M și M_0 față de originea O .

Ecuția vectorială a dreptei d este

$$d: \vec{r}_M = \vec{r}_{M_0} + \lambda \vec{d}, \text{ unde } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Propoziție. Ecuatiile carteziene ale dreptei d în raport cu reperul $\mathcal{R}\{0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ sunt:

$$\frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q} = \frac{z - z_0}{r}.$$

Demonstrație. Ecuția vectorială a dreptei d

$$\vec{r}_M = \vec{r}_{M_0} + \lambda \vec{d}$$

se transcrie astfel:

$$x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k} = x_0 \vec{i} + y_0 \vec{j} + z_0 \vec{k} + \lambda(p \vec{i} + q \vec{j} + r \vec{k}).$$

Deoarece versorii $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sunt liniar independenți avem:

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda p \\ y = y_0 + \lambda q \\ z = z_0 + \lambda r \end{cases}$$

Acestea sunt ecuațiile parametrice ale dreptei d . Eliminând parametrul λ între cele trei ecuații avem:

$$\frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q} = \frac{z - z_0}{r}.$$

1.2. Dreapta definită prin două puncte distincte

Fie dreapta d în spațiul trei-dimensional și fie reperul ortonormat $\mathcal{R} = \{0; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

Considerăm punctele fixate, distincte, pe dreapta d , $M_1(x_1, y_1, z_1)$ și $M_2(x_2, y_2, z_2)$ și punctul variabil $M(x, y, z)$ aparținând dreptei d .

Propoziție. *Ecuațiile carteziene ale dreptei d sunt:*

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Demonstrație. Punctele distincte M_1 și M_2 de pe dreapta d determină un vector director

$$\overrightarrow{M_1 M_2} = (x_2 - x_1) \vec{i} + (y_2 - y_1) \vec{j} + (z_2 - z_1) \vec{k}$$

al dreptei d .

Deci, conform propoziției anterioare, ecuațiile parametrice ale dreptei d sunt:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

1.3. Dreapta definită ca intersecție de două plane

Fie planele π_1 și π_2 de ecuații:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Propoziție. *Mulțimea de intersecție a celor două plane poate fi: o dreaptă, un plan sau mulțimea vidă.*

Demonstrație. Sistemul format cu cele două ecuații de plane are matricea:

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}$$

și matricea extinsă:

$$\overline{M} = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & -D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & -D_2 \end{pmatrix}.$$

Conform teoremei lui Kronecker-Capelli, sistemul este compatibil dacă și numai dacă rangul matricei sistemului este egal cu rangul matricei extinse. Avem următoarele cazuri:

(i) $\text{rang } M = \text{rang } \overline{M} = 1$, ceea ce este echivalent cu

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2},$$

atunci planele coincid, deci $\pi_1 \cap \pi_2$ este un plan.

(ii) $\text{rang } M = 1$, $\text{rang } \overline{M} = 2$, ceea ce este echivalent cu

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2},$$

atunci sistemul este incompatibil, deci π_1 este paralel cu π_2 (intersecția este vidă).

(iii) $\text{rang } M = 2$ ceea ce implică și $\text{rang } \overline{M} = 2$, atunci sistemul este compatibil și intersecția celor două plane este o dreaptă.

Deci, să reținem că o altă modalitate de a descrie analitic o dreaptă în spațiu este prin intersecția a două plane, adică printr-un sistem de

tipul:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

cu proprietatea că rangul matricei sistemului este egal cu 2.

Observație. Descrierea analitică a dreptei ca intersecție de două plane nu scoate în evidență un punct și un vector director al dreptei. Pentru a obține un vector director al dreptei avem următoarea propoziție.

Propoziție. Fie dreapta d dată prin intersecția a două plane:

$$d: \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

Atunci ecuațiile drepte sunt:

$$\frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q} = \frac{z - z_0}{r},$$

unde (x_0, y_0, z_0) este o soluție particulară a sistemului, iar

$$p = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \quad q = \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \quad r = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}.$$

Demonstrație. Orice punct de pe dreaptă are coordonatele:

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda p \\ y = y_0 + \lambda q \\ z = z_0 + \lambda r \end{cases}$$

Printr-un calcul elementar și direct se introduc aceste coordonate în ecuațiile celor două plane și se arată că aceste ecuații sunt verificate.

