

ANALIZĂ MATEMATICĂ
Specializarea Matematică,
iunie 2019

coordonator: Dorel I. Duca

Cuprins

Capitolul 1. Șiruri și serii de numere reale	1
1. Șiruri de numere reale	1
2. Probleme propuse spre rezolvare - șiruri	28
3. Serii de numere reale	29
4. Serii cu termeni pozitivi	34
5. Probleme propuse spre rezolvare - serii	46
Capitolul 2. Formula lui Taylor	49
1. Polinomul lui Taylor: definiție, proprietăți	49
2. Formula lui Taylor	50
3. Forme ale restului formulei lui Taylor	52
4. Probleme propuse spre rezolvare	56
Capitolul 3. Integrala Riemann	59
1. Diviziuni ale unui interval compact	59
2. Integrala Riemann	61
3. Proprietăți de monotonie ale integralei Riemann	63
4. Probleme propuse spre rezolvare - Integrala Riemann	65
Capitolul 4. Primitive	67
1. Primitive: definiția primitivei și a primitivității	67
2. Primitivabilitatea funcțiilor continue	70
3. Formula lui Leibniz-Newton	72
4. Metode de calcul a primitivelor	73
5. Probleme propuse spre rezolvare	80
Bibliografie	83
Glosar	85

CAPITOLUL 1

Șiruri și serii de numere reale

Considerând abordarea inductivă a introducerii mulțimii numerelor naturale, ea este:

$$\mathbb{N} = \{1, 1 + 1, 1 + 1 + 1, \dots\}.$$

Fie $m \in \mathbb{N}$ fixat. Vom utiliza următoarea notație:

$$\mathbb{N}_m = \{n \in \mathbb{N} : n \geq m\}.$$

Fie $x_0 \in \mathbb{R}$ și $r > 0$. Pentru intervalul centrat în jurul lui x_0 , de lungime $2r$, vom folosi notația

$$B(x_0, r) = (x_0 - r, x_0 + r) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < r\},$$

și îl vom numi **bilă deschisă de centru x_0 și rază r** . Această noțiune poate fi extinsă și spre $\pm\infty$, obținând

$$B(\infty, r) = (r, \infty] \quad \text{și} \quad B(-\infty, r) = [-\infty, r).$$

Mulțimea $V \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ se numește vecinătate a lui $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ dacă

$$\exists r > 0 \quad \text{astfel încât} \quad B(x_0, r) \subseteq V.$$

Mulțimea tuturor vecinătăților asociate unui $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ se va nota prin $\mathcal{V}(x)$.

1. Șiruri de numere reale

Definiția 1.1.1 Se numește **șir de numere reale** orice funcție

$$x : \mathbb{N}_m \rightarrow \mathbb{R}.$$

Așadar, șirul $x : \mathbb{N}_m \rightarrow \mathbb{R}$ atașează fiecărui număr natural $n \geq m$, numărul real

$$x(n) \stackrel{\text{not}}{=} x_n.$$

Notațiile uzuale pentru un șir sunt:

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}_m}, \quad \text{sau} \quad (x_n)_{n \geq m}, \quad \text{sau} \quad (x_n).$$

Terminologie:

- Numărul real x_n se numește **termenul de rang n** sau **termenul general** al șirului $(x_n)_{n \geq m}$

- imaginea funcției $x : N_m \rightarrow \mathbb{R}$, mulțimea

$$x(N_m) = \{x_n : n \in \mathbb{N}_m\}$$

se numește **mulțimea termenilor șirului** (x_n) .

Așa cum este important de făcut distincție între o funcție și mulțimea valorilor funcției, este important de făcut distincție între un șir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_m}$ și mulțimea termenilor șirului $x(N_m)$, deci

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}_m} \neq x(N_m).$$

1.1. Limita unui șir de numere reale, unicitatea limitei. În cazul în care un șir de numere reale are limită, aceasta este unică, după cum va fi argumentat în cele ce urmează.

Definiția 1.1.2 Spunem că șirul $(x_n)_{n \geq m}$ **are limită** (în $\overline{\mathbb{R}}$) dacă

$$\exists x \in \overline{\mathbb{R}}, \quad \forall V \in \mathcal{V}(x), \quad \exists n_V \in \mathbb{N}_m, \quad a.i. \quad \forall n \geq n_V, \quad x_n \in V.$$

Elementul x se va numi **limită a șirului** (x_n) și se va nota $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Observația 1.1.3 În mod echivalent, putem afirma că șirul (x_n) are limită (în $\overline{\mathbb{R}}$) dacă și numai dacă există un element $x \in \overline{\mathbb{R}}$ cu proprietatea că în afara fiecărei vecinătăți V a lui x se află cel mult un număr finit de termeni ai șirului (x_n) . \diamond

Vom arăta în cele ce urmează că limita unui șir, dacă există, este unică.

Teorema 1.1.4 (teorema de unicitate a limitei) Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_m}$ este un șir de numere reale. Atunci există cel mult un element $x \in \overline{\mathbb{R}}$ cu proprietatea că

$$(1.1.1) \quad \forall V \in \mathcal{V}(x), \quad \exists n_V \in \mathbb{N}_m, \quad a.i. \quad \forall n \geq n_V, \quad x_n \in V.$$

Demonstrație. Presupunem, prin absurd, că ar exista două elemente $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$, $x \neq y$ care satisfac cerințele teoremei. Din $x \neq y$ deducem că există o vecinătate V a punctului x și o vecinătate W a punctului y astfel încât $V \cap W = \emptyset$.

Mulțimea V fiind vecinătate a punctului x , există un număr natural $n_V \geq m$ astfel încât

$$(1.1.2) \quad x_n \in V, \text{ oricare ar fi numărul natural } n \geq n_V.$$

Analog, W fiind vecinătate a punctului y , există un număr natural $n_W \geq m$ astfel încât

$$(1.1.3) \quad x_n \in W, \text{ oricare ar fi numărul natural } n \geq n_W.$$

Acum, din (1.1.2) și (1.1.3), deducem că

$$x_n \in V \cap W = \emptyset, \text{ oricare ar fi numărul natural } n \geq \max\{n_V, n_W\},$$

ceea ce este absurd. ■

Definiția 1.1.5 Șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_m}$ se numește **convergent** dacă are limită și aceasta este un număr real. În caz contrar el se numește **divergent**.

Observația 1.1.6 Un șir de numere reale (x_n) este divergent într-una din următoarele situații:

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in \{\pm\infty\} \quad \text{sau} \quad \nexists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

Studiul unui șir comportă două probleme:

- 1) Stabilirea naturii șirului, adică a faptului că șirul este convergent sau divergent.
- 2) În cazul în care șirul este convergent, determinarea limitei șirului.

1.2. Caracterizări ale limitei unui șir de numere reale. În cele ce urmează vom da formulări echivalente ale definiției limitei unui șir de numere reale.

Teorema 1.1.7 (teorema de caracterizare cu ε a limitei.) Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_m}$ un șir de numere reale și $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. Atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \quad \text{dacă și numai dacă}$$

1) pentru $x_0 \in \mathbb{R}$,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}_m, \quad \text{a.î.} \quad \forall n \geq n_\varepsilon, \quad |x_n - x_0| < \varepsilon.$$

2) pentru $x_0 = \infty$,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}_m, \quad \text{a.î.} \quad \forall n \geq n_\varepsilon, \quad x_n > \varepsilon.$$

3) pentru $x_0 = -\infty$,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}_m, \quad \text{a.î.} \quad \forall n \geq n_\varepsilon, \quad x_n < -\varepsilon.$$

Demonstrație. Demonstrația acestei teoreme de caracterizare se bazează exclusiv pe definiția vecinătăților.

1 Analizăm cazul în care $x_0 \in \mathbb{R}$.

Necesitatea. Suntem în cazul în care

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$$

și considerăm $\varepsilon > 0$ arbitrar ales. Mulțimea

$$B(x_0, \varepsilon) = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \in \mathcal{V}(x_0),$$

deci, conform definiției, există un număr natural $n_B \geq m$ astfel încât oricare ar fi numărul natural $n \geq n_B$,

$$x_n \in B(x_0, \varepsilon) = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \iff |x_n - x_0| < \varepsilon.$$

Obținem astfel concluzia dorită pentru $n_\varepsilon := n_B$. Deoarece ε a fost ales arbitrar, demonstrația este completă.

Suficiența. Fie $V \in \mathcal{V}(x_0)$ arbitrar aleasă. Atunci, conform definiției vecinătății

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \text{astfel încât} \quad B(x_0, \varepsilon) \subseteq V.$$

Din $\varepsilon > 0$, în baza ipotezei, deducem că există un număr natural $n_\varepsilon \geq m$ astfel încât pentru orice număr natural $n \geq n_\varepsilon$ avem $|x_n - x_0| < \varepsilon$. Astfel $x_n \in B(x_0, \varepsilon) \subseteq V$. Deoarece V a fost aleasă arbitrar, concluzionăm că numărul real x_0 are proprietatea că pentru fiecare vecinătate V a lui x există un număr natural $n_V := n_\varepsilon$ astfel încât oricare ar fi numărul natural $n \geq n_V$ avem $x_n \in V$. Prin urmare, conform definiției $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$.

2. Cazul $x_0 = \infty$. Demonstrația decurge similar cu cea de la cazul 1, cu mențiunea că $B(\infty, \varepsilon) = (\varepsilon, \infty]$ iar

$$x_n \in B(\infty, \varepsilon) \iff x_n > \varepsilon.$$

3. Cazul $x_0 = -\infty$. Demonstrația decurge similar cu cea de la cazul 1, cu mențiunea că $B(-\infty, \varepsilon) = [-\infty, -\varepsilon)$ iar

$$x_n \in B(-\infty, \varepsilon) \iff x_n < -\varepsilon.$$

■

Exemplul 1.1.8 Șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cu termenul general $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$, ($n \in \mathbb{N}$) converge către 0, deci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0.$$

Soluție. Fixăm $\varepsilon > 0$ arbitrar ales. Analizând concluzia dorită observăm că

$$|x_n - 0| = \left| \frac{(-1)^n}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n},$$

Din axioma lui Arhimede privind nemărginirea mulțimii numerelor naturale, rezultă că există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $\frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon$. Alternativ, putem considera

$$n_\varepsilon := \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1 \in \mathbb{N}.$$

Prin urmare pentru fiecare număr real $\varepsilon > 0$, există un număr natural n_ε cu proprietatea că oricare ar fi numărul natural $n \geq n_\varepsilon$

$$|x_n - 0| = \left| \frac{(-1)^n}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon.$$

și deci, în baza teoremei de caracterizare cu ε a limitei $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$. ■

Din teorema 1.1.7 deducem imediat următoarea afirmație:

Teorema 1.1.9 Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_m}$ un șir de numere reale și $x \in \mathbb{R}$. Atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \iff \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - x) = 0.$$

1.3. Operații cu șiruri convergente. În cele ce urmează vom stabili legătura dintre operațiile uzuale ce se efectuează cu șiruri (adunarea șirurilor, înmulțirea cu scalari a șirurilor, înmulțirea șirurilor etc.) și limitele acestora. Vom vedea că limita "comută" cu aceste operații.

Teorema 1.1.10 Fie șirurile de numere reale (x_n) și (y_n) , convergente, iar $a, b \in \mathbb{R}$. Următoarele afirmații sunt adevărate:

1) Șirul sumă $(x_n + y_n)$ este convergent, iar

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right) + \left(\lim_{n \rightarrow \infty} y_n \right).$$

2) Șirul (ax_n) este convergent iar

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (ax_n) = a \cdot \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right).$$

3) Șirul $(ax_n + by_n)$ este convergent iar

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (ax_n + by_n) = a \cdot \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right) + b \cdot \left(\lim_{n \rightarrow \infty} y_n \right).$$

4) Dacă (x_n) este un șir convergent către 0 și (y_n) este un șir mărginit, atunci șirul $(x_n y_n)$ este convergent către 0.

5) Șirul $(x_n \cdot y_n)$ este convergent iar

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right) \cdot \left(\lim_{n \rightarrow \infty} y_n \right).$$

Demonstrație. Fie $x, y \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \quad \text{și} \quad y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

1) Folosim teorema de caracterizare cu ε a limitei finite. Fie $\varepsilon > 0$. Din faptul că șirul (x_n) converge către x deducem că există un număr natural n'_ε astfel încât

$$|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ oricare ar fi numărul natural } n \geq n'_\varepsilon.$$

Analog, din faptul că șirul (y_n) converge către y , deducem că există un număr natural n''_ε astfel încât

$$|y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ oricare ar fi numărul natural } n \geq n''_\varepsilon.$$

Atunci pentru orice număr natural $n \geq \max\{n'_\varepsilon, n''_\varepsilon\}$ avem

$$|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{și} \quad |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2}$$

și deci

$$|(x_n + y_n) - (x + y)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Așadar, pentru fiecare număr real $\varepsilon > 0$ există un număr natural n_ε cu proprietatea că pentru orice număr natural $n \geq n_\varepsilon$ avem $|(x_n + y_n) - (x + y)| < \varepsilon$, ceea ce înseamnă că șirul $(x_n + y_n)$ converge către $(x + y)$.

2) Folosim teorema de caracterizare cu ε a limitei finite. Fie $\varepsilon > 0$. Din faptul că șirul (x_n) converge către x deducem că există un număr natural n_ε astfel încât

$$|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{|a| + 1}, \text{ oricare ar fi numărul natural } n \geq n_\varepsilon.$$

Atunci

$$|ax_n - ax| = |a| |x_n - x| \leq \frac{|a|}{|a| + 1} \varepsilon < \varepsilon, \text{ oricare ar fi numărul natural } n \geq n_\varepsilon.$$

Prin urmare, pentru fiecare număr real $\varepsilon > 0$ există un număr natural n_ε cu proprietatea că pentru orice număr natural $n \geq n_\varepsilon$ avem $|ax_n - ax| < \varepsilon$, ceea ce înseamnă că șirul (ax_n) converge către ax .

Afirmația 3^0 urmează imediat din afirmațiile 1^0 și 2^0 .

4) Din faptul că șirul (y_n) este mărginit deducem că există un număr real $M > 0$ cu proprietatea că

$$|y_n| \leq M, \text{ oricare ar fi numărul natural } n.$$

Folosim teorema de caracterizare cu ε a limitei finite. Fie $\varepsilon > 0$. Din faptul că șirul (x_n) converge către 0 deducem că există un număr natural n_ε astfel încât

$$|x_n| < \frac{\varepsilon}{M}, \text{ oricare ar fi numărul natural } n \geq n_\varepsilon.$$

Atunci pentru orice număr natural $n \geq n_\varepsilon$, avem

$$|x_n y_n - 0| = |x_n| \cdot |y_n| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon.$$

Așadar, pentru fiecare număr real $\varepsilon > 0$ există un număr natural n_ε cu proprietatea că pentru orice număr natural $n \geq n_\varepsilon$ avem $|x_n y_n - 0| < \varepsilon$, ceea ce înseamnă că șirul $(x_n y_n)$ converge către 0.

5) Șirul (y_n) fiind convergent este mărginit; prin urmare există un număr real $M > 0$ astfel încât să avem

$$|y_n| \leq M, \text{ oricare ar fi numărul natural } n.$$

Atunci, pentru fiecare număr natural n , avem

$$\begin{aligned} |(x_n y_n) - (xy)| &= |x_n y_n - x y_n + x y_n - xy| \leq |(x_n - x) y_n + x (y_n - y)| \leq \\ &= |x_n - x| |y_n| + |x| |y_n - y| \leq M |x_n - x| + |x| |y_n - y| \leq \\ &\leq M a_n + |x| b_n. \end{aligned}$$

Conform 4), avem că șirul $(M a_n + |x| b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este convergent și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (M a_n + |x| b_n) = 0.$$

În baza criteriului de existență a limitei finite, deducem că șirul $(x_n y_n)$ este convergent și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = xy.$$

■

Teorema 1.1.11 Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ și $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ două șiruri de numere reale. Dacă:

(i) șirurile (x_n) și (y_n) sunt convergente;

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n \neq 0$,

(iii) $y_n \neq 0$, oricare ar fi numărul natural n ,

atunci șirul $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ este convergent și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n}.$$

(Limita câtului este egală cu câtul limitelor.)

Demonstrație. Demonstrația este similară teoremelor anterioare. ■

1.4. Operații cu șiruri care au limită. Nedeterminări. Dacă în cazul șirurilor convergente operația aritmetică asupra șirurilor "comută" cu limita (limita sumei este egală cu suma limitelor, limita produsului este egală cu produsul limitelor etc.), în cazul șirurilor care au limită această proprietate nu are loc în general. În paragraful de față se analizează condițiile în care operațiile aritmetice "comută" cu limita.

Teorema 1.1.12 Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ și $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ șiruri de numere reale care au limită.

1⁰ Dacă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in \mathbb{R} \quad \text{și} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty,$$

atunci șirul $(x_n + y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ are limită și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = +\infty.$$

2⁰ Dacă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in \mathbb{R} \quad \text{și} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = -\infty,$$

atunci șirul $(x_n + y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ are limită și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = -\infty.$$

3⁰ Dacă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty \quad \text{și} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty,$$

atunci șirul $(x_n + y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ are limită și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = +\infty.$$

4⁰ Dacă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty \quad \text{și} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = -\infty,$$

atunci șirul $(x_n + y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ are limită și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = -\infty.$$

Demonstrație. Folosim teorema de caracterizare cu ε a limitei infinite (teorema ??). Fie

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \quad \text{și} \quad y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

1⁰ Fie $\varepsilon > 0$. Din faptul că șirul (x_n) converge către $x \in \mathbb{R}$, deducem că există un număr natural n'_ε astfel încât

$$|x_n - x| < \varepsilon, \quad \text{oricare ar fi numărul natural } n \geq n'_\varepsilon,$$

sau echivalent

$$x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon, \quad \text{oricare ar fi numărul natural } n \geq n'_\varepsilon.$$

Deoarece $y = +\infty$ este limita șirului (y_n) , există un număr natural n''_ε astfel încât

$$y_n > 2\varepsilon - x, \text{ oricare ar fi numărul natural } n \geq n''_\varepsilon.$$

Atunci, pentru orice număr natural $n \geq n_\varepsilon := \max\{n'_\varepsilon, n''_\varepsilon\}$, avem

$$x_n + y_n > (x - \varepsilon) + (2\varepsilon - x) = \varepsilon.$$

Așadar, pentru fiecare număr real $\varepsilon > 0$ există un număr natural n_ε astfel încât

$$x_n + y_n > \varepsilon, \text{ oricare ar fi numărul natural } n \geq n_\varepsilon,$$

ceea ce ne spune că șirul $(x_n + y_n)$ are limita $+\infty$.

2⁰ Fie $\varepsilon > 0$. Din faptul că șirul (x_n) converge către $x \in \mathbb{R}$, deducem că există un număr natural n'_ε astfel încât

$$|x_n - x| < \varepsilon, \text{ oricare ar fi numărul natural } n \geq n'_\varepsilon,$$

sau echivalent

$$x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon, \text{ oricare ar fi numărul natural } n \geq n'_\varepsilon.$$

Deoarece $y = -\infty$ este limita șirului (y_n) , există un număr natural n''_ε astfel încât

$$y_n < -x - 2\varepsilon, \text{ oricare ar fi numărul natural } n \geq n''_\varepsilon.$$

Atunci, pentru orice număr natural $n \geq n_\varepsilon := \max\{n'_\varepsilon, n''_\varepsilon\}$, avem

$$x_n + y_n < (x + \varepsilon) + (-2\varepsilon - x) = -\varepsilon.$$

Așadar, pentru fiecare număr real $\varepsilon > 0$ există un număr natural n_ε astfel încât

$$x_n + y_n < -\varepsilon, \text{ oricare ar fi numărul natural } n \geq n_\varepsilon,$$

ceea ce ne spune că șirul $(x_n + y_n)$ are limita $-\infty$.

3⁰ Fie $\varepsilon > 0$. Din faptul că șirul (x_n) are limita $+\infty$, deducem că există un număr natural n'_ε astfel încât

$$x_n > \frac{\varepsilon}{2}, \text{ oricare ar fi numărul natural } n \geq n'_\varepsilon.$$

Deoarece $y = +\infty$ este limita șirului (y_n) , există un număr natural n''_ε astfel încât

$$y_n > \frac{\varepsilon}{2}, \text{ oricare ar fi numărul natural } n \geq n''_\varepsilon.$$

Atunci, pentru orice număr natural $n \geq \max\{n'_\varepsilon, n''_\varepsilon\}$, avem

$$x_n + y_n > \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Prin urmare șirul $(x_n + y_n)$ are limita $+\infty$.

4⁰ Fie $\varepsilon > 0$. Din faptul că șirul (x_n) are limita $-\infty$, deducem că există un număr natural n'_ε astfel încât

$$x_n < -\frac{\varepsilon}{2}, \text{ oricare ar fi numărul natural } n \geq n'_\varepsilon.$$

Deoarece $y = -\infty$ este limita șirului (y_n) , există un număr natural n''_ε astfel încât

$$y_n < -\frac{\varepsilon}{2}, \text{ oricare ar fi numărul natural } n \geq n''_\varepsilon.$$

Atunci, pentru orice număr natural $n \geq \max\{n'_\varepsilon, n''_\varepsilon\}$, avem

$$x_n + y_n < -\frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} = -\varepsilon.$$

Prin urmare șirul $(x_n + y_n)$ are limita $-\infty$. Teorema este demonstrată. ■

Observația 1.1.13 Am arătat că, pentru două șiruri convergente ”*limita sumei este egală cu suma limitelor*”. Pentru ca afirmația ”*limita sumei este egală cu suma limitelor*” să fie adevărată și în cazul a două șiruri care au limită, s-au adoptat convențiile:

$$1^0 \quad x + (+\infty) = +\infty, \text{ oricare ar fi } x \in \mathbb{R};$$

$$2^0 \quad x + (-\infty) = -\infty, \text{ oricare ar fi } x \in \mathbb{R};$$

$$3^0 \quad (+\infty) + (+\infty) = +\infty;$$

$$4^0 \quad (-\infty) + (-\infty) = -\infty.$$

Nu se atribuie nici un sens pentru $(+\infty) + (-\infty)$, considerat caz exceptat la adunarea în $\overline{\mathbb{R}}$. ◇

Observația 1.1.14 Ori de câte ori avem de calculat limita unui șir de forma $(x_n + y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, unde $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este un șir cu limita $+\infty$ și $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este un șir cu limita $-\infty$, nu putem afirma nimic relativ la limita șirului $(x_n + y_n)$. Uneori șirul sumă $(x_n + y_n)$ are limită, alteori nu are limită. Printre altele, putem arăta că, oricare ar fi $x \in \overline{\mathbb{R}}$, există un șir (x_n) cu limita $+\infty$ și un șir (y_n) cu limita $-\infty$ astfel încât șirul sumă $(x_n + y_n)$ să aibă limita x . De aceea se spune că suma $+\infty + (-\infty)$ **nu are sens** sau că operația $+\infty + (-\infty)$ **nu este definită**. Acest caz exceptat se numește ”**cazul de nedeterminare** $\infty - \infty$ ”. Existența sau neexistența limitei în cazul de nedeterminare $\infty - \infty$ se stabilește ținând seama de expresia concretă a termenilor șirurilor (x_n) și (y_n) . ◇

Teorema relativă la limita sumei a două șiruri convergente, împreună cu teorema relativă la limita sumei a două șiruri care au limită, ne permit formularea următoarei teoreme unitare relativă la limita sumei a două șiruri care au limită.

Teorema 1.1.15 Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ și $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ șiruri care au limită. Dacă suma

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right) + \left(\lim_{n \rightarrow \infty} y_n \right)$$

are sens (este definită) în $\overline{\mathbb{R}}$, atunci șirul $(x_n + y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ are limită și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right) + \left(\lim_{n \rightarrow \infty} y_n \right).$$

(Limita sumei este egală cu suma limitelor.) \diamond

Teorema 1.1.16 Fie c un număr real și $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un șir care are limită infinită.

1⁰ Dacă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty,$$

atunci șirul $(cx_n)_{n \in \mathbb{N}}$ are limită și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (cx_n) = \begin{cases} +\infty, & \text{dacă } c > 0 \\ 0, & \text{dacă } c = 0 \\ -\infty, & \text{dacă } c < 0. \end{cases}$$

2⁰ Dacă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty,$$

atunci șirul $(cx_n)_{n \in \mathbb{N}}$ are limită și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (cx_n) = \begin{cases} -\infty, & \text{dacă } c > 0 \\ 0, & \text{dacă } c = 0 \\ +\infty, & \text{dacă } c < 0. \end{cases}$$

Demonstrație. 1⁰ Folosim teorema de caracterizare cu ε .

Cazul $c > 0$. Fie $\varepsilon > 0$. Din faptul că $+\infty$ este limita șirului (x_n) , există un număr natural n_ε astfel încât

$$x_n > \frac{\varepsilon}{c}, \text{ oricare ar fi numărul natural } n \geq n_\varepsilon.$$

Atunci

$$cx_n > \varepsilon, \text{ oricare ar fi numărul natural } n \geq n_\varepsilon.$$

Prin urmare șirul (cx_n) are limita $+\infty$.

Cazul $c = 0$. Șirul (cx_n) este șirul constant (0), care are limita 0.

Cazul $c < 0$. Fie $\varepsilon > 0$. Din faptul că $+\infty$ este limita șirului (x_n) , există un număr natural n_ε astfel încât

$$x_n > \frac{\varepsilon}{-c}, \text{ oricare ar fi numărul natural } n \geq n_\varepsilon.$$

Atunci

$$cx_n < -\varepsilon, \text{ oricare ar fi numărul natural } n \geq n_\varepsilon.$$

Prin urmare șirul (cx_n) are limita $-\infty$.

Afirmația 2⁰ se demonstrează similar. ■

Teorema 1.1.17 Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ și $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ șiruri de numere reale care au limită.

1⁰ Dacă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \text{și} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty,$$

atunci șirul $(x_n y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ are limită și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = \begin{cases} +\infty, & \text{dacă } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n > 0 \\ -\infty, & \text{dacă } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n < 0. \end{cases}$$

2⁰ Dacă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \text{și} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = -\infty,$$

atunci șirul $(x_n y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ are limită și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = \begin{cases} -\infty, & \text{dacă } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n > 0 \\ +\infty, & \text{dacă } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n < 0. \end{cases}$$

3⁰ Dacă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty \quad \text{și} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty,$$

atunci șirul $(x_n y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ are limită și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = +\infty.$$

4⁰ Dacă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty \quad \text{și} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = -\infty,$$

atunci șirul $(x_n y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ are limită și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = +\infty.$$

5⁰ Dacă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty \quad \text{și} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = -\infty,$$

atunci șirul $(x_n y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ are limită și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = -\infty.$$

Demonstrație. Folosim teorema de caracterizare cu ε a limitei infinite. Fie $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ și $y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$.

1⁰ Cazul $x > 0$. Fie $\varepsilon > 0$. Din faptul că șirul (x_n) converge către $x \in]0, +\infty[$, deducem că există un număr natural n'_ε astfel încât

$$x_n > \frac{x}{2}, \text{ oricare ar fi numărul natural } n \geq n'_\varepsilon.$$

Deoarece $y = +\infty$ este limita șirului (y_n) , există un număr natural n''_ε astfel încât

$$y_n > \frac{2\varepsilon}{x}, \text{ oricare ar fi numărul natural } n \geq n''_\varepsilon.$$

Atunci, pentru orice număr natural $n \geq \max\{n'_\varepsilon, n''_\varepsilon\}$, avem

$$x_n y_n > \left(\frac{x}{2}\right) \cdot \left(\frac{2\varepsilon}{x}\right) = \varepsilon.$$

Prin urmare șirul $(x_n y_n)$ are limita $+\infty$.

Cazul $x < 0$. Fie $\varepsilon > 0$. Din faptul că șirul (x_n) converge către $x \in]-\infty, 0[$, deducem că există un număr natural n'_ε astfel încât

$$x_n < \frac{x}{2}, \text{ oricare ar fi numărul natural } n \geq n'_\varepsilon.$$

Deoarece $y = +\infty$ este limita șirului (y_n) , există un număr natural n''_ε astfel încât

$$y_n > \frac{2\varepsilon}{-x}, \text{ oricare ar fi numărul natural } n \geq n''_\varepsilon.$$

Atunci, pentru orice număr natural $n \geq \max\{n'_\varepsilon, n''_\varepsilon\}$, avem

$$x_n y_n < \left(\frac{x}{2}\right) \cdot \left(\frac{2\varepsilon}{-x}\right) = -\varepsilon.$$

Prin urmare șirul $(x_n y_n)$ are limita $-\infty$.

2⁰ Se demonstrează similar cazului 1⁰.

3⁰ Fie $\varepsilon > 0$. Din faptul că șirul (x_n) are limita $+\infty$, deducem că există un număr natural n'_ε astfel încât

$$x_n > \sqrt{\varepsilon}, \text{ oricare ar fi numărul natural } n \geq n'_\varepsilon.$$

Deoarece $y = +\infty$ este limita șirului (y_n) , există un număr natural n''_ε astfel încât

$$y_n > \sqrt{\varepsilon}, \text{ oricare ar fi numărul natural } n \geq n''_\varepsilon.$$

Atunci, pentru orice număr natural $n \geq \max\{n'_\varepsilon, n''_\varepsilon\}$, avem

$$x_n y_n > (\sqrt{\varepsilon})^2 = \varepsilon.$$

Prin urmare șirul $(x_n y_n)$ are limita $+\infty$.

4⁰ Fie $\varepsilon > 0$. Din faptul că șirul (x_n) are limita $-\infty$, deducem că există un număr natural n'_ε astfel încât

$$x_n < -\sqrt{\varepsilon}, \text{ oricare ar fi numărul natural } n \geq n'_\varepsilon.$$

Deoarece $y = -\infty$ este limita șirului (y_n) , există un număr natural n''_ε astfel încât

$$y_n < -\sqrt{\varepsilon}, \text{ oricare ar fi numărul natural } n \geq n''_\varepsilon.$$

Atunci, pentru orice număr natural $n \geq \max\{n'_\varepsilon, n''_\varepsilon\}$, avem

$$x_n y_n > (\sqrt{\varepsilon})^2 = \varepsilon.$$

Prin urmare șirul $(x_n y_n)$ are limita $+\infty$.

5^o Fie $\varepsilon > 0$. Din faptul că șirul (x_n) are limita $+\infty$, deducem că există un număr natural n'_ε astfel încât

$$x_n > \sqrt{\varepsilon}, \text{ oricare ar fi numărul natural } n \geq n'_\varepsilon.$$

Deoarece $y = -\infty$ este limita șirului (y_n) , există un număr natural n''_ε astfel încât

$$y_n < -\sqrt{\varepsilon}, \text{ oricare ar fi numărul natural } n \geq n''_\varepsilon.$$

Atunci, pentru orice număr natural $n \geq \max\{n'_\varepsilon, n''_\varepsilon\}$, avem

$$x_n y_n < -(\sqrt{\varepsilon})^2 = -\varepsilon.$$

Prin urmare șirul $(x_n y_n)$ are limita $-\infty$. Teorema este demonstrată. ■

Observația 1.1.18 Am arătat că, pentru două șiruri convergente ”*limita produsului este egală cu produsul limitelor*”. Pentru ca afirmația ”*limita produsului este egală cu produsul limitelor*” să fie adevărată și în cazul a două șiruri care au limită, s-au adoptat convențiile:

$$1^0 \quad x \cdot (+\infty) = \begin{cases} +\infty, & \text{dacă } x > 0 \\ -\infty, & \text{dacă } x < 0; \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$2^0 \quad x \cdot (-\infty) = \begin{cases} -\infty, & \text{dacă } x > 0 \\ +\infty, & \text{dacă } x < 0; \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$3^0 \quad (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty,$$

$$4^0 \quad (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty,$$

$$5^0 \quad (+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty; \quad (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty.$$

Nu se atribuie nici un sens pentru $0 \cdot (+\infty)$ și $0 \cdot (-\infty)$, considerate cazuri exceptate la înmulțirea în $\overline{\mathbb{R}}$. ◇

Observația 1.1.19 Ori de câte ori avem de calculat limita unui șir de forma $(x_n y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, unde $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este un șir cu limita 0 și $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este un șir cu limita $+\infty$ (respectiv $-\infty$), nu putem afirma nimic relativ la limita șirului $(x_n y_n)$. Uneori șirul produs $(x_n y_n)$ are limită, alteori nu are limită. Printre altele, putem arăta că, oricare ar fi $x \in \overline{\mathbb{R}}$, există un șir (x_n) cu limita 0 și un șir (y_n) cu limita $+\infty$ (respectiv $-\infty$) astfel încât șirul produs $(x_n y_n)$ să aibă limita x . De aceea se spune că produsele $0 \cdot (+\infty)$ și $0 \cdot (-\infty)$ **nu au sens**

sau că operațiile $0 \cdot (+\infty)$ și $0 \cdot (-\infty)$ **nu sunt definite**. Aceste cazuri exceptate formează așa numitul ”**caz de nedeterminare** $0 \cdot \infty$ ”. Existența sau neexistența limitei în cazul de nedeterminare $0 \cdot \infty$ se stabilește ținând seama de expresia concretă a termenilor șirurilor (x_n) și (y_n) . \diamond

Afirmația următoare se referă la limita câtului.