1.4. Distanța de la un punct la o dreaptă în spațiu. Aria unui triunghi în spațiu

1.4.1. Aria unui triunghi în spațiu. Fie punctele $M_i(x_i, y_i, z_i)$, $i = \overline{1, 3}$, necoliniare, în spațiul trei-dimensional.

Propoziție. Aria triunghiului $M_1M_2M_3$ este:

$$\sigma[M_1M_2M_3] = \frac{1}{2} \cdot \|\overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3}\|.$$

Demonstrație. Vectorii $\overrightarrow{M_1M_2}$ și $\overrightarrow{M_1M_3}$ sunt necoliniari și determină un paralelogram având ca laturi adiacente cei doi vectori. Din interpretarea geometrică a normei produsului vectorial avem că aria acestui paralelogram este $\|\overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3}\|$.

Triunghiul $M_1M_2M_3$ are aria jumătate din aria acestui paralelogram, de unde rezultă concluzia.

Observație. Ținând cont că produsul vectorial $\overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3}$ are expresia analitică:

$$\overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix},$$

rezultă că aria triunghiului $M_1M_2M_3$ are următoarea expresie analitică (în funcție de coordonatele punctelor M_i):

$$\sigma[M_1M_2M_3] = \frac{1}{2} \sqrt{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_2 - z_1 & x_2 - x_1 \\ z_3 - z_1 & x_3 - x_1 \end{vmatrix}^2}.$$

1.4.2. Distanța de la un punct la o dreaptă în spațiu. Fie punctele $M_i(x_i, y_i, z_i)$, $i = \overline{1, 3}$, în spațiu.

Propoziție. Distanța de la punctul M_1 la dreapta M_2M_3 se calculează după formula:

$$d(M_1, M_2M_3) = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_2 - z_1 & x_2 - x_1 \\ z_3 - z_1 & x_3 - x_1 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 + (z_2 - z_3)^2}}.$$

Demonstrație. Distanța de la punctul M_1 la dreapta M_2M_3 este înălțimea triunghiului $M_1M_2M_3$, dusă din vârful M_1 . Deci

$$d(M_1, M_2M_3) = 2 \cdot \frac{\sigma[M_1M_2M_3]}{M_2M_3},$$

de unde rezultă concluzia.

Ecuatiile carteziene ale planului

2.1. Ecuatia carteziană a planului prin punct și doi vectori directori

Fie $\mathcal{R} = \{0; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ un reper cartezian ortonormat în spațiu, M_0 un punct fixat în planul π , de coordonate (x_0, y_0, z_0) , \vec{d}_1 și \vec{d}_2 doi vectori nenuli și necoliniari de componente (p_1, q_1, r_1) și (p_2, q_2, r_2) situați în planul π (sau paraleli cu planul π).

Propoziție. *Planul π are ecuația carteziană:*

$$\pi : \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Demonstrație. Ecuatia vectorială a planului determinat de punctul fixat M_0 și vectorii nenuli și necoliniari \vec{d}_1 și \vec{d}_2 este:

$$\vec{r}_M = \vec{r}_{M_0} + \alpha \vec{d}_1 + \beta \vec{d}_2,$$

unde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ și M este un punct variabil în plan. Transcriind vectorii pe componente, obținem:

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha p_1 + \beta p_2 \\ y = y_0 + \alpha q_1 + \beta q_2 \\ z = z_0 + \alpha r_1 + \beta r_2 \end{cases}$$

Acestea sunt ecuațiile parametrice ale planului π . Interpretând acest sistem ca un sistem liniar de trei ecuații cu două necunoscute α și β , atunci trebuie ca rangul matricei sistemului să fie egal cu rangul matricei extinse.