Teorema 1.1.20 Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ și $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ șiruri de numere reale care au limită astfel încât

$$y_n \neq 0, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N}.$$

1⁰ Dacă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in \mathbb{R} \text{ și } \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty,$$

atunci șirul $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ are limită și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_n}{y_n}\right) = 0.$$

2⁰ Dacă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in \mathbb{R} \text{ și } \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = -\infty,$$

atunci șirul $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ are limită și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_n}{y_n}\right) = 0.$$

3⁰ Dacă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty \text{ și } \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

atunci șirul $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ are limită și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \begin{cases} +\infty, & \text{dacă } \lim_{n \rightarrow \infty} y_n > 0 \\ -\infty, & \text{dacă } \lim_{n \rightarrow \infty} y_n < 0. \end{cases}$$

4⁰ Dacă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty \text{ și } \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

atunci șirul $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ are limită și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \begin{cases} -\infty, & \text{dacă } \lim_{n \rightarrow \infty} y_n > 0 \\ +\infty, & \text{dacă } \lim_{n \rightarrow \infty} y_n < 0. \end{cases}$$

Demonstrație. Folosim teorema de caracterizare cu ε a limitei. Fie $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ și $y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$.

1⁰ Fie $\varepsilon > 0$. Șirul (x_n) fiind convergent este mărginit; prin urmare există $M > 0$ astfel încât

$$|x_n| \leq M, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N}.$$

Deoarece $y = +\infty$ este limita șirului (y_n) , există un număr natural n_ε astfel încât

$$y_n > \frac{M}{\varepsilon}, \text{ oricare ar fi numărul natural } n \geq n_\varepsilon.$$

Atunci, pentru orice număr natural $n \geq n_\varepsilon$, avem

$$\left| \frac{x_n}{y_n} - 0 \right| = \frac{|x_n|}{|y_n|} < \frac{M\varepsilon}{M} = \varepsilon.$$

Prin urmare, pentru orice $\varepsilon > 0$ există un număr natural n_ε cu proprietatea că

$$\left| \frac{x_n}{y_n} - 0 \right| < \varepsilon, \text{ oricare ar fi numărul natural } n \geq n_\varepsilon.$$

În consecință șirul (x_n/y_n) are limita 0.

2⁰ se demonstrează similar.

3⁰ Presupunem $y > 0$ și fie $\varepsilon > 0$. Deoarece $x = +\infty$ este limita șirului (x_n) , există un număr natural n'_ε astfel încât

$$x_n > \varepsilon(y + \varepsilon), \text{ oricare ar fi numărul natural } n \geq n'_\varepsilon.$$

Pe de altă parte, y fiind limita șirului (y_n) există un număr natural n''_ε cu proprietatea că

$$|y_n - y| < \varepsilon, \text{ oricare ar fi numărul natural } n \geq n''_\varepsilon,$$

sau echivalent

$$y - \varepsilon < y_n < y + \varepsilon, \text{ oricare ar fi numărul natural } n \geq n''_\varepsilon.$$

Atunci, pentru orice număr natural $n \geq n_\varepsilon := \max\{n'_\varepsilon, n''_\varepsilon\}$, avem

$$\frac{x_n}{y_n} > \frac{\varepsilon(y + \varepsilon)}{y + \varepsilon} = \varepsilon.$$

Prin urmare, pentru orice $\varepsilon > 0$ există un număr natural n_ε cu proprietatea că

$$\frac{x_n}{y_n} > \varepsilon, \text{ oricare ar fi numărul natural } n \geq n_\varepsilon.$$

În consecință șirul (x_n/y_n) are limita $+\infty$.

4⁰ se demonstrează similar. ■

Observația 1.1.21 Am arătat că, pentru două șiruri convergente ”*limita câtului, dacă numitorul nu are limita zero, este egală cu câtul limitelor*”. Pentru ca afirmația ”*limita*

câtului, dacă numitorul nu are limita zero, este egală cu câtul limitelor” să fie adevărată și în cazul a două șiruri care au limită, s-au adoptat convențiile:

$$1^0 \frac{x}{+\infty} = \frac{x}{-\infty} = 0, \text{ oricare ar fi } x \in \mathbb{R}.$$

$$2^0 \frac{+\infty}{x} = \begin{cases} +\infty, & \text{dacă } x > 0 \\ -\infty, & \text{dacă } x < 0; \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R};$$

$$3^0 \frac{-\infty}{x} = \begin{cases} -\infty, & \text{dacă } x > 0 \\ +\infty, & \text{dacă } x < 0; \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Nu se atribuie nici un sens pentru

$$\frac{x}{0} \text{ cu } x \in \mathbb{R}, \quad \frac{+\infty}{+\infty}, \frac{+\infty}{-\infty}, \frac{-\infty}{+\infty}, \frac{-\infty}{-\infty},$$

considerate cazuri exceptate la împărțirea în $\overline{\mathbb{R}}$. \diamond

Observația 1.1.22 Ori de câte ori avem de calculat limita unui șir de forma $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$, unde $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este un șir cu limita $+\infty$ (sau $-\infty$) și $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este un șir cu limita $+\infty$ (sau $-\infty$), nu putem afirma nimic relativ la limita șirului $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$. Uneori șirul cât $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ are limită, alteori nu are limită. Printre altele, putem arăta că oricare ar fi $x \in [0, +\infty]$, există un șir (x_n) cu limita $+\infty$ și un șir (y_n) cu limita $+\infty$, astfel încât șirul cât $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ să aibă limita x . De aceea se spune că operațiile

$$\frac{+\infty}{+\infty}, \frac{-\infty}{+\infty}, \frac{+\infty}{-\infty} \text{ și } \frac{-\infty}{+\infty},$$

nu au sens sau că **nu sunt definite**. Aceste cazuri exceptate formează așa numitul ”**caz de nedeterminare** $\frac{\infty}{\infty}$ ”. Existența sau neexistența limitei în cazul de nedeterminare $\frac{\infty}{\infty}$ se stabilește ținând seama de expresia concretă a termenilor șirurilor (x_n) și (y_n) . \diamond

Observația 1.1.23 Ori de câte ori avem de calculat limita unui șir de forma $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$, unde $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este un șir cu limita 0 și $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este un șir cu limita 0, nu putem afirma nimic relativ la limita șirului $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$. Uneori șirul cât $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ are limită, alteori nu are limită. Printre altele, putem arăta că, oricare ar fi $x \in \overline{\mathbb{R}}$, există un șir (x_n) cu limita 0 și un șir (y_n) cu limita 0, astfel încât șirul cât $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ să aibă limita x . De aceea se spune că operația $\frac{0}{0}$, **nu are sens** sau că **nu este definită**. Acest caz exceptat formează așa numitul ”**caz de nedeterminare** $\frac{0}{0}$ ”. Existența sau neexistența limitei în cazul de nedeterminare $\frac{0}{0}$ se stabilește ținând seama de expresia concretă a termenilor șirurilor (x_n) și (y_n) . \diamond

Teoremele relative la limita produsului și limita câtului a două șiruri care au limită, ne permit formularea următoarei teoreme unitare relativă la limita câtului a două șiruri care au limită.

Teorema 1.1.24 Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ și $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ șiruri de numere reale care au limită. Dacă $y_n \neq 0$, oricare ar fi numărul natural n , și dacă raportul

$$\frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n}$$

are sens (este definit) în $\overline{\mathbb{R}}$, atunci șirul $(\frac{x_n}{y_n})_{n \in \mathbb{N}}$ are limită și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n}.$$

(Limita raportului este egală cu raportul limitelor.) \diamond

Teorema 1.1.25 Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ și $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ șiruri de numere reale care au limită astfel încât

$$y_n \neq 0, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N}.$$

1^o Dacă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty \text{ și } \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0,$$

și

$$y_n > 0, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N},$$

atunci șirul $(\frac{x_n}{y_n})_{n \in \mathbb{N}}$ are limită și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = +\infty.$$

2^o Dacă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty \text{ și } \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0,$$

și

$$y_n < 0, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N},$$

atunci șirul $(\frac{x_n}{y_n})_{n \in \mathbb{N}}$ are limită și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = -\infty.$$

3^o Dacă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty \text{ și } \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0,$$

și

$$y_n > 0, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N},$$

atunci șirul $(\frac{x_n}{y_n})_{n \in \mathbb{N}}$ are limită și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = -\infty.$$

4⁰ Dacă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty \quad \text{\textit{și}} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0,$$

\textit{și}

$$y_n < 0, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N},$$

atunci șirul $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ are limită \textit{și}

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = +\infty.$$

Demonstrație. 1⁰ Fie $\varepsilon > 0$. Deoarece $x = +\infty$ este limita șirului (x_n) există un număr natural n'_ε astfel încât

$$x_n > \varepsilon^2, \text{ oricare ar fi numărul natural } n \geq n'_\varepsilon.$$

Pe de altă parte, din faptul că $y = 0$ este limita șirului (y_n) există un număr natural n''_ε cu proprietatea că

$$|y_n - 0| < \varepsilon, \text{ oricare ar fi numărul natural } n \geq n''_\varepsilon,$$

sau echivalent

$$\frac{1}{y_n} > \frac{1}{\varepsilon}, \text{ oricare ar fi numărul natural } n \geq n''_\varepsilon,$$

deoarece $y_n > 0$, oricare ar fi numărul natural n .

Atunci, pentru orice număr natural $n \geq n_\varepsilon := \max\{n'_\varepsilon, n''_\varepsilon\}$, avem

$$\frac{x_n}{y_n} > \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon} = \varepsilon.$$

Prin urmare, pentru orice $\varepsilon > 0$ există un număr natural n_ε cu proprietatea că

$$\frac{x_n}{y_n} > \varepsilon, \text{ oricare ar fi numărul natural } n \geq n_\varepsilon.$$

În consecință șirul (x_n/y_n) are limita $+\infty$.

Celelalte afirmații se demonstrează similar. ■

Observația 1.1.26 În cazul când șirul $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ are limita 0, iar șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ are limita $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, atunci avem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x_n}{y_n} \right| = +\infty.$$

Trebuie observat că este posibil ca șirul (x_n/y_n) să nu aibă limită. ◇

Dacă $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ și $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sunt șiruri, cu $x_n > 0$, oricare ar fi numărul natural n , atunci relativ la limita șirului $((x_n)^{y_n})_{n \in \mathbb{N}}$, avem următoarea teoremă:

Teorema 1.1.27 Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ și $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ șiruri convergente, cu $x_n > 0$, oricare ar fi numărul natural n .

1⁰ Dacă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n > 0 \quad \text{\textit{și}} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \neq 0,$$

atunci șirul $((x_n)^{y_n})$ are limită și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n)^{y_n} = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right)^{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n}.$$

2⁰ Dacă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \quad \text{\textit{și}} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n > 0,$$

atunci șirul $((x_n)^{y_n})$ are limită și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n)^{y_n} = 0.$$

Demonstrație. 1⁰ Fie $x := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n > 0$ și $y := \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \neq 0$. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$, avem

$$(x_n)^{y_n} = \exp(\ln x_n^{y_n}) = \exp(y_n \ln x_n).$$

Din faptul că șirul (x_n) converge către x și (y_n) converge către y , deducem că există

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln x_n = \ln x \quad \text{\textit{și}} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (y_n \ln x_n) = y \ln x.$$

Așadar există

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \exp(y_n \ln x_n) = \exp(y \ln x) = x^y$$

și deci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n)^{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \exp(y_n \ln x_n) = x^y.$$

Afirmația 2⁰ se demonstrează similar. ■

Observația 1.1.28 Dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$, atunci despre șirul $((x_n)^{y_n})$ nu putem afirma nimic, relativ la existența sau neexistența limitei. Uneori șirul $((x_n)^{y_n})$ are limită, alteori nu are limită. Putem arăta că, oricare ar fi $x \in [0, +\infty]$, există două șiruri (x_n) și (y_n) , ambele cu limita 0, astfel încât șirul $((x_n)^{y_n})$ să aibă limita x . De aceea se spune că operația 0^0 , **nu are sens** sau că **nu este definită**. Acest caz exceptat formează așa numitul ”**caz de nedeterminare** 0^0 ”. Existența sau neexistența limitei în cazul de nedeterminare 0^0 se stabilește ținând seama de expresia concretă a termenilor șirurilor (x_n) și (y_n) . ◇

Observația 1.1.29 Dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$, atunci despre șirul $((x_n)^{y_n})$ nu putem afirma nimic, relativ la existența sau neexistența limitei. Uneori șirul $((x_n)^{y_n})$ are limită, alteori nu are limită. Putem arăta că, oricare ar fi $x \in [0, +\infty]$, există un șir (x_n) cu limita $+\infty$ și un șir (y_n) cu limita 0, astfel încât șirul $((x_n)^{y_n})$ să aibă limita x . De aceea se spune că operația $(+\infty)^0$, **nu are sens** sau că **nu este definită**. Acest caz exceptat formează așa numitul ”**caz de nedeterminare** ∞^0 ”. Existența sau neexistența

limitei în cazul de nedeterminare ∞^0 se stabilește ținând seama de expresia concretă a termenilor șirurilor (x_n) și (y_n) . \diamond

Observația 1.1.30 Dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty$ (sau $-\infty$), atunci despre șirul $((x_n)^{y_n})$ nu putem afirma nimic, relativ la existența sau neexistența limitei. Uneori șirul $((x_n)^{y_n})$ are limită, alteori nu are limită. Putem arăta că, oricare ar fi $x \in [0, +\infty]$, putem găsi un șir (x_n) cu limita 1 și un șir (y_n) cu limita $+\infty$ (și $-\infty$), astfel încât șirul $((x_n)^{y_n})$ să aibă limita x . De aceea se spune că operația $1^{\pm\infty}$, **nu are sens** sau că **nu este definită**. Acest caz exceptat formează așa numitul ”**caz de nedeterminare 1^∞** ”. Existența sau neexistența limitei în cazul de nedeterminare 1^∞ se stabilește ținând seama de expresia concretă a termenilor șirurilor (x_n) și (y_n) .

Observația 1.1.31 Dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty$, atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n)^{y_n} = 0. \diamond$$

Observația 1.1.32 Dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n \in]0, +\infty[$, atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n)^{y_n} = +\infty. \diamond$$

Observația 1.1.33 Dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n \in [-\infty, 0[$, atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n)^{y_n} = 0. \diamond$$

Observațiile anterioare ne permit să scriem simbolic:

$$1^0 \quad \infty^\infty = \infty; \quad \infty^{-\infty} = 0;$$

$$2^0 \quad x^{+\infty} = \begin{cases} +\infty, & \text{dacă } x \in \mathbb{R}, \quad x > 1, \\ 0, & \text{dacă } x \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

$$3^0 \quad x^{-\infty} = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \in \mathbb{R}, \quad x > 1, \\ +\infty, & \text{dacă } x \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

$$4^0 \quad 0^{+\infty} = 0;$$

$$5^0 \quad \infty^x = \begin{cases} +\infty, & \text{dacă } x \in \mathbb{R}, \quad x > 0, \\ 0, & \text{dacă } x \in \mathbb{R}, \quad x < 0. \end{cases}$$

Nu se atribuie nici un sens pentru 1^∞ ; ∞^0 ; 0^0 , considerate cazuri exceptat la ridicare la putere în $\overline{\mathbb{R}}$.

1.5. Eliminarea unor nedeterminări. Vom începe cu două exemple simple:

Exemplul 1.1.34 Avem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (2n^3 + 5n^2 - 7) = +\infty.$$

Soluție. Într-adevăr, deoarece

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^3 = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = +\infty,$$

deducem că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (2n^3) = 2 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} n^3 = 2(+\infty) = +\infty,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (5n^2) = 5 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = 5(+\infty) = +\infty.$$

Folosind teorema relativă la limita sumei a două șiruri, deducem că

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (2n^3 + 5n^2 - 7) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (2n^3) + \lim_{n \rightarrow \infty} (5n^2) + \lim_{n \rightarrow \infty} (-7) = \\ &= (+\infty) + (+\infty) - 7 = +\infty - 7 = +\infty. \end{aligned}$$

■

Constatăm că, de fapt, pentru calculul limitei, am "înlocuit" pe n cu $+\infty$ ("valoarea" către care tinde n) și am efectuat calculele în $\overline{\mathbb{R}}$. Se spune că am calculat limita prin "înlocuire directă".

Exemplul 1.1.35 Avem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 + 5n^2 - 7}{n^3 + 3n - 2} = 2.$$

Soluție. Într-adevăr, procedând ca mai sus, prin înlocuire directă, obținem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 + 5n^2 - 7}{n^3 + 3n - 2} = \frac{(+\infty) + (+\infty) - 7}{(+\infty) + (+\infty) - 2} = \frac{+\infty}{+\infty},$$

care, așa cum am văzut, este o nedeterminare (cazul de nedeterminare $\frac{\infty}{\infty}$). Existența sau neexistența limitei în orice caz de nedeterminare se stabilește ținând seama de expresia concretă a termenilor șirurilor. Să observăm că, pentru fiecare număr natural $n \in \mathbb{N}$, avem

$$\frac{2n^3 + 5n^2 - 7}{n^3 + 3n - 2} = \frac{n^3 \left(2 + \frac{5}{n} - \frac{7}{n^3}\right)}{n^3 \left(1 + \frac{3}{n^2} - \frac{2}{n^3}\right)} = \frac{2 + \frac{5}{n} - \frac{7}{n^3}}{1 + \frac{3}{n^2} - \frac{2}{n^3}}.$$

Întrucât

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} = 0,$$

deducem că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n} = 5 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 5 \cdot 0 = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n^2} = 3 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 3 \cdot 0 = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7}{n^3} = 7 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n^3} = 2 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} = 0.$$

Atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{5}{n} - \frac{7}{n^3}}{1 + \frac{3}{n^2} - \frac{2}{n^3}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 2 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7}{n^3}}{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n^2} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n^3}} = \frac{2 + 0 - 0}{1 + 0 - 0} = 2$$

și deci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 + 5n^2 - 7}{n^3 + 3n - 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{5}{n} - \frac{7}{n^3}}{1 + \frac{3}{n^2} - \frac{2}{n^3}} = 2.$$

■

După modelele de rezolvare a acestor două limite, formulăm următoarea observație:

Observația 1.1.36 Atunci când calculăm limita unui șir dat prin termenul său general, se recomandă parcurgerea următorilor pași:

1⁰ Se efectuează ”*înlocuirea directă*” a lui n cu $+\infty$ (după o anumită experiență de calcul de limite aceasta se face, de obicei, oral) obținându-se o succesiune de operații în $\overline{\mathbb{R}}$.

2⁰ Dacă toate operațiile obținute au sens în $\overline{\mathbb{R}}$, atunci aceste operații se efectuează și limita este egală cu rezultatul operațiilor.

3⁰ Dacă prin ”*înlocuirea directă*” se obține o nedeterminare, atunci se efectuează anumite ”*artificii de calcul*” care să ”*elimine nedeterminarea*”, adică toate operațiile care apar să aibă sens în $\overline{\mathbb{R}}$. ◇

Metodele de eliminare a nedeterminărilor sunt variate; nu există o metodă generală de eliminare a nedeterminărilor. Aceste metode depind de expresia concretă a șirului a cărui limită dorim să o calculăm.

Prezentăm, în continuare, câteva probleme, din a căror rezolvare se deduc câteva metode de eliminare a nedeterminărilor.

1. Una din metodele de eliminare a nedeterminărilor este *metoda factorului comun*.

Exemplul 1.1.37 Să se calculeze

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n^4 - 2n^3 + 3n^2 - 5n).$$

Soluție. Evident suntem în cazul de nedeterminare ” $\infty - \infty$ ”. Pentru eliminarea nedeterminării dăm factor comun pe n^4 ; obținem că

$$n^4 - 2n^3 + 3n^2 - 5n = n^4 \left(1 - \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2} - \frac{5}{n^3} \right), \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N}.$$

Urmează că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n^4 - 2n^3 + 3n^2 - 5n) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^4 \left(1 - \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2} - \frac{5}{n^3} \right) =$$

$$= \left(\lim_{n \rightarrow \infty} n^4 \right) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2} - \frac{5}{n^3} \right) = (+\infty) \cdot 1 = +\infty.$$

■

2. O altă metodă de eliminare a nedeterminărilor este *amplificarea cu conjugata unei expresii iraționale*.

Exemplul 1.1.38 Să se calculeze

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \right).$$

Soluție. Înlocuirea directă ne conduce la nedeterminarea ” $\infty - \infty$ ”. Amplificăm cu conjugata de ordinul doi; obținem:

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}},$$

oricare ar fi numărul natural n . Deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) = +\infty$, deducem că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{+\infty} = 0.$$

■

3. În cazul nedeterminării 1^∞ , se recomandă să se încerce *organizarea lui e* (mai exact a unui ”subșir” al șirului (e_n)).

Exemplul 1.1.39 Să se calculeze

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2 + n + 1} \right)^n.$$

Soluție. Suntem în cazul de nedeterminare 1^∞ ; încercăm organizarea lui e . Pentru fiecare număr natural n , avem

$$\left(1 + \frac{1}{n^2 + n + 1} \right)^n = \left[\left(1 + \frac{1}{n^2 + n + 1} \right)^{n^2 + n + 1} \right]^{\frac{n}{n^2 + n + 1}}.$$

Întrucât, pentru fiecare număr natural n , avem

$$\left(1 + \frac{1}{n^2 + n + 1} \right)^{n^2 + n + 1} = e_{n^2 + n + 1},$$

deducem că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2 + n + 1} \right)^{n^2 + n + 1} = e.$$

Deoarece

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2 + n + 1} = 0,$$

obținem că

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2 + n + 1}\right)^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n^2 + n + 1}\right)^{n^2 + n + 1} \right]^{\frac{n}{n^2 + n + 1}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n^2 + n + 1}\right)^{n^2 + n + 1} \right]^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2 + n + 1}} = e^0 = 1. \end{aligned}$$

■

Problema rezolvată ne sugerează următoarea întrebare: Dacă avem un șir (x_n) cu limita $+\infty$, atunci șirul cu termenul general $\left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n}$ are limită? Mai mult, este această limită e ?

Cu mici precauții, răspunsul la aceste două întrebări este afirmativ.

Teorema 1.1.40 Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un șir de numere reale. Dacă

$$(1.1.4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty,$$

atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e.$$

Teorema 1.1.41 Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un șir de numere reale. Dacă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty,$$

atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e.$$

Demonstrație. Suntem în cazul de nedeterminare 1^∞ ; încercăm organizarea lui e . Fie $y_n = -x_n$, oricare ar fi numărul natural n . Evident

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty$$

și pentru fiecare număr natural n , avem

$$\left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = \left[\left(1 - \frac{1}{y_n}\right)^{y_n}\right]^{-1}.$$

Urmează că

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 - \frac{1}{y_n}\right)^{y_n}\right]^{-1} = \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{y_n}\right)^{y_n}\right]^{-1} = \\ &= \left(\frac{1}{e}\right)^{-1} = e. \end{aligned}$$

■

Din ultimele două teoreme deducem următoarea afirmație des folosită în eliminarea nedeterminării 1^∞ .

Teorema 1.1.42 Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un șir de numere reale. Dacă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0,$$

atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + x_n)^{\frac{1}{x_n}} = e. \diamond$$

Următorul rezultat permite eliminarea nedeterminării $\frac{0}{0}$ în calculul unor limite.

Teorema 1.1.43 Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un șir de numere reale. Dacă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0,$$

atunci:

$$1^0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + x_n)}{x_n} = 1.$$

$$2^0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{x_n} - 1}{x_n} = \ln a, \text{ oricare ar fi numărul real } a \in]0, +\infty[\setminus \{1\}.$$

$$3^0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 + x_n)^a - 1}{x_n} = a, \text{ oricare ar fi numărul real } a.$$

Demonstrație. 1^0 Suntem în cazul de nedeterminare $\frac{0}{0}$. Avem

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + x_n)}{x_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \ln(1 + x_n)^{1/x_n} = \\ &= \ln \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + x_n)^{1/x_n} = \ln e = 1. \end{aligned}$$

2^0 Suntem în cazul de nedeterminare $\frac{0}{0}$. Fie $y_n = a^{x_n} - 1$, oricare ar fi numărul natural n . Atunci

$$a^{x_n} = 1 + y_n \text{ și deci } x_n = \log_a(1 + y_n) = \frac{\ln(1 + y_n)}{\ln a}, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N}.$$

Deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$, obținem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{x_n} - 1}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n \ln a}{\ln(1 + y_n)} = (\ln a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{\ln(1 + y_n)}{y_n}} = \ln a \cdot 1 = \ln a.$$

3^0 Suntem în cazul de nedeterminare $\frac{0}{0}$. Fie $z_n = \ln(1 + x_n)$, oricare ar fi numărul natural n . Rezultă că $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$ și pentru orice număr natural n , avem $x_n = e^{z_n} - 1$. Urmează că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 + x_n)^a - 1}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{az_n} - 1}{e^{z_n} - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{az_n} - 1}{z_n} \cdot a = \frac{\ln e}{\ln e} \cdot a = a.$$

■

4⁰ În cazul nedeterminării ∞/∞ , un rol cu totul aparte îl ocupă teorema lui Cesàro-Stolz. Enunțul ei este următorul

Teorema 1.1.44 (teorema lui Cesàro-Stolz) Dacă șirurile $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ și $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfac următoarele condiții:

- (a) $y_n \neq 0$, oricare ar fi numărul natural n ;
- (b) șirul (y_n) este strict monoton și nemărginit;
- (c) există limita

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} \in \overline{\mathbb{R}},$$

atunci șirul $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ are limită și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}.$$

Demonstrație. Demonstrația se găsește în [5]. ■

Exemplul 1.1.45 Să se calculeze

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}}{\ln n}.$$

Soluție. Evident șirul $(\ln n)_{n \geq 2}$ este strict crescător și nemărginit. Deoarece

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1}\right)}{\ln n - \ln(n-1)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\ln \frac{n}{n-1}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n} = \frac{1}{\ln \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n} = \frac{1}{\ln e} = 1, \end{aligned}$$

în baza teoremei lui Cesàro-Stolz, deducem că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}}{\ln n} = 1.$$

■

2. Probleme propuse spre rezolvare - șiruri

Exercițiul 1.2.1 Calculați limitele următoarelor șiruri de numere reale având ca termen general:

$$\begin{aligned} a) \quad & \frac{3^n}{4^n}, & b) \quad & \frac{2^n + (-2)^n}{3^n}, & c) \quad & \frac{5 - n^3}{n^2 + 1}, & d) \quad & \left(2 + \frac{4^n + (-5)^n}{7^n + 1}\right)^{2n^3 - n^2}, \\ e) \quad & \frac{1 + 2 + \dots + n}{n^2}, & f) \quad & \left(\frac{n^3 + 4n + 1}{2n^3 + 5}\right)^{\frac{-2n^4 + 1}{n^4 + 3n + 1}}, & g) \quad & (\cos(-2013))^n, \\ h) \quad & \left(\frac{n^5 + 3n + 1}{2n^5 - n^4 + 3}\right)^{\frac{3n - n^4}{n^3 + 1}}. \end{aligned}$$

Exercițiul 1.2.2 Calculați limitele următoarelor șiruri de numere reale

$$\begin{aligned} a) \quad & \left(1 + \frac{1}{-n^3 + 3n}\right)^{n^2 - n^3}, & b) \quad & (3n^2 + 5)\ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right), \\ c) \quad & \frac{n^n}{1^1 + 2^2 + \dots + n^n}, \\ d) \quad & \frac{x_1 + 2x_2 + \dots + nx_n}{n^2}, \end{aligned}$$

unde $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este un șir convergent către $x \in \mathbb{R}$.

Exercițiul 1.2.3 Calculați limitele șirurilor de numere reale având termenul general:

$$\begin{aligned} a) \quad & x_n = \frac{a^n - a^{-n}}{a^n + a^{-n}}, \quad a \neq 0 \\ b) \quad & y_n = \frac{a^n + b^n}{a^{n+1} + b^{n+1}}, \quad a \neq -b \\ c) \quad & z_n = \frac{1 + a + \dots + a^n}{1 + b + \dots + b^n}, \quad a, b > 0. \end{aligned}$$

Observația 1.2.1 Pentru mai multe detalii puteți consulta [5] și [2].

3. Serii de numere reale

Noțiunea de *serie* este extensia naturală a noțiunii de sumă finită. Studiul seriilor se reduce la studiul unor șiruri de numere. Determinarea sumei unei serii se reduce la calculul unei limite.

Însumarea progresiilor geometrice infinite cu rația mai mică în modul decât 1 se efectua deja din antichitate (Arhimede). Divergența seriei armonice a fost stabilită de învățatul italian Mengoli în 1650. Seriile apar constant în calculele savanților din secolul al XVIII-lea, dar neacordându-se totdeauna atenția necesară problemelor convergenței. O teorie riguroasă a seriilor a început cu lucrările lui Gauss (1812), Bolzano (1817) și, în sfârșit, Cauchy (1821) care dă pentru prima dată definiția valabilă și azi, a sumei unei serii convergente și stabilește teoremele de bază.

3.1. Noțiuni generale. În acest paragraf vom defini noțiunile de serie de numere, serie convergentă, serie divergentă, sumă a unei serii de numere.

Definiția 1.3.1 Se numește **serie de numere reale** orice pereche ordonată $((u_n), (s_n))_{n \in \mathbb{N}}$ unde $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este un șir de numere reale, iar

$$s_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n, \quad \text{oricare ar fi } n \in \mathbb{N}. \quad \diamond$$

Prin tradiție seria $((u_n), (s_n))$ se notează

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad \text{sau} \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n \quad \text{sau} \quad \sum_{n \geq 1} u_n \quad \text{sau} \quad u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

sau, când nu este pericol de confuzie, se notează simplu prin

$$\sum u_n.$$

Numărul real u_n , ($n \in \mathbb{N}$) se numește **termenul general** al seriei $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, iar șirul (u_n) **șirul termenilor** seriei $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. Numărul real s_n , ($n \in \mathbb{N}$) se numește **suma parțială de rang n** a seriei $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, iar șirul (s_n) **șirul sumelor parțiale** ale seriei $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Definiția 1.3.2 Spunem că seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = ((u_n), (s_n))$ este **convergentă** dacă șirul (s_n) al sumelor parțiale este convergent.

Orice serie care nu este convergentă se numește **divergentă**. \diamond

Dacă șirul (s_n) al sumelor parțiale ale seriei $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = ((u_n), (s_n))$ are limita $s \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, atunci spunem că seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ **are suma s** (sau că s **este suma** seriei $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$)

și vom scrie

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = s.$$

Exemplul 1.3.3 Seria

$$(1.3.5) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

are termenul general $u_n = 1/(n(n+1))$, ($n \in \mathbb{N}$) și suma parțială de rang $n \in \mathbb{N}$ egală cu

$$s_n = u_1 + \cdots + u_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Întrucât șirul sumelor parțiale este convergent, seria (1.3.5) este convergentă. Deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 1$, suma seriei (1.3.5) este 1; prin urmare scriem

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1. \diamond$$

Exemplul 1.3.4 Se numește **serie geometrică** (de rație q) orice serie de forma

$$(1.3.6) \quad \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1},$$

unde q este un număr real fixat. Evident termenul general al seriei geometrice (1.3.6) este $u_n = q^{n-1}$, ($n \in \mathbb{N}$), iar suma parțială de rang $n \in \mathbb{N}$ este

$$s_n = 1 + q + \cdots + q^{n-1} = \begin{cases} \frac{1 - q^n}{1 - q}, & \text{dacă } q \neq 1 \\ n, & \text{dacă } q = 1. \end{cases}$$

De aici deducem imediat că seria geometrică (1.3.6) este convergentă dacă și numai dacă $|q| < 1$. Dacă $|q| < 1$, atunci seria geometrică (1.3.6) are suma $1/(1 - q)$ și scriem

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = \frac{1}{1 - q}.$$

Dacă $q \geq 1$, atunci seria geometrică (1.3.6) este divergentă; în acest caz seria are suma $+\infty$ și scriem

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = +\infty.$$

Dacă $q \leq -1$, atunci seria geometrică (1.3.6) este divergentă și nu are sumă. \diamond

Studiul unei serii comportă două probleme:

- 1) Stabilirea naturii seriei, adică a faptului că seria este convergentă sau divergentă.
- 2) În cazul în care seria este convergentă, determinarea sumei seriei.

Dacă pentru rezolvarea primei probleme dispunem de criteriul de convergență și divergență, pentru rezolvarea celei de a doua probleme nu dispunem de metode de determinare a sumei unei serii decât pentru câteva serii particulare.