Matricea sistemului este:

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ q_1 & q_2 \\ r_1 & r_2 \end{pmatrix} \text{ și } \text{rang } \mathcal{M} = 2$$

(pentru că $\text{rang } \mathcal{M} = 1$ ar însemna că vectorii sunt coliniari, adică există $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât $\vec{d}_1 = \lambda \vec{d}_2$, ceea ce este în contradicție cu ipoteza).

Deci și $\text{rang } \overline{\mathcal{M}} = 2$, unde

$$\overline{\mathcal{M}} = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & x - x_0 \\ q_1 & q_2 & y - y_0 \\ r_1 & r_2 & z - z_0 \end{pmatrix}.$$

Dar $\text{rang } \overline{\mathcal{M}} = 2 \Leftrightarrow \det \overline{\mathcal{M}} = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix} = 0.$$

2.2. Ecuația carteziană a planului prin trei puncte distincte, necoliniare

Fie $M_i(x_i, y_i, z_i)$, $i = \overline{1, 3}$ trei puncte distincte, necoliniare, în spațiul trei-dimensional raportat la reperul cartezian $\mathcal{R} = \{0; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

Propoziție. Planul π determinat de punctele M_i , $i = \overline{1, 3}$ are ecuația:

$$\pi : \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Demonstrație. Punctele necoliniare, distincte, M_i , $i = \overline{1, 3}$ determină doi vectori nenuli și necoliniari $\overrightarrow{M_1M_2}$ și $\overrightarrow{M_1M_3}$.

Componentele acestor vectori sunt:

$$(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) \text{ și } (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1).$$

Conform propoziției anterioare, ecuația planului este:

$$\pi : \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

2.3. Ecuația carteziană a planului prin tăieturi

Dacă se consideră punctele particulare: $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$ și $C(0, 0, c)$ atunci planul determinat de ele are ecuația:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$$

și este numită ecuația planului prin tăieturi, pentru că planul "taie" axele Ox , Oy și Oz în punctele A , B și C .

Într-adevăr, avem un caz particular de plan definit de trei puncte distincte și necoliniare și care are ecuația:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 & 1 \\ 0 & 0 & c & 1 \end{vmatrix} = 0$$

care după dezvoltarea determinantului devine:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Observație. Atât în cazul ecuației carteziene a planului prin punct și doi vectori directori cât și în cazul ecuației planului prin trei puncte distincte, după dezvoltarea determinantului din membrul drept se obține ecuația generală a planului:

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Interpretarea geometrică a coeficienților A , B și C este prezentată în cele ce urmează.

Fie planul π de ecuație $Ax + By + Cz + D = 0$, și fie un punct fixat $M_0(x_0, y_0, z_0)$ în planul π . Atunci coordonatele punctului M_0 verifică ecuația planului, adică:

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0.$$

Scăzând din ecuația planului această identitate, rezultă:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Această relație exprimă perpendicularitatea a doi vectori: $\vec{n}(A, B, C)$ și $\overrightarrow{M_0M}(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ (produsul lor scalar fiind nul).

Din punct de vedere geometric, rezultă că vectorul $\vec{n}(A, B, C)$ este perpendicular pe planul π pentru că este perpendicular pe orice vector variabil $\overrightarrow{M_0M}$ din planul π .

Vectorul $\vec{n}(A, B, C)$ se numește vector normal al planului, iar ecuația:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

se numește ecuația carteziană a planului definit de punctul fixat $M_0(x_0, y_0, z_0)$ și de vectorul normal $\vec{n}(A, B, C)$.

2.4. Distanța de la un punct la un plan

Fie planul π de ecuație $Ax + By + Cz + D = 0$ și punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ care nu aparține planului π . Fie M' proiecția ortogonală a punctului M_0 pe planul π și

$$\overrightarrow{M'M''} = \frac{1}{\|\vec{n}\|} \cdot \vec{n} = \vec{n}_0,$$

versorul lui \vec{n} . Numărul real δ determinat prin relația:

$$\overrightarrow{M'M_0} = \delta \cdot \vec{n}_0$$

se numește distanța orientată de la punctul M_0 la planul π .