În cele ce urmează vom da câteva criterii de convergență și divergență pentru serii.

Teorema 1.3.5 (*criteriul general de convergență, criteriul lui Cauchy*) *Seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă dacă și numai dacă pentru fiecare număr real $\varepsilon > 0$ există un număr natural n_ε cu proprietatea că oricare ar fi numerele naturale n și p cu $n \geq n_\varepsilon$ avem*

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| < \varepsilon.$$

Demonstrație. Fie $s_n = u_1 + \cdots + u_n$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$. Atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă dacă și numai dacă șirul (s_n) al sumelor parțiale este convergent, prin urmare, în baza teoremei lui Cauchy, dacă și numai dacă șirul (s_n) este fundamental, adică dacă și numai dacă oricare ar fi numărul real $\varepsilon > 0$ există un număr natural n_ε cu proprietatea că oricare ar fi numerele naturale n și p cu $n \geq n_\varepsilon$ avem $|s_{n+p} - s_n| < \varepsilon$. Întrucât

$$s_{n+p} - s_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}, \text{ oricare ar fi } n, p \in \mathbb{N},$$

teorema este demonstrată. ■

Exemplul 1.3.6 Seria

$$(1.3.7) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

numită *seria armonică*, este divergentă și are suma $+\infty$.

Soluție. Presupunem prin absurd că seria armonică (1.3.7) este convergentă; atunci, în baza criteriului general de convergență (teorema 1.3.5), pentru $\varepsilon = 1/2 > 0$ există un număr natural n_0 cu proprietatea că oricare ar fi numerele naturale n și p cu $n \geq n_0$ avem

$$\left| \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+p} \right| < \frac{1}{2}.$$

De aici, luând $p = n = n_0 \in \mathbb{N}$, obținem

$$(1.3.8) \quad \frac{1}{n_0+1} + \cdots + \frac{1}{n_0+n_0} < \frac{1}{2}.$$

Pe de altă parte, din $n_0 + k \leq n_0 + n_0$, oricare ar fi $k \in \mathbb{N}$, $k \leq n_0$ deducem

$$\frac{1}{n_0+1} + \cdots + \frac{1}{n_0+n_0} \geq \frac{n_0}{2n_0} = \frac{1}{2}$$

și deci inegalitatea (1.3.8) nu are loc. Această contradicție ne conduce la concluzia că seria armonică (1.3.7) este divergentă. Deoarece șirul (s_n) al sumelor parțiale este strict crescător avem că

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$

■

Exemplul 1.3.7 Seria

$$(1.3.9) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{2^n}$$

este convergentă.

Soluție. Fie $u_n = (\sin n)/2^n$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$; atunci pentru fiecare $n, p \in \mathbb{N}$ avem

$$\begin{aligned} |u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| &= \left| \frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}} + \cdots + \frac{\sin(n+p)}{2^{n+p}} \right| \leq \\ &\leq \frac{|\sin(n+1)|}{2^{n+1}} + \cdots + \frac{|\sin(n+p)|}{2^{n+p}} \leq \frac{1}{2^{n+1}} + \cdots + \frac{1}{2^{n+p}} = \\ &= \frac{1}{2^n} \left(1 - \frac{1}{2^p} \right) < \frac{1}{2^n}. \end{aligned}$$

Fie $\varepsilon > 0$. Întrucât șirul $(1/2^n)$ este convergent către 0, deducem că există un număr natural n_ε cu proprietatea că $1/2^n < \varepsilon$, oricare ar fi numărul natural $n \geq n_\varepsilon$. Atunci

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| < \frac{1}{2^n} < \varepsilon,$$

oricare ar fi numerele naturale n, p cu $n \geq n_\varepsilon$. Prin urmare seria (1.3.9) este convergentă.

■

Teorema 1.3.8 *Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă, atunci șirul (u_n) este convergent către zero.*

Demonstrație. Fie $\varepsilon > 0$; atunci, în baza criteriului general de convergență al lui Cauchy (teorema 1.3.5), există un număr natural n_ε cu proprietatea că

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| < \varepsilon, \text{ oricare ar fi } n, p \in \mathbb{N} \text{ cu } n \geq n_\varepsilon.$$

Dacă aici luăm $p = 1$, obținem că $|u_{n+1}| < \varepsilon$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$, de unde deducem că

$$|u_n| < \varepsilon, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N}, n \geq n_\varepsilon + 1;$$

prin urmare șirul (u_n) converge către 0. ■

Observația 1.3.9 Reciproca teoremei 1.3.8, în general, nu este adevărată în sensul că există serii $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ cu șirul (u_n) convergent către 0 și totuși seria nu este convergentă. De exemplu seria armonică (1.3.7) este divergentă deși șirul $(1/n)$ este convergent către 0. \diamond

Teorema 1.3.10 Fie m un număr natural. Atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă dacă și numai dacă seria $\sum_{n=m}^{\infty} u_n$ este convergentă.

Demonstrație. Fie $s_n = u_1 + \dots + u_n$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$ și $t_n = u_m + \dots + u_n$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$ $n \geq m$. Atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă dacă și numai dacă șirul $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este convergent, prin urmare dacă și numai dacă șirul $(t_n)_{n \geq m}$ este convergent, așadar dacă și numai dacă seria $\sum_{n=m}^{\infty} u_n$ este convergentă. ■

Teorema 1.3.11 Dacă $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ și $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ sunt serii convergente și a și b sunt numere reale, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} (au_n + bv_n)$ este convergentă și are suma

$$a \sum_{n=1}^{\infty} u_n + b \sum_{n=1}^{\infty} v_n.$$

Demonstrație. Evident, pentru fiecare număr natural n avem

$$\sum_{k=1}^n (au_k + bv_k) = a \left(\sum_{k=1}^n u_k \right) + b \left(\sum_{k=1}^n v_k \right),$$

de unde, în baza proprietăților șirurilor convergente, obținem afirmația teoremei. ■

Exemplul 1.3.12 Întrucât seriile

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} \quad \text{și} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{n-1}}$$

sunt convergente și au suma 2 respectiv $3/2$, deducem că seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3^{n-1}} \right)$$

este convergentă și are suma $(1/2) \cdot 2 - (1/3) \cdot (3/2) = 1/2$. \diamond

Definiția 1.3.13 Fie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ o serie convergentă cu suma s , n un număr natural și $s_n = u_1 + \dots + u_n$ suma parțială de rang n a seriei $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. Numărul real $r_n = s - s_n$ se numește **restul de ordinul n** al seriei $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. \diamond

Teorema 1.3.14 Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă, atunci șirul (r_n) al resturilor ei este convergent către 0.

Demonstrație. Fie $s = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$. Deoarece șirul (s_n) al sumelor parțiale ale seriei $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergent către $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ și $r_n = s - s_n$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, avem că șirul (r_n) este convergent către 0. \blacksquare

4. Serii cu termeni pozitivi

Dacă $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este o serie de numere reale convergentă, atunci șirul (s_n) al sumelor parțiale este mărginit. Reciproca acestei afirmații, în general nu este adevărată în sensul că există serii divergente care au șirul sumelor parțiale mărginit. Într-adevăr, seria $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$ are șirul sumelor parțiale cu termenul general s_n , ($n \in \mathbb{N}$) egal cu

$$s_n = \begin{cases} 1, & \text{dacă } n \text{ este par} \\ 0, & \text{dacă } n \text{ este impar.} \end{cases}$$

Evident șirul (s_n) este mărginit ($|s_n| \leq 1$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$) deși seria $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$ este divergentă (șirul (s_n) nu este convergent).

Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ are termenii numere reale pozitive, atunci șirul (s_n) al sumelor parțiale este crescător; în acest caz faptul că șirul (s_n) este mărginit este echivalent cu faptul că șirul (s_n) este convergent.

Scopul acestui paragraf este de a da criteriile de convergență pentru așa numitele serii cu termeni pozitivi.

Definiția 1.4.1 Se numește **serie cu termeni pozitivi** orice serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ care are proprietatea că $u_n > 0$ oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$. \diamond

Pentru seriile cu termeni pozitivi are loc următoarea afirmație.

Teorema 1.4.2 Dacă $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ o serie cu termeni pozitivi, atunci

1⁰ Seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ are sumă și

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sup \left\{ \sum_{k=1}^n u_k : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

2⁰ Seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă dacă și numai dacă șirul $\left(\sum_{k=1}^n u_k \right)$ al sumelor parțiale este mărginit.

Demonstrație. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$ punem

$$s_n := \sum_{k=1}^n u_k.$$

1⁰ Șirul (s_n) este crescător și atunci, în baza teoremei lui Weierstrass relativă la șirurile monotone, afirmația 1⁰ este dovedită.

2⁰ Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă, atunci șirul sumelor parțiale (s_n) este convergent și deci mărginit.

Dacă șirul (s_n) este mărginit, atunci, întrucât el este monoton, deducem că șirul (s_n) este convergent și prin urmare seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă. ■

Teorema 1.4.3 (primul criteriu al comparației) Dacă $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ și $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ sunt serii cu termeni pozitivi cu proprietatea că există un număr real $a > 0$ și un număr natural n_0 astfel încât

$$(1.4.10) \quad u_n \leq av_n \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N}, n \geq n_0,$$

atunci:

1⁰ Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ este convergentă, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă.

2⁰ Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este divergentă, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ este divergentă.

Demonstrație. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$, fie $s_n = u_1 + \dots + u_n$ și $t_n = v_1 + \dots + v_n$; atunci din (1.4.10) avem că

$$(1.4.11) \quad s_n \leq s_{n_0} + a(v_{n_0+1} + \dots + v_n), \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N}, n \geq n_0.$$

1⁰ Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ este convergentă, atunci șirul (t_n) este mărginit, prin urmare există un număr real $M > 0$ cu proprietatea că $t_n \leq M$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$. Acum din (1.4.11) deducem că pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ au loc inegalitățile

$$s_n \leq s_{n_0} + a(t_n - t_{n_0}) \leq s_{n_0} + at_n - at_{n_0} \leq s_{n_0} + at_n \leq s_{n_0} + aM,$$

de unde rezultă că șirul (s_n) este mărginit. Atunci, în baza teoremei 1.4.2, seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă.

2⁰ Presupunem că seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este divergentă. Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ ar fi convergentă, atunci în baza afirmației 1⁰, seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ar fi convergentă, ceea ce contrazice ipoteza că seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este divergentă. Așadar seria $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ este divergentă. ■

Exemplul 1.4.4 Seria $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2}$ este divergentă. Într-adevăr, din inegalitatea $\sqrt{n} \leq n$ adevărată oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, obținem că $n^{-1} \leq n^{-1/2}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$. Cum seria armonică $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}$ este divergentă, în baza teoremei 1.4.2, afirmația 2⁰, deducem că seria $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2}$ este divergentă. ◇

Teorema 1.4.5 (al doilea criteriu al comparației) Dacă $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ și $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ sunt serii cu termeni pozitivi cu proprietatea că există

$$(1.4.12) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} \in [0, +\infty],$$

atunci

1⁰ Dacă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} \in]0, +\infty[,$$

atunci seriile $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ și $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ au aceeași natură.

2⁰ Dacă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = 0,$$

atunci:

a) Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ este convergentă, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă.

b) Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este divergentă, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ este divergentă.

3⁰ Dacă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = +\infty,$$

atunci:

a) Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ este convergentă.

b) Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ este divergentă, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este divergentă.

Demonstrație. 1^0 Fie $a := \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n/v_n) \in]0, +\infty[$; atunci există un număr natural n_0 cu proprietatea că

$$\left| \frac{u_n}{v_n} - a \right| < \frac{a}{2}, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N}, n \geq n_0,$$

de unde deducem că

$$(1.4.13) \quad v_n \leq (2/a) u_n, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$$

și

$$(1.4.14) \quad u_n \leq (3a/2) v_n, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N}, n \geq n_0.$$

Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă, atunci în baza primului criteriu al comparației (teorema 1.4.3), aplicabil pentru că are loc (1.4.13), obținem că seria $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ este convergentă.

Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ este convergentă, atunci ținând seama de (1.4.14), în baza primului criteriu al comparației (teorema 1.4.3) rezultă că seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă.

2^0 Dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n/v_n) = 0$, atunci există un număr natural n_0 astfel încât $u_n/v_n < 1$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, de unde deducem că

$$u_n \leq v_n, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N}, n \geq n_0.$$

Aplicăm acum primul criteriu al comparației.

3^0 Dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n/v_n) = +\infty$, atunci există un număr natural n_0 astfel încât $u_n/v_n > 1$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, de unde deducem că

$$v_n \leq u_n, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N}, n \geq n_0.$$

Aplicăm acum primul criteriu al comparației. ■

Exemplul 1.4.6 Seria $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}$ este convergentă. Într-adevăr, din

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n(n+1)} = 1 \in]0, +\infty[,$$

deducem că seriile $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}$ și $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ au aceeași natură. Cum seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ este convergentă (vezi exemplul 1.3.3), obținem că seria $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}$ este convergentă. ◇

Teorema 1.4.7 (al treilea criteriu al comparației) *Dacă $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ și $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ sunt serii cu termeni pozitivi cu proprietatea că există un număr natural n_0 astfel încât:*

$$(1.4.15) \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N}, n \geq n_0,$$

atunci:

1^o *Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ este convergentă, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă.*

2^o *Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este divergentă, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ este divergentă.*

Demonstrație. Fie $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 + 1$; atunci din (1.4.15) avem succesiv:

$$\begin{aligned} \frac{u_{n_0+1}}{u_{n_0}} &\leq \frac{v_{n_0+1}}{v_{n_0}} \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \frac{u_n}{u_{n-1}} &\leq \frac{v_n}{v_{n-1}}, \end{aligned}$$

de unde, prin înmulțire membru cu membru, obținem

$$\frac{u_n}{u_{n_0}} \leq \frac{v_n}{v_{n_0}}.$$

Așadar

$$u_n \leq \frac{u_{n_0}}{v_{n_0}} v_n, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N}, n \geq n_0.$$

Aplicăm acum primului criteriu al comparației (teorema 1.4.3). Teorema este demonstrată.

■

Teorema 1.4.8 (criteriul condensării al lui Cauchy) *Fie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ o serie cu termeni pozitivi cu proprietatea că șirul (u_n) al termenilor seriei este descrescător. Atunci seriile $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ și $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n u_{2^n}$ au aceeași natură.*

Demonstrație. Fie $s_n := u_1 + u_2 + \dots + u_n$ suma parțială de rang $n \in \mathbb{N}$ a seriei $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ și fie $S_n := 2u_2 + 2^2u_{2^2} + \dots + 2^n u_{2^n}$ suma parțială de rang $n \in \mathbb{N}$ a seriei $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n u_{2^n}$.

Presupunem că seria $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n u_{2^n}$ este convergentă; atunci șirul (S_n) al sumelor parțiale este mărginit, prin urmare există un număr real $M > 0$ astfel încât

$$0 \leq S_n \leq M, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N}.$$

Pentru a arăta că seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă, în baza teoremei 1.4.2, este suficient să arătăm că șirul (s_n) al sumelor parțiale este mărginit. Deoarece seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este cu termeni pozitivi, din $n \leq 2^{n+1} - 1$, ($n \in \mathbb{N}$) deducem că

$$s_n \leq s_{2^{n+1}-1} = u_1 + (u_2 + u_3) + (u_4 + \cdots + u_7) + \\ + (u_{2^n} + u_{2^n+1} + \cdots + u_{2^{n+1}-1}).$$

Întrucât șirul (u_n) este descrescător, urmează că

$$u_{2^k} > u_{2^k+1} > \cdots > u_{2^{k+1}-1}, \text{ oricare ar fi } k \in \mathbb{N}$$

și deci s_n se poate delimita mai departe astfel

$$s_n \leq s_{2^{n+1}-1} \leq u_1 + 2 \cdot u_2 + 2^2 \cdot u_{2^2} + \cdots + 2^n \cdot u_{2^n} = \\ = u_1 + S_n \leq u_1 + M.$$

Așadar șirul (s_n) este mărginit și deci seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă.

Presupunem acum că seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă; atunci șirul (s_n) al sumelor parțiale ale seriei $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este mărginit, prin urmare există un număr real $M > 0$ astfel încât $0 \leq s_n \leq M$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$. Pentru a arăta că seria $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n u_{2^n}$ este convergentă, este suficient să arătăm că șirul (S_n) este mărginit. Fie deci $n \in \mathbb{N}$. Atunci

$$s_{2^n} = u_1 + u_2 + (u_3 + u_4) + (u_5 + u_6 + u_7 + u_8) + \cdots + \\ + (u_{2^{n-1}+1} + \cdots + u_{2^n}) \geq \\ \geq u_1 + u_2 + 2u_{2^2} + 2^2 u_{2^3} + \cdots + 2^{n-1} u_{2^n} \geq \\ \geq u_1 + \frac{1}{2} S_n \geq \frac{1}{2} S_n,$$

prin urmare avem inegalitățile

$$S_n \leq 2s_{2^n} \leq 2M.$$

Așadar șirul (S_n) este mărginit și deci seria $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n u_{2^n}$ este convergentă. ■

Exemplul 1.4.9 Seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}, \text{ unde } a \in \mathbb{R},$$

numită **seria armonică generalizată**, este divergentă pentru $a \leq 1$ și convergentă pentru $a > 1$.