Dacă M_0 se găsește în același semispațiu cu M'' atunci $\delta > 0$ iar dacă M_0 este în celălalt semispațiu, atunci $\delta < 0$.

Înmulțim scalar relația $\overrightarrow{M'M_0} = \delta \cdot \vec{n}_0$ cu \vec{n}_0 și rezultă:

$$\begin{aligned} \delta &= \vec{n}_0 \cdot \overrightarrow{M'M_0} = \frac{1}{\|\vec{n}\|} \cdot \vec{n} \cdot (\overrightarrow{A_1M_0} - \overrightarrow{A_1M'}) \\ &= \frac{1}{\|\vec{n}\|} \cdot \vec{n} \cdot \overrightarrow{A_1M_0} = \frac{A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) + C(z_0 - z_1)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \\ &= \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \end{aligned}$$

unde $A_1(x_1, y_1, z_1)$ este un punct oarecare al planului π .

Numărul real pozitiv

$$d = |\delta| = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

este distanța de la punctul M_0 la planul π .

2.5. Perpendiculara comună a două drepte necoplanare

Fie dreptele necoplanare

$$d_i : \frac{x - x_i}{p_i} = \frac{y - y_i}{q_i} = \frac{z - z_i}{r_i}, \quad i = \overline{1, 2}.$$

Definiție. Perpendiculara comună a celor două drepte este dreapta care intersectează cele două drepte și este perpendiculară pe fiecare dintre ele.

Propoziție. *Ecuatiile perpendiculararei comune a dreptelor d_1 și d_2 sunt:*

$$d : \left\{ \begin{array}{l} \left| \begin{array}{ccc} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ \left| \begin{array}{cc} q_1 & r_1 \\ q_2 & r_2 \end{array} \right| & \left| \begin{array}{cc} r_1 & p_1 \\ r_2 & p_2 \end{array} \right| & \left| \begin{array}{cc} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{array} \right| \end{array} \right| = 0 \\ \left| \begin{array}{ccc} x - x_2 & y - y_2 & z - z_2 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ \left| \begin{array}{cc} q_1 & r_1 \\ q_2 & r_2 \end{array} \right| & \left| \begin{array}{cc} r_1 & p_1 \\ r_2 & p_2 \end{array} \right| & \left| \begin{array}{cc} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{array} \right| \end{array} \right| = 0 \end{array} \right.$$

Demonstrație. Perpendiculara comună d are ca vector director vectorul

$$\vec{d} = \vec{d}_1 \times \vec{d}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix}.$$

Dreapta d este definită ca intersecția dintre planele π_1 și π_2 definite de dreptele d_1 și d respectiv de d_2 și d .

Ecuția planului π_1 se scrie în varianta prin punct și doi vectori directori adică prin punctul $M_1(x_1, y_1, z_1) \in d_1$ și prin vectorii $\vec{d}_1(p_1, q_1, r_1)$ și $\vec{d} = \vec{d}_1 \times \vec{d}_2$.

Analog se scrie ecuația planului π_2 , de unde rezultă sistemul de ecuații al dreptei d .

2.6. Distanța dintre două drepte necoplanare

Definiție. Distanța dintre două drepte necoplanare din spațiu este lungimea segmentului de pe perpendiculara comună, cuprins între cele două drepte.

Propoziție. Fiind date dreptele necoplanare

$$d_1 : \frac{x - x_1}{p_1} = \frac{y - y_1}{q_1} = \frac{z - z_1}{r_1}$$

$$d_2 : \frac{x - x_2}{p_2} = \frac{y - y_2}{q_2} = \frac{z - z_2}{r_2},$$

distanța dintre dreptele d_1 și d_2 este:

$$d(d_1, d_2) = \frac{|(\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{d}_1, \vec{d}_2)|}{\|\vec{d}_1 \times \vec{d}_2\|},$$

unde $M_1(x_1, y_1, z_1)$ este un punct oarecare pe dreapta d_1 , $M_2(x_2, y_2, z_2)$ este un punct oarecare pe dreapta d_2 și vectorii directori ai dreptelor d_1 și d_2 sunt $\vec{d}_1(p_1, q_1, r_1)$ și $\vec{d}_2(p_2, q_2, r_2)$.

Demonstrație. Se demonstrează ușor că distanța dintre dreptele d_1 și d_2 este înălțimea paralelipipedului construit pe vectorii \vec{d}_1 , \vec{d}_2 și $\overrightarrow{M_1M_2}$.

Volumul acestui paralelipiped este modulul produsului mixt al celor trei vectori, adică:

$$|(\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{d}_1, \vec{d}_2)| = \left| \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix} \right|$$

iar aria bazei este aria paralelogramului construit pe vectorii \vec{d}_1 și \vec{d}_2 , adică: $\|\vec{d}_1 \times \vec{d}_2\|$, unde

$$\vec{d}_1 \times \vec{d}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix}.$$

2.7. Unghiul dintre două drepte în spațiu

Definiție. Unghiul dintre două drepte în spațiu este unghiul dintre doi vectori directori ai lor.

Fie dreptele d_1 și d_2 având ca vectori directori $\vec{d}_1(p_1, q_1, r_1)$ și $\vec{d}_2(p_2, q_2, r_2)$.

Din definiția produsului scalar a doi vectori avem:

$$\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2 = \|\vec{d}_1\| \cdot \|\vec{d}_2\| \cdot \cos(\widehat{\vec{d}_1, \vec{d}_2}).$$

Rezultă

$$\cos(\widehat{\vec{d}_1, \vec{d}_2}) = \frac{\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2}{\|\vec{d}_1\| \cdot \|\vec{d}_2\|} = \frac{p_1 p_2 + q_1 q_2 + r_1 r_2}{\sqrt{p_1^2 + q_1^2 + r_1^2} \cdot \sqrt{p_2^2 + q_2^2 + r_2^2}}.$$

2.8. Unghiul dintre o dreaptă și un plan

Definiție. Unghiul dintre o dreaptă și un plan este unghiul dintre acea dreaptă și proiecția ei ortogonală pe plan.

Fie dreapta

$$d : \frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q} = \frac{z - z_0}{r}$$

și planul

$$\pi : Ax + By + Cz + D = 0.$$

Unghiul dintre dreapta d și planul π este complementul unghiului dintre vectorul director \vec{d} al dreptei d și vectorul normal \vec{n} al planului π .

Deci măsura unghiului dintre dreapta d și planul π este:

$$m(\widehat{d, \pi}) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \arccos \frac{\vec{d} \cdot \vec{n}}{\|\vec{d}\| \cdot \|\vec{n}\|} & \text{dacă } \vec{d} \cdot \vec{n} \geq 0 \\ \arccos \frac{\vec{d} \cdot \vec{n}}{\|\vec{d}\| \cdot \|\vec{n}\|} - \frac{\pi}{2} & \text{dacă } \vec{d} \cdot \vec{n} < 0. \end{cases}$$

2.9. Unghiul dintre două plane

Fie planele

$$\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Din definiție, unghiul dintre planele π_1 și π_2 este unghiul dintre vectorii lor normali. Deci cosinusul unghiului dintre două plane este:

$$\cos(\widehat{\pi_1, \pi_2}) = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}},$$

(adică $\frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{\|\vec{n}_1\| \cdot \|\vec{n}_2\|}$).

2.10. Sfera

Definiție. Se numește sferă locul geometric al punctelor din spațiu egal depărtate de un punct fixat numit centrul sferei.