Soluție. Într-adevăr, dacă $a \leq 0$, atunci șirul termenilor seriei (n^{-a}) nu converge către zero și deci seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$ este divergentă. Dacă $a > 0$, atunci șirul termenilor seriei (n^{-a}) este descrescător convergent către zero și deci putem aplica criteriul condensării; seriile $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$ și $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{(2^n)^a}$ au aceeași natură. Întrucât $2^n \frac{1}{(2^n)^a} = \left(\frac{1}{2^{a-1}}\right)^n$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, deducem că seria $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{(2^n)^a}$ este de fapt seria geometrică $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{a-1}}\right)^n$, divergentă pentru $a \leq 1$ și convergentă pentru $a > 1$. Urmează că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$ este divergentă pentru $a \leq 1$ și convergentă pentru $a > 1$. ■

Teorema 1.4.10 (criteriul raportului, criteriul lui D'Alembert) Fie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ o serie cu termeni pozitivi.

1⁰ Dacă există un număr real $q \in [0, 1[$ și un număr natural n_0 astfel încât:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq q \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N}, n \geq n_0,$$

atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă.

2⁰ Dacă există un număr natural n_0 astfel încât:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1 \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N}, n \geq n_0,$$

atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este divergentă.

Demonstrație. 1⁰ Aplicăm al treilea criteriu al comparației (teorema 1.4.7, afirmația 1⁰), luând $v_n := q^{n-1}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$. Avem

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq q = \frac{v_{n+1}}{v_n}, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N}, n \geq n_0,$$

iar seria $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ este convergentă, prin urmare seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă.

2⁰ Din $u_{n+1}/u_n \geq 1$ deducem că $u_{n+1} \geq u_n$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, prin urmare șirul (u_n) nu converge către 0; atunci, în baza teoremei 1.3.8, seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este divergentă. ■

Teorema 1.4.11 (consecința criteriului raportului) Fie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ o serie cu termeni pozitivi pentru care există $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$.

1⁰ Dacă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1,$$

atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă.

2⁰ Dacă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1,$$

atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este divergentă.

Demonstrație. Fie $a := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$. Evident $a \geq 0$.

1⁰ Întrucât $a \in [0, 1[$ deducem că există un număr real $q \in]a, 1[$. Atunci, din $a \in]a-1, q[$ rezultă că există un număr natural n_0 astfel încât

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \in]a-1, q[, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N}, n \geq n_0.$$

Urmează că

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq q, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N}, n \geq n_0.$$

Aplicând acum criteriul raportului, obținem că seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă.

2⁰ Dacă $1 < a$, atunci există un număr natural n_0 astfel încât

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N}, n \geq n_0.$$

Aplicând acum criteriul raportului, obținem că seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este divergentă. ■

Exemplul 1.4.12 Seria

$$(1.4.16) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!}$$

este convergentă.

Soluție. Avem că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{27} < 1,$$

și atunci, în baza consecinței criteriului raportului, seria (1.4.16) este convergentă. ■

Observația 1.4.13 Dacă pentru seria cu termeni pozitivi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ există limita $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ și este egală cu 1, atunci consecința criteriului raportului nu decide dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă sau divergentă; există serii convergente, dar și serii divergente pentru care $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$. Într-adevăr, pentru seriile $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}$ și $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}$ avem, în ambele cazuri, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, prima serie fiind divergentă (vezi exemplul 1.3.3) și a doua serie fiind convergentă (vezi exemplul 1.4.6). ◇

Teorema 1.4.14 (criteriul radicalului, criteriul lui Cauchy) Fie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ o serie cu termeni pozitivi.

1⁰ Dacă există un număr real $q \in [0, 1[$ și un număr natural n_0 astfel încât

$$(1.4.17) \quad \sqrt[n]{u_n} \leq q, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N}, n \geq n_0,$$

atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă.

2⁰ Dacă există un număr natural n_0 astfel încât

$$(1.4.18) \quad \sqrt[n]{u_n} \geq 1, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N}, n \geq n_0,$$

atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este divergentă.

Demonstrație. 1⁰ Presupunem că există $q \in [0, 1[$ și $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât (1.4.17) să aibă loc. Atunci

$$u_n \leq q^n, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N}, n \geq n_0.$$

Aplicăm acum primul criteriu al comparației (teorema 1.4.3, afirmația 1⁰), luând $v_n := q^{n-1}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$ și $a := q$. Întrucât seria $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$ este convergentă, obținem că seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă.

2⁰ Din (1.4.18) deducem că $u_n \geq 1$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, prin urmare șirul (u_n) nu converge către 0; atunci, în baza teoremei 1.3.8, seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este divergentă. ■

Teorema 1.4.15 (consecința criteriului radicalului) Fie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ o serie cu termeni pozitivi pentru care există $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n}$.

1⁰ Dacă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} < 1,$$

atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă.

2⁰ Dacă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} > 1,$$

atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este divergentă.

Demonstrație. Fie $a := \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n}$. Evident $a \geq 0$.

1⁰ Întrucât $a \in [0, 1[$ deducem că există un număr real $q \in]a, 1[$. Atunci, din $a \in]a-1, q[$ rezultă că există un număr natural n_0 astfel încât

$$\sqrt[n]{u_n} \in]a-1, q[, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N}, n \geq n_0.$$

Urmează că

$$\sqrt[n]{u_n} \leq q, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N}, n \geq n_0.$$

Aplicând acum criteriul radicalului, obținem că seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă.

2⁰ Dacă $1 < a$, atunci există un număr natural n_0 astfel încât

$$\sqrt[n]{u_n} \geq 1, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N}, n \geq n_0.$$

Aplicând acum criteriul radicalului, obținem că seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este divergentă. ■

Exemplul 1.4.16 Seria

$$(1.4.19) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[3]{n^3 + 3n^2 + 1} - \sqrt[3]{n^3 - n^2 + 1} \right)^n.$$

este convergentă.

Soluție. Avem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{n^3 + 3n^2 + 1} - \sqrt[3]{n^3 - n^2 + 1} \right) = \frac{4}{3} > 1.$$

și deci, în baza consecinței criteriului radicalului, seria (1.4.19) este divergentă. ■

Observația 1.4.17 Dacă pentru seria cu termeni pozitivi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ există limita $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n}$ și este egală cu 1, atunci consecința criteriului radicalului nu decide dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă sau divergentă; există serii convergente, dar și serii divergente pentru care $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = 1$. Într-adevăr, pentru seriile $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}$ și $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}$ avem, în ambele cazuri, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = 1$, prima serie fiind divergentă (vezi exemplul 1.3.3) și a doua serie fiind convergentă (vezi exemplul 1.4.6). ◇

Teorema 1.4.18 (criteriul lui Kummer) Fie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ o serie cu termeni pozitivi.

1⁰ Dacă există un șir $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, de numere reale pozitive, există un număr real $r > 0$ și există un număr natural n_0 cu proprietatea că

$$(1.4.20) \quad a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} \geq r, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N}, n \geq n_0,$$

atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă.

2⁰ Dacă există un șir (a_n) , de numere reale pozitive cu proprietatea că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ este divergentă și există un număr natural n_0 astfel încât

$$(1.4.21) \quad a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} \leq 0, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N}, n \geq n_0,$$

atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este divergentă.

Demonstrație. Pentru fiecare număr natural n , notăm cu

$$s_n := u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

suma parțială de rang n a seriei $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

1^0 Presupunem că există un șir (a_n) , de numere reale pozitive, există un număr real $r > 0$ și există un număr natural n_0 astfel încât (1.4.20) are loc. Să observăm că relația (1.4.20) este echivalentă cu

$$(1.4.22) \quad a_n u_n - a_{n+1} u_{n+1} \geq r u_{n+1}, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N}, n \geq n_0.$$

Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0 + 1$; atunci din (1.4.22) avem succesiv:

$$a_{n_0} u_{n_0} - a_{n_0+1} u_{n_0+1} \geq r u_{n_0+1},$$

. . .

$$a_{n-1} u_{n-1} - a_n u_n \geq r u_n,$$

de unde, prin adunare membru cu membru, obținem

$$a_{n_0} u_{n_0} - a_n u_n \geq r(u_{n_0+1} + \dots + u_n).$$

De aici deducem că, pentru fiecare număr natural $n \geq n_0$ avem

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^{n_0} u_k + \sum_{k=n_0+1}^n u_k \leq s_{n_0} + \frac{1}{r} (a_{n_0} u_{n_0} - a_n u_n) \leq \\ &\leq s_{n_0} + \frac{1}{r} a_{n_0} u_{n_0}, \end{aligned}$$

prin urmare șirul (s_n) al sumelor parțiale ale seriei $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este mărginit. În baza teoremei

1.4.2, seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă.

2^0 Presupunem că există un șir (a_n) , de numere reale pozitive, cu proprietatea că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ este divergentă și există un număr natural n_0 astfel încât (1.4.21) are loc. Evident (1.4.21) este echivalentă cu

$$\frac{1}{\frac{a_{n+1}}{a_n}} \leq \frac{u_{n+1}}{u_n}, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N}, n \geq n_0.$$

Deoarece seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ este divergentă, conform criteriului al III-lea al comparației seria

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este divergentă.

Teorema este demonstrată. ■

Teorema 1.4.19 (criteriul lui Raabe-Duhamel) Fie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ o serie cu termeni pozitivi.

1⁰ Dacă există un număr real $q > 1$ și un număr natural n_0 astfel încât

$$(1.4.23) \quad n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) \geq q \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N}, n \geq n_0,$$

atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă.

2⁰ Dacă există un număr natural n_0 astfel încât

$$(1.4.24) \quad n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) \leq 1 \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N}, n \geq n_0,$$

atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este divergentă.

Demonstrație. În criteriul lui Kummer (teorema 1.4.18) să luăm $a_n := n$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$; obținem

$$a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} = n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) - 1.$$

1⁰ Dacă luăm $r := q - 1 > 0$, atunci, întrucât (1.4.20) este echivalentă cu (1.4.23), deducem că seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă.

2⁰ Cum seria $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}$ este divergentă și (1.4.21) este echivalentă cu (1.4.24), obținem că seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este divergentă. ■

Teorema 1.4.20 (consecința criteriului lui Raabe-Duhamel) Fie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ o serie cu termeni pozitivi pentru care există limita

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right).$$

1⁰ Dacă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) > 1,$$

atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă.

2⁰ Dacă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) < 1,$$

atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este divergentă.

Demonstrație. Fie

$$b := \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right).$$

1^o Din $b > 1$ deducem că există un număr real $q \in]1, b[$. Atunci $b \in]q, b + 1[$ implică existența unui număr natural n_0 astfel încât

$$n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) \in]q, b + 1[, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N}, n \geq n_0,$$

de unde obținem că (1.4.23) are loc. Aplicând acum criteriul lui Raabe-Duhamel, rezultă că seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă.

2^o Dacă $b < 1$, atunci există un număr natural n_0 astfel încât (1.4.24) să aibă loc. Aplicând acum criteriul lui Raabe-Duhamel, rezultă că seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este divergentă. ■

Exemplul 1.4.21 Seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{a(a+1) \cdots (a+n-1)}, \text{ unde } a > 0,$$

este convergentă dacă și numai dacă $a > 2$.

Soluție. Avem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$$

și deci consecința criteriului raportului nu decide natura seriei. Deoarece

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) = a - 1,$$

în baza consecinței criteriului lui Raabe-Duhamel, dacă $a > 2$, atunci seria dată este convergentă, iar dacă $a < 2$ seria dată este divergentă. Dacă $a = 2$, atunci seria dată devine $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ care este divergentă. Așadar seria dată este convergentă dacă și numai dacă $a > 2$. ■

5. Probleme propuse spre rezolvare - serii

Exercițiul 1.5.1 Calculați suma umătoarelor serii geometrice:

$$a) \sum_{n \geq 3} \frac{3}{5^n}, \quad b) \sum_{n \geq 4} \frac{2^{n-3} + (-3)^{n+3}}{5^n}, \quad c) \sum_{n \geq 5} e^n, \quad d) \sum_{n \geq 2} \left(-\frac{1}{\pi} \right)^n \quad e) \sum_{n \geq 3} (-3)^n.$$

Exercițiul 1.5.2 Calculați suma umătoarelor serii telescopice:

$$a) \sum_{n \geq 1} \frac{1}{4n^2 - 1}, \quad b) \sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}, \quad c) \sum_{n \geq 5} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

$$d) \sum_{n \geq 1} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right), \quad e) \sum_{n \geq 2} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)}{\ln (n^{\ln(n+1)})}.$$

Exercițiul 1.5.3 Stabiliți natura următoarelor serii:

$$a) \sum_{n \geq 1} \frac{n+7}{\sqrt{n^2+7}}, \quad b) \sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}, \quad c) \sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}, \quad d) \sum_{n \geq 1} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n.$$

Exercițiul 1.5.4 Stabiliți natura următoarelor serii:

$$a) \sum_{n \geq 1} \frac{2^n + 3^n}{5^n}, \quad b) \sum_{n \geq 1} \frac{2^n}{3^n + 5^n}.$$

Exercițiul 1.5.5 Stabiliți natura următoarelor serii:

$$a) \sum_{n \geq 1} \frac{1}{2n-1}, \quad b) \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(2n-1)^2}, \quad c) \sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{4n^2-1}}, \quad d) \sum_{n \geq 1} \frac{\sqrt{n^2+n}}{\sqrt[3]{n^5-n}}.$$

Exercițiul 1.5.6 Stabiliți natura următoarelor serii:

$$a) \sum_{n \geq 1} \frac{100^n}{n!}, \quad b) \sum_{n \geq 1} \frac{2^n n!}{n^n}, \quad c) \sum_{n \geq 1} \frac{3^n n!}{n^n}, \quad d) \sum_{n \geq 1} \frac{(n!)^2}{2n^2}, \quad e) \sum_{n \geq 1} \frac{n^2}{\left(2 + \frac{1}{n} \right)^n}.$$

Exercițiul 1.5.7 Stabiliți, în funcție de valoarea parametrului $a > 0$, natura următoarelor serii:

$$a) \sum_{n \geq 1} \frac{a^n}{n^n}, \quad b) \sum_{n \geq 1} \left(\frac{n^2 + n + 1}{n^2} a \right)^n, \quad c) \sum_{n \geq 1} \frac{3^n}{2^n + a^n}.$$

Exemplul 1.5.1 Pentru fiecare $a, b > 0$, studiați natura seriei:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{a^n + b^n}; \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{a^n + b^n}; \quad c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n b^n}{a^n + b^n};$$

$$d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2a+1)(3a+1)\cdots(na+1)}{(2b+1)(3b+1)\cdots(nb+1)}.$$

Exemplul 1.5.2 Stabiliți natura seriilor:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{1}{2n+1}; \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}; \quad c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Exemplul 1.5.3 Pentru fiecare $a > 0$, studiați natura seriilor:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{a(a+1)\cdots(a+n)}; \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} a^{-(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})}; \quad c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n \cdot n!}{n^n}.$$

Observația 1.5.4 Pentru detalii puteți consulta [5].

CAPITOLUL 2

Formula lui Taylor

1. Polinomul lui Taylor: definiție, proprietăți

Formula lui Taylor, utilizată în special în aproximarea funcțiilor prin polinoame, este una din cele mai importante formule din matematică.