Propoziție. Fie punctul fixat în spațiu $C(a, b, c)$. Atunci ecuația sferei cu centrul în C și de rază R este:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2.$$

Demonstrație. Fie $M(x, y, z)$ un punct variabil al sferei. Avem

$$CM = R \Leftrightarrow \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2} = R \Rightarrow$$

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2.$$

Ecuatia generală a sferei se mai poate scrie:

$$x^2 + y^2 + z^2 + mx + ny + pz + q = 0$$

unde am notat $m = -2a$, $n = -2b$, $p = -2c$, $q = a^2 + b^2 + c^2 - R^2$.

Intersecția unei sfere cu un plan

Propoziție. Fie sfera S de ecuație:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$$

și planul π de ecuație

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Atunci intersecția sferei S cu planul π este un cerc, un punct sau mulțimea vidă.

Demonstrație. Într-adevăr dacă distanța de la centrul sferei la planul π este mai mică strict decât R atunci intersecția este un cerc. Deci dacă:

$$\frac{|Aa + Bb + Cc + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} < R$$

atunci intersecția este cercul de ecuații:

$$\begin{cases} (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2 \\ Ax + By + Cz + D = 0 \end{cases}$$

Dacă distanța de la centrul sferei la plan este egală cu R , adică:

$$\frac{|Aa + Bb + Cc + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = R$$

atunci intersecția sferei S cu planul π este un punct.

În acest caz planul π este tangent sferei S .

Dacă

$$\frac{|Aa + Bb + Cc + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} > R,$$

atunci planul nu intersectează sfera.

2.11. Probleme propuse

1. Într-un reper cartezian xOy se consideră punctele $A(\alpha, 0)$ și $B(0, \beta)$ unde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

1. Calculați lungimea segmentului AB și coordonatele mijlocului acestuia.

2. Scrieți ecuația cercului circumscris triunghiului AOB .

3. Dacă punctele A, B sunt variabile, segmentul AB are lungimea constantă, iar M este un punct fix al acestuia, să se determine locul geometric al lui M . Studiați cazul în care M este mijlocul segmentului.

2. Se dă parabola de ecuație $y^2 = 2px$.

a) Să se scrie ecuația tangentei la parabolă într-un punct oarecare al ei.

b) Să se afle coordonatele proiecției unui punct din plan pe tangentă.

c) Să se afle locul geometric al proiecțiilor focarului pe tangentele la parabolă.

3. Se dau parabolele de ecuații $y^2 = 2px$ și $y^2 = 2qx$, ($0 < q < p$). O tangentă variabilă dusă la a doua parabolă intersectează prima parabolă în punctele M_1 și M_2 . Să se determine locul geometric al mijlocului segmentului $[M_1M_2]$.

4. Se consideră reperul cartezian xOy și P un punct pe prima bisecitoare a axelor de coordonate. Fie P_1 și P_2 proiecțiile ortogonale ale lui P pe axa absciselor respectiv pe axa ordonatelor. O dreaptă variabilă d care trece prin P intersectează axa absciselor în M și axa ordonatelor în N . Să se demonstreze că pentru orice poziție a dreptei d , dreptele MP_2, NP_1 și perpendiculara pe d care trece prin O sunt trei drepte concurente.

5. Fie ABC un triunghi oarecare și M mijlocul laturii $[BC]$. Se notează cu N un punct pe AB astfel ca $A \in (BN)$. Ortocentrul H al triunghiului ABC se proiectează pe bisectoarele unghiurilor \widehat{BAC} și \widehat{CAN} respectiv în punctele P și Q . Să se arate că punctele M, P și Q sunt coliniare.

6. Fie cubul $ABCD A' B' C' D'$ de muchie $AB = a$ și punctele $M \in (AB)$, $N \in (AD)$ și $P \in (AA')$ astfel încât $AM = \alpha$, $AN = \beta$ și $AP = \gamma$.

Să se demonstreze că sfera înscrisă în cubul $ABCD A' B' C' D'$ este tangentă planului (M, N, P) dacă și numai dacă are loc relația:

$$\frac{2\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha - \sqrt{\alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2}} = a.$$

7. Fie cubul $[ABCD A' B' C' D']$ cu muchia de lungime a , M și P mijloacele muchiilor $[BC]$ și respectiv $[AA']$, O centrul cubului, O' centrul bazei de jos $[A' B' C' D']$ a cubului și S mijlocul segmentului $[OO']$. Să se determine secțiunea realizată în cub de planul $[MPS]$ și aria acestei secțiuni.

8. Se consideră într-un reper oarecare punctul $A(1, 2, 1)$ și dreptele

$$d_1 : \begin{cases} x + 2y - z + 1 = 0 \\ x - y + z - 1 = 0 \end{cases} \quad d_2 : \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

Să se scrie ecuația planului ce trece prin A și este paralel cu dreptele d_1 și d_2 .

9. Să se scrie ecuația planului determinat de dreptele

$$d_1 : \frac{x}{7} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-1}{5},$$

$$d_2 : \frac{x-1}{7} = \frac{y-3}{3} = \frac{z+2}{5}.$$

10. Să se găsească ecuațiile perpendicularei coborâte din punctul $P(4, 3, 10)$ pe dreapta

$$d : \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{5}$$

precum și simetricul P' al punctului P față de dreapta d .

11. Să se scrie ecuația planului care conține dreapta

$$d_1 : \frac{x-3}{2} = \frac{y+4}{1} = \frac{z-2}{-3}$$

și este paralel cu dreapta

$$d_2 : \frac{x+5}{4} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{2}.$$

12. Să se găsească proiecția ortogonală a punctului $(5, 0, -2)$ pe dreapta

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{4}.$$

13. Să se găsească distanța dintre dreptele

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{1} \text{ și } \frac{x+1}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z-1}{3}$$

și ecuațiile perpendicularei comune.

14. Se dau dreptele M_1M_2 , unde $M_1(-1, 0, 1)$ și $M_2(-2, 1, 0)$ și

$$x + y + z = 1, \quad 2x - y - 5z = 0.$$

Să se afle distanța dintre cele două drepte și ecuațiile perpendicularei comune.

15. Să se calculeze unghiul dintre dreptele

$$d_1 : \begin{cases} x + 2y + z - 1 = 0 \\ x - 2y + z + 1 = 0 \end{cases} \quad d_2 : \begin{cases} x - y - z - 1 = 0 \\ x - y + 2z + 1 = 0 \end{cases}$$

16. Se dau dreptele

$$d : \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x - y + z = 2 \end{cases} \quad d' : \begin{cases} 5x - y + z = 1 \\ 2y + 3z = 3 \end{cases}$$

Se cere:

- ecuația planului P care trece prin d și este paralelă cu d' ;
- ecuația planului Q care trece prin d' și este perpendicular pe planul P ;
- unghiul format de dreapta d cu planul Q ;
- distanța de la origine la dreapta d .

17. Să se găsească ecuațiile planelor tangente la sfera

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 6$$

în punctele de intersecție cu dreapta

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{2}.$$

18. Să se scrie ecuația sferei care are centrul în planul

$$P : 2x - y + z - 4 = 0$$

și care este tangentă planului

$$P' : 4x + 3z - 29 = 0$$

în punctul $T(5, -2, 3)$.

19. Să se găsească ecuația sferei tangente dreptei

$$d_1 : \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{3}$$

în punctul $T_1(-1, 2, 3)$ și dreptei

$$d_2 : \frac{x+3}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{-3}$$

în punctul $T_2(-3, -2, 1)$.

Bibliografie

- [1] Andrica D., Țopan L., *Analytic Geometry*, Cluj University Presss, 2004.
- [2] Andrica D., Varga Cs., Văcărețu D., *Teme și probleme alese de geometrie*, Editura Plus, București, 2002.
- [3] Galbură Gh., Rado F., *Geometrie*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1979.
- [4] Murgulescu E., Flexi S., Kreindler O., Sacter O., Tîrnoveanu M., *Geometrie analitică și diferențială*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1965.
- [5] Rado F., Orban B., Groze V., VasIU A., *Culegere de probleme de geometrie*, Litografia Univ. Babeș-Bolyai, Cluj-Napoca, 1979.