Definiția 2.1.1 Fie D o submulțime nevidă a mulțimii \mathbb{R} , $x_0 \in D$ și $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție derivabilă de n ori în punctul x_0 . Funcția (polinomială) $T_{n;x_0}f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin

$$(T_{n;x_0}f)(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$
$$(T_{n;x_0}f)(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \dots$$
$$\dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n, \text{ oricare ar fi } x \in \mathbb{R},$$

se numește **polinomul lui Taylor de ordin n atașat funcției f și punctului x_0** . \diamond

Observația 2.1.2 Polinomul lui Taylor de ordin n are gradul cel mult n . \diamond

Exemplul 2.1.3 Pentru funcția exponențială $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x) = \exp x, \text{ oricare ar fi } x \in \mathbb{R},$$

avem

$$f^{(k)}(x) = \exp x, \text{ oricare ar fi } x \in \mathbb{R} \text{ și } k \in \mathbb{N}.$$

Polinomul lui Taylor de ordin n atașat funcției exponențiale, $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, și punctului $x_0 = 0$ este

$$(T_{n;0} \exp)(x) = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \dots + \frac{1}{n!}x^n,$$

oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$. \diamond

Observația 2.1.4 Remarcăm că domeniul de definiție al polinomului lui Taylor este \mathbb{R} , nu domeniul de definiție al funcției f . Mai mult, fiind o funcție polinomială, $T_{n;x_0}f$ este o funcție indefinit derivabilă pe \mathbb{R} și, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, avem

$$\begin{aligned}(T_{n;x_0}f)'(x) &= f^{(1)}(x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{1!}(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} = \\ &= (T_{n-1;x_0}f')(x),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(T_{n;x_0}f)''(x) &= f^{(2)}(x_0) + \frac{f^{(3)}(x_0)}{1!}(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-2)!}(x-x_0)^{n-2} = \\ &= (T_{n-2;x_0}f'')(x),\end{aligned}$$

.....

$$\begin{aligned}(T_{n;x_0}f)^{(n-1)}(x) &= f^{(n-1)}(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{1!}(x-x_0) = \\ &= (T_{1;x_0}f^{(n-1)})(x),\end{aligned}$$

$$(T_{n;x_0}f)^{(n)}(x) = f^{(n)}(x_0) = (T_{0;x_0}f^{(n)})(x),$$

$$(T_{n;x_0}f)^{(k)}(x) = 0, \text{ oricare ar fi } k \in \mathbb{N}, k \geq n+1.$$

De aici deducem că

$$(T_{n;x_0}f)^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0), \text{ oricare ar fi } k \in \{0, 1, \dots, n\}$$

și

$$(T_{n;x_0}f)^{(k)}(x_0) = 0, \text{ oricare ar fi } k \in \mathbb{N}, k \geq n+1.$$

Prin urmare, polinomul lui Taylor de ordin n atașat funcției f și punctului x_0 cât și derivatele lui până la ordinul n coincid în x_0 cu funcția f și respectiv cu derivatele ei până la ordinul n .

2. Formula lui Taylor

Definiția 2.2.1 Fie D o submulțime nevidă a mulțimii \mathbb{R} , $x_0 \in D$ și $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție derivabilă de n ori în punctul x_0 . Funcția $R_{n;x_0}f : D \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin

$$(R_{n;x_0}f)(x) = f(x) - (T_{n;x_0}f)(x), \text{ oricare ar fi } x \in D$$

se numește **restul Taylor de ordinul n atașat funcției f și punctului x_0** .

Orice egalitate de forma

$$f = T_{n;x_0}f + R_{n;x_0}f,$$

unde pentru $R_{n;x_0}f$ este dată o formulă de calcul, se numește **formulă Taylor de ordinul n corespunzătoare funcției f și punctului x_0** . În acest caz $R_{n;x_0}f$ se numește restul de ordinul n al formulei lui Taylor. \diamond

Observația 2.2.2 Deoarece f și $T_{n;x_0}f$ sunt derivabile de n ori în x_0 , rezultă că și restul $R_{n;x_0}f = f - T_{n;x_0}f$ este o funcție derivabilă de n ori în x_0 și

$$(R_{n;x_0}f)^{(k)}(x_0) = 0, \text{ oricare ar fi } k \in \{0, 1, \dots, n\}.$$

Observația 2.2.3 Funcția $R_{n;x_0}f : D \rightarrow \mathbb{R}$ fiind derivabilă în x_0 este continuă în x_0 și deci există

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (R_{n;x_0}f)(x) = (R_{n;x_0}f)(x_0) = 0.$$

Aceasta înseamnă că pentru fiecare număr real $\varepsilon > 0$ există un număr real $\delta > 0$ astfel încât oricare ar fi $x \in D$ pentru care $|x - x_0| < \delta$ avem

$$|f(x) - (T_{n;x_0}f)(x)| < \varepsilon.$$

Prin urmare, pentru valorile lui $x \in D$, suficient de apropiate de x_0 , valoarea $f(x)$ poate fi aproximată prin $(T_{n;x_0}f)(x)$.

În cele ce urmează, vom preciza o caracterizare a restului.

Teorema 2.2.4 Fie I un interval din \mathbb{R} , $x_0 \in I$ și $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție derivabilă de n ori în punctul x_0 . Atunci

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(R_{n;x_0}f)(x)}{(x - x_0)^n} = 0.$$

Demonstrație. Aplicând de $n - 1$ ori regula lui l'Hôpital și ținând seama că

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0} = f^{(n)}(x_0),$$

obținem

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(R_{n;x_0}f)(x)}{(x - x_0)^n} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - (T_{n;x_0}f)(x)}{(x - x_0)^n} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - (T_{n;x_0}f)'(x)}{n(x - x_0)^{n-1}} = \dots \\ \dots &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - (T_{n;x_0}f)^{(n-1)}(x)}{n!(x - x_0)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0) - f^{(n)}(x_0)(x - x_0)}{n!(x - x_0)} = \\ &= \frac{1}{n!} \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0} - f^{(n)}(x_0) \right] = 0. \end{aligned}$$

■

Observația 2.2.5 Dacă notăm cu $\alpha_{n;x_0}f : I \rightarrow \mathbb{R}$ funcția definită prin

$$(\alpha_{n;x_0}f)(x) = \begin{cases} \frac{(R_{n;x_0}f)(x)}{(x-x_0)^n}, & \text{dacă } x \in I \setminus \{x_0\} \\ 0, & \text{dacă } x = x_0, \end{cases}$$

atunci, din teorema 2.2.4 rezultă că funcția $\alpha_{n;x_0}f$ este continuă în punctul x_0 . Mai mult, pentru fiecare $x \in I$ are loc egalitatea:

$$f(x) = (T_{n;x_0}f)(x) + (x-x_0)^n (\alpha_{n;x_0}f)(x). \diamond$$

Exemplul 2.2.6 Pentru funcția exponențială, $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, formula lui Taylor-Young, pentru $x_0 = 0$, are forma:

$$\exp x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + x^n (\alpha_{n;0}f)(x),$$

oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, unde

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\alpha_{n;0}f)(x) = (\alpha_{n;0}f)(0) = 0. \diamond$$

În baza teoremei 2.2.4, dacă I este un interval din \mathbb{R} , $x_0 \in I$ și $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție derivabilă de n ori în x_0 , atunci, pentru fiecare $x \in I$, avem

$$(2.2.25) \quad f(x) = (T_{n;x_0}f)(x) + o((x-x_0)^n) \text{ pentru } x \rightarrow x_0.$$

Așadar următoarea teoremă are loc.

Teorema 2.2.7 Fie I un interval din \mathbb{R} , $x_0 \in I$ și $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție. Dacă funcția f este derivabilă de n ori în punctul x_0 , atunci pentru orice $x \in I$, egalitatea (2.2.25) are loc.

Relația (2.2.25) se numește *formula lui Taylor cu restul sub forma lui Peano*. \diamond

3. Forme ale restului formulei lui Taylor

Teorema 2.3.1 (teorema lui Taylor) Fie I un interval din \mathbb{R} , $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție derivabilă de $n+1$ ori pe I , $x_0 \in I$ și $p \in \mathbb{N}$. Atunci pentru fiecare $x \in I \setminus \{x_0\}$, există cel puțin un punct c cuprins strict între x și x_0 astfel încât

$$f(x) = (T_{n;x_0}f)(x) + (R_{n;x_0}f)(x),$$

unde

$$(2.3.26) \quad (R_{n;x_0}f)(x) = \frac{(x-x_0)^p (x-c)^{n-p+1}}{n!p} f^{(n+1)}(c). \diamond$$

Demonstrație.

Vom arăta, în continuare, că restul $R_{n;x_0}f$ al formulei lui Taylor se poate scrie sub forma

$$(R_{n;x_0}f)(x) = (x - x_0)^p K,$$

unde $p \in \mathbb{N}$ și $K \in \mathbb{R}$.

Fie I un interval din \mathbb{R} , $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție derivabilă de $(n + 1)$ ori pe I , p un număr natural și x și x_0 două puncte distincte din I . Fie $K \in \mathbb{R}$ astfel încât să avem

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \frac{f^{(1)}(x_0)}{1!} (x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \dots \\ &\dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + (x - x_0)^p K. \end{aligned}$$

Funcția $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$, definită, pentru orice $t \in I$, prin

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= f(t) + \frac{f^{(1)}(t)}{1!} (x - t) + \frac{f^{(2)}(t)}{2!} (x - t)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!} (x - t)^n + \\ &\quad + (x - t)^p K, \end{aligned}$$

este derivabilă pe I , deoarece toate funcțiile din membrul drept sunt derivabile pe I .

Întrucât $\varphi(x_0) = \varphi(x) = f(x)$, deducem că funcția φ satisface ipotezele teoremei lui Rolle pe intervalul închis cu extremitățile x_0 și x ; atunci există cel puțin un punct c cuprins strict între x_0 și x astfel încât $\varphi'(c) = 0$. Deoarece

$$\varphi'(t) = \frac{(x - t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) - p(x - t)^{p-1} K, \text{ oricare ar fi } t \in I, .$$

egalitatea $\varphi'(c) = 0$ devine

$$\frac{(x - c)^n}{n!} f^{(n+1)}(c) - p(x - c)^{p-1} K = 0,$$

de unde rezultă

$$K = \frac{(x - c)^{n-p+1}}{n!p} f^{(n+1)}(c).$$

Prin urmare, restul $R_{n;x_0}f$ are forma

$$(R_{n;x_0}f)(x) = \frac{(x - x_0)^p (x - x_0)^{n-p+1}}{n!p} f^{(n+1)}(c).$$

■

Forma generală a restului, dată în formula (2.3.26), a fost obținută, în mod independent, de **Schlömilch** și **Roche**, de aceea restul scris sub forma (2.3.26) se numește **restul lui Schlömilch-Roche**.

Două cazuri particulare fuseseră obținute anterior de Lagrange și Cauchy.

Cauchy obține pentru rest formula:

$$(2.3.27) \quad (R_{n;x_0}f)(x) = \frac{(x - x_0)(x - c)^n}{n!} f^{(n+1)}(c),$$

care, evident, este restul lui Schlömilch-Roche pentru $p = 1$.

Lagrange obține pentru rest formula:

$$(2.3.28) \quad (R_{n;x_0}f)(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).$$

care, evident, este restul lui Schlömilch-Roche pentru $p = n + 1$.

Dacă f este o funcție polinomială de gradul n , atunci, pentru orice $x_0 \in \mathbb{R}$,

$$(R_{n;x_0}f)(x) = 0, \text{ oricare ar fi } x \in \mathbb{R}.$$

Acesta a fost cazul studiat de Taylor. Tradiția a consacrat numele de "formula lui Taylor" pentru toate cazurile studiate, afară de unul singur: $0 \in I$ și $x_0 = 0$. Acest caz fusese, studiat anterior lui Taylor de Maclaurin. Tradiția a consacrat următoarea definiție.

Definiția 2.3.2 Formula lui Taylor de ordin n corespunzătoare funcției f și punctului $x_0 = 0$, cu restul lui Lagrange, se numește **formula lui Maclaurin**. (1698 - 1746). \diamond

Exemplul 2.3.3 Pentru funcția exponențială $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ formula lui Maclaurin este

$$\exp x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + (R_{n;0}f)(x),$$

unde

$$(R_{n;0} \exp)(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \exp(c), \text{ cu } |c| < |x|.$$

Avem

$$|(R_{n;0} \exp)(x)| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \exp(c) < \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \exp|x|, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Cum pentru fiecare $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \exp|x| = 0,$$

deducem că seria

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots,$$

este convergentă pentru orice $x \in \mathbb{R}$, și suma ei este $\exp x$, adică

$$\exp x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots, \text{ oricare ar fi } x \in \mathbb{R}. \quad \diamond$$

Similar obținem că pentru orice $a > 0$, $a \neq 1$,

$$a^x = 1 + \frac{\ln a}{1!}x + \frac{\ln^2 a}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\ln^n a}{n!}x^n + \cdots, \quad x \in \mathbb{R}. \quad \diamond$$

Deoarece în teorema 2.3.1, c este cuprins strict între x și x_0 , deducem că numărul

$$\theta = \frac{c - x_0}{x - x_0} \in]0, 1[$$

și

$$c = x_0 + \theta(x - x_0).$$

Atunci restul $R_{n;x_0}f$ se poate exprima și astfel:

$$(2.3.29) \quad (R_{n;x_0}f)(x) = \frac{(x - x_0)^{n+1} (1 - \theta)^{n-p+1}}{n!p} f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0)),$$

(Schlömlich – Roche)

$$(2.3.30) \quad (R_{n;x_0}f)(x) = \frac{(x - x_0)^{n+1} (1 - \theta)^n}{n!} f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0)) \quad (\text{Cauchy})$$

$$(2.3.31) \quad (R_{n;x_0}f)(x) = \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n + 1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0)) \quad (\text{Lagrange}).$$

Așadar am obținut următoarea teoremă.

Teorema 2.3.4 *Fie I un interval din \mathbb{R} , $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție derivabilă de $n + 1$ ori pe I , $x_0 \in I$ și $p \in \mathbb{N}$. Atunci pentru fiecare $x \in I \setminus \{x_0\}$, există cel puțin un număr $\theta \in]0, 1[$ astfel încât să avem*

$$f(x) = (T_{n;x_0}f)(x) + (R_{n;x_0}f)(x),$$

unde $(R_{n;x_0}f)(x)$ este dat de (2.3.29).

Dacă $p = 1$, obținem (2.3.30), iar dacă $p = n + 1$ atunci $(R_{n;x_0}f)(x)$ este dat de (2.3.31). \diamond

Exemplul 2.3.5 Pentru funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x) = \exp x, \text{ oricare ar fi } x \in \mathbb{R},$$

formula lui Maclaurin este

$$\exp x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + (R_{n;0}f)(x),$$

unde

$$R_{n;0}f(x) = \frac{x^{n+1}}{(n + 1)!} \exp(\theta x), \quad \theta \in]0, 1[, \quad x \in \mathbb{R}. \quad \diamond$$

4. Probleme propuse spre rezolvare

Exemplul 2.4.1 Scrieți polinomul lui Taylor de ordinul $n = 2m - 1$ atașat funcției sinus, $\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, și punctului $x_0 = 0$.

Exemplul 2.4.2 Scrieți polinomul lui Taylor de ordinul $n = 2m$ atașat funcției cosinus, $\cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și punctului $x_0 = 0$.

Exemplul 2.4.3 Scrieți formula lui Maclaurin de ordinul n pentru funcția sinus, $\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Exemplul 2.4.4 Scrieți formula lui Maclaurin de ordinul n pentru funcția cosinus, $\cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Exemplul 2.4.5 Scrieți formula lui Maclaurin de ordinul n pentru funcția $f :]-1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x) = \ln(1+x), \text{ oricare ar fi } x \in]-1, +\infty[.$$

Exemplul 2.4.6 Scrieți formula lui Maclaurin de ordinul n pentru funcția $f :]-1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x) = (1+x)^r, \text{ oricare ar fi } x \in]-1, +\infty[,$$

unde $r \in \mathbb{R}$.

Exemplul 2.4.7 Fie $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ funcția definită prin $f(x) = 1/x$, oricare ar fi $x \in]0, +\infty[$. Să se scrie formula lui Taylor de ordinul n corespunzătoare funcției f și punctului $x_0 = 1$.

Exemplul 2.4.8 Să se scrie formula lui Maclaurin de ordinul n corespunzătoare funcției, folosind acolo unde este cazul formula de derivarea a produsului a doua funcții

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k f^{(n-k)}(x) \cdot g^{(k)} :$$

- a) $f :]-1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = x \ln(1+x)$, oricare ar fi $x \in]-1, +\infty[$;
- b) $f :]-\infty, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = x \ln(1-x)$, oricare ar fi $x \in]-\infty, 1[$;
- c) $f :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \sqrt{3x+4}$, oricare ar fi $x \in]-1, 1[$;
- d) $f :]-1/2, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = 1/\sqrt{2x+1}$, oricare ar fi $x \in]-1/2, +\infty[$.

Exemplul 2.4.9 Să se scrie formula lui Taylor de ordinul n corespunzătoare funcției f și punctului x_0 , dacă:

- a) $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ este definită prin $f(x) = 1/x$, oricare ar fi $x \in]0, +\infty[$ și $x_0 = 2$;
b) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este definită prin $f(x) = \cos(x - 1)$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$ și $x_0 = 1$.

Observația 2.4.10 Pentru mai multe detalii puteți consulta [5] și [2].

CAPITOLUL 3

Integrala Riemann

Noțiunea de integrală a apărut din nevoia practică de a determina aria unor figuri plane, precum și din considerente de fizică. Calculul integral, așa cum îl concepem azi, a fost dezvoltat în secolul al XVII-lea de către Newton și Leibniz. Newton numește *fluxiune* - derivata și *fluentă* - primitiva. Leibniz introduce simbolurile d și \int și deduce regulile de calcul ale integralelor nedefinite.

Definiția riguroasă a integralei, ca limita sumelor integrale, aparține lui Cauchy (1821). Prima demonstrație corectă a existenței integralei unei funcții continue este dată de Darboux în 1875. În a doua jumătate a secolului al XIX-lea, Riemann, Du Bois-Reymond și Lebesgue dau condiții pentru integrabilitatea funcțiilor discontinue. În 1894, Stieltjes introduce o nouă integrală, iar în 1902, Lebesgue formulează noțiunea mai generală de integrală.

1. Diviziuni ale unui interval compact

Definiția 3.1.1 Fie $a, b \in \mathbb{R}$ cu $a < b$. Se numește **diviziune a intervalului** $[a, b]$ orice sistem ordonat

$$\Delta = (x_0, x_1, \dots, x_p)$$

de $p + 1$ puncte x_0, x_1, \dots, x_p din intervalul $[a, b]$ cu proprietatea că

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{p-1} < x_p = b. \quad \square$$

Dacă $\Delta = (x_0, x_1, \dots, x_p)$ este o diviziune a intervalului $[a, b]$, atunci x_0, x_1, \dots, x_p se numesc **puncte ale diviziunii** Δ .

Vom nota cu $\text{Div}[a, b]$ mulțimea formată din toate diviziunile intervalului $[a, b]$, deci

$$\text{Div}[a, b] = \{\Delta : \Delta \text{ este diviziune a intervalului } [a, b]\}.$$

Dacă $\Delta = (x_0, x_1, \dots, x_p)$ este o diviziune a intervalului $[a, b]$, atunci numărul

$$\|\Delta\| = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, \dots, x_p - x_{p-1}\}$$

se numește **norma diviziunii** Δ .

Exemplul 3.1.2 Sistemele

$$\Delta^1 = (0, 1), \quad \Delta^2 = (0, 1/3, 1), \quad \Delta^3 = (0, 1/4, 1/2, 3/4, 1)$$

sunt diviziuni ale intervalului $[0, 1]$. Aceste diviziuni au normele

$$\|\Delta^1\| = 1, \quad \|\Delta^2\| = 2/3, \quad \|\Delta^3\| = 1/4. \quad \square$$

Teorema 3.1.3 Fie $a, b \in \mathbb{R}$ cu $a < b$. Pentru fiecare număr real $\varepsilon > 0$ există cel puțin o diviziune Δ a intervalului $[a, b]$ cu proprietatea că $\|\Delta\| < \varepsilon$.

Demonstrație. Fie $\varepsilon > 0$ și p un număr natural cu proprietatea că $(b - a)/p < \varepsilon$. Dacă $h = (b - a)/p$, atunci sistemul ordonat

$$\Delta = (a, a + h, a + 2h, \dots, a + (p - 1)h, b)$$

este o diviziune a intervalului $[a, b]$. Mai mult $\|\Delta\| = h < \varepsilon$. ■

Definiția 3.1.4 Fie $a, b \in \mathbb{R}$ cu $a < b$ și $\Delta = (x_0, x_1, \dots, x_p)$ și $\Delta' = (x'_0, x'_1, \dots, x'_q)$ două diviziuni ale intervalului $[a, b]$. Spunem că diviziunea Δ este **mai fină** decât diviziunea Δ' și scriem $\Delta \supseteq \Delta'$ (sau $\Delta' \subseteq \Delta$) dacă

$$\{x'_0, x'_1, \dots, x'_q\} \subseteq \{x_0, x_1, \dots, x_p\}. \quad \diamond$$

Teorema următoare afirmă că prin trecerea la o diviziune mai fină, norma diviziunii nu crește.

Teorema 3.1.5 Fie $a, b \in \mathbb{R}$ cu $a < b$ și Δ și Δ' două diviziuni ale intervalului $[a, b]$. Dacă diviziunea Δ este mai fină decât diviziunea Δ' , atunci $\|\Delta\| \leq \|\Delta'\|$.

Demonstrație. Este imediată. ■

Observația 3.1.6 Dacă $\Delta, \Delta' \in \text{Div}[a, b]$, atunci din $\|\Delta\| \leq \|\Delta'\|$ nu rezultă, în general, că $\Delta' \subseteq \Delta$. \diamond

Definiția 3.1.7 Fie $a, b \in \mathbb{R}$ cu $a < b$. Dacă $\Delta' = (x'_0, x'_1, \dots, x'_p)$ și $\Delta'' = (x''_0, x''_1, \dots, x''_q)$ sunt diviziuni ale intervalului $[a, b]$, atunci diviziunea $\Delta = (x_0, x_1, \dots, x_r)$ a intervalului $[a, b]$ ale cărei puncte sunt elementele mulțimii $\{x'_0, x'_1, \dots, x'_p\} \cup \{x''_0, x''_1, \dots, x''_q\}$, luate în ordine strict crescătoare, se numește **reuniunea** lui Δ' cu Δ'' și se notează cu $\Delta' \cup \Delta''$. \diamond

Teorema 3.1.8 Fie $a, b \in \mathbb{R}$ cu $a < b$. Dacă Δ' și Δ'' sunt diviziuni ale intervalului $[a, b]$, atunci

- 1^o $\Delta' \cup \Delta'' \supseteq \Delta'$ și $\Delta' \cup \Delta'' \supseteq \Delta''$.
- 2^o $\|\Delta' \cup \Delta''\| \leq \|\Delta'\|$ și $\|\Delta' \cup \Delta''\| \leq \|\Delta''\|$.

Demonstrație. Este imediată. ■

Definiția 3.1.9 Fie $a, b \in \mathbb{R}$ cu $a < b$ și $\Delta = (x_0, x_1, \dots, x_p) \in \text{Div}[a, b]$. Se numește **sistem de puncte intermediare atașat diviziunii** Δ orice sistem $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p)$ de p puncte $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p \in [a, b]$ care satisfac relațiile

$$x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i, \text{ oricare ar fi } i \in \{1, \dots, p\}. \diamond$$

Vom nota cu $\text{Pi}(\Delta)$ mulțimea formată din toate sistemele de puncte intermediare atașate diviziunii Δ , deci

$$\text{Pi}(\Delta) = \{\xi : \xi \text{ este sistem de puncte intermediare atașat diviziunii } \Delta\}.$$

2. Integrala Riemann

Definiția 3.2.1 Fie $a, b \in \mathbb{R}$ cu $a < b$, $\Delta = (x_0, x_1, \dots, x_p)$ o diviziune a intervalului $[a, b]$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p)$ un sistem de puncte intermediare atașat diviziunii Δ și $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție. Numărul real

$$\sigma(f; \Delta, \xi) = \sum_{i=1}^p f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

se numește **suma Riemann atașată funcției f diviziunii Δ și sistemului ξ** . \square

Definiția 3.2.2 Fie $a, b \in \mathbb{R}$ cu $a < b$ și $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Spunem că funcția f este **integrabilă Riemann pe $[a, b]$** (sau, simplă, **integrabilă**) dacă oricare ar fi șirul $(\Delta^n)_{n \in \mathbb{N}}$ de diviziuni $\Delta^n \in \text{Div}[a, b]$, $(n \in \mathbb{N})$ cu $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Delta^n\| = 0$ și oricare ar fi șirul $(\xi^n)_{n \in \mathbb{N}}$ de sisteme $\xi^n \in \text{Pi}(\Delta^n)$, $(n \in \mathbb{N})$, șirul $(\sigma(f; \Delta^n, \xi^n))_{n \in \mathbb{N}}$ al sumelor Riemann $\sigma(f; \Delta^n, \xi^n)$, $(n \in \mathbb{N})$ este convergent. \square

Teorema 3.2.3 Fie $a, b \in \mathbb{R}$ cu $a < b$ și $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Funcția f este integrabilă Riemann pe $[a, b]$ dacă și numai dacă există un număr real I cu proprietatea că pentru fiecare șir $(\Delta^n)_{n \in \mathbb{N}}$ de diviziuni $\Delta^n \in \text{Div}[a, b]$, $(n \in \mathbb{N})$ cu $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Delta^n\| = 0$ și pentru fiecare șir $(\xi^n)_{n \in \mathbb{N}}$ de sisteme $\xi^n \in \text{Pi}(\Delta^n)$, $(n \in \mathbb{N})$, șirul $(\sigma(f; \Delta^n, \xi^n))_{n \in \mathbb{N}}$ al sumelor Riemann $\sigma(f; \Delta^n, \xi^n)$, $(n \in \mathbb{N})$ este convergent către I .

Demonstrație. Necesitatea. Fie $(\tilde{\Delta}^n)_{n \in \mathbb{N}}$ șirul de diviziuni cu termenul general:

$$\tilde{\Delta}^n = (a, a + h, a + 2h, \dots, a + (n - 1)h, b), \quad (n \in \mathbb{N})$$

și $(\xi^n)_{n \in \mathbb{N}}$ șirul cu termenul general:

$$\tilde{\xi}^n = (a, a + h, a + 2h, \dots, a + (n - 1)h), \quad (n \in \mathbb{N})$$

unde

$$h := \frac{b - a}{n}.$$

Evident, pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$ avem:

$$\tilde{\Delta}^n \in \text{Div}[a, b], \quad \|\Delta^n\| = \frac{(b-a)}{n} \quad \text{\textit{și}} \quad \tilde{\xi}^n \in \text{Pi}(\tilde{\Delta}^n).$$

Atunci șirul $\left(\sigma(f; \tilde{\Delta}^n, \tilde{\xi}^n)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ este convergent; fie $I \in \mathbb{R}$ limita șirului $\left(\sigma(f; \tilde{\Delta}^n, \tilde{\xi}^n)\right)_{n \in \mathbb{N}}$.

Vom arăta că oricare ar fi șirul $(\Delta^n)_{n \in \mathbb{N}}$ de diviziuni ale intervalului $[a, b]$ cu $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Delta^n\| = 0$ și oricare ar fi șirul $(\xi^n)_{n \in \mathbb{N}}$ de sisteme $\xi^n \in \text{Pi}(\Delta^n)$, $(n \in \mathbb{N})$, șirul $(\sigma(f; \Delta^n, \xi^n))_{n \in \mathbb{N}}$ al sumelor Riemann $\sigma(f; \Delta^n, \xi^n)$, $(n \in \mathbb{N})$ este convergent către I .

Fie deci $(\Delta^n)_{n \in \mathbb{N}}$ un șir de diviziuni $\Delta^n \in \text{Div}[a, b]$, $(n \in \mathbb{N})$ cu $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Delta^n\| = 0$ și fie $(\xi^n)_{n \in \mathbb{N}}$ un șir de sisteme $\xi^n \in \text{Pi}(\Delta^n)$, $(n \in \mathbb{N})$. Atunci șirurile $(\underline{\Delta}^n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(\underline{\xi}^n)_{n \in \mathbb{N}}$, unde

$$\underline{\Delta}^n = \begin{cases} \tilde{\Delta}^k, & \text{dacă } n = 2k \\ \Delta^k, & \text{dacă } n = 2k + 1, \end{cases} \quad \underline{\xi}^n = \begin{cases} \tilde{\xi}^k, & \text{dacă } n = 2k \\ \xi^k, & \text{dacă } n = 2k + 1, \end{cases}$$

au următoarele proprietăți:

- i) $\underline{\Delta}^n \in \text{Div}[a, b]$, $\underline{\xi}^n \in \text{Pi}(\underline{\Delta}^n)$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$;
- ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\underline{\Delta}^n\| = 0$.

În baza ipotezei, șirul $(\sigma(f; \underline{\Delta}^n, \underline{\xi}^n))_{n \in \mathbb{N}}$ este convergent; fie \underline{I} limita lui. Ținând seama că șirul $(\sigma(f; \tilde{\Delta}^n, \tilde{\xi}^n))_{n \in \mathbb{N}}$ este subșir al șirului convergent $(\sigma(f; \underline{\Delta}^n, \underline{\xi}^n))_{n \in \mathbb{N}}$, deducem că $\underline{I} = I$. Întrucât $(\sigma(f; \Delta^n, \xi^n))_{n \in \mathbb{N}}$ este subșir al șirului convergent $(\sigma(f; \underline{\Delta}^n, \underline{\xi}^n))_{n \in \mathbb{N}}$, obținem că șirul $(\sigma(f; \Delta^n, \xi^n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge către I .

Suficiența rezultă imediat din definiție. ■

Teorema 3.2.4 (unicitatea integralei) *Fie $a, b \in \mathbb{R}$ cu $a < b$ și $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Atunci există cel mult un număr real I cu proprietatea că pentru fiecare șir $(\Delta^n)_{n \in \mathbb{N}}$ de diviziuni $\Delta^n \in \text{Div}[a, b]$, $(n \in \mathbb{N})$ cu $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Delta^n\| = 0$ și pentru fiecare șir $(\xi^n)_{n \in \mathbb{N}}$ de sisteme $\xi^n \in \text{Pi}(\Delta^n)$, $(n \in \mathbb{N})$, șirul $(\sigma(f; \Delta^n, \xi^n))_{n \in \mathbb{N}}$ al sumelor Riemann $\sigma(f; \Delta^n, \xi^n)$, $(n \in \mathbb{N})$ este convergent către I . □*

Prin urmare, fiind dată o funcție $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ putem avea numai una din următoarele două situații:

a) există un număr real I cu proprietatea că pentru fiecare șir $(\Delta^n)_{n \in \mathbb{N}}$ de diviziuni $\Delta^n \in \text{Div}[a, b]$, $(n \in \mathbb{N})$ cu $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Delta^n\| = 0$ și fiecare șir $(\xi^n)_{n \in \mathbb{N}}$ de sisteme $\xi^n \in \text{Pi}(\Delta^n)$, $(n \in \mathbb{N})$, șirul $(\sigma(f; \Delta^n, \xi^n))_{n \in \mathbb{N}}$ al sumelor Riemann $\sigma(f; \Delta^n, \xi^n)$, $(n \in \mathbb{N})$ este convergent către I .

În acest caz, în baza teoremei 3.2.4, numărul real I este unic. Numărul real I se va numi **integrala Riemann a funcției f pe intervalul $[a, b]$** și se va nota cu:

$$I := \int_a^b f(x) dx.$$

b) Nu există nici un număr real I cu proprietatea că pentru fiecare șir $(\Delta^n)_{n \in \mathbb{N}}$ de diviziuni $\Delta^n \in \text{Div}[a, b]$, $(n \in \mathbb{N})$ cu $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Delta^n\| = 0$ și fiecare șir $(\xi^n)_{n \in \mathbb{N}}$ de sisteme $\xi^n \in \text{Pi}(\Delta^n)$, $(n \in \mathbb{N})$, șirul $(\sigma(f; \Delta^n, \xi^n))_{n \in \mathbb{N}}$ al sumelor Riemann $\sigma(f; \Delta^n, \xi^n)$, $(n \in \mathbb{N})$ este convergent către I . În acest caz funcția f nu este integrabilă Riemann pe $[a, b]$. Prin urmare o funcție $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ nu este integrabilă Riemann pe $[a, b]$ dacă și numai dacă oricare ar fi numărul real I există un șir $(\Delta^n)_{n \in \mathbb{N}}$ de diviziuni $\Delta^n \in \text{Div}[a, b]$, $(n \in \mathbb{N})$ cu $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Delta^n\| = 0$ și un șir $(\xi^n)_{n \in \mathbb{N}}$ de sisteme $\xi^n \in \text{Pi}(\Delta^n)$, $(n \in \mathbb{N})$, cu proprietatea că șirul $(\sigma(f; \Delta^n, \xi^n))_{n \in \mathbb{N}}$ al sumelor Riemann $\sigma(f; \Delta^n, \xi^n)$, $(n \in \mathbb{N})$ nu converge către I .

3. Proprietăți de monotonie ale integralei Riemann

Teorema 3.3.1 Fie $a, b \in \mathbb{R}$ cu $a < b$ și $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție integrabilă Riemann pe $[a, b]$. Dacă

$$f(x) \geq 0, \text{ oricare ar fi } x \in [a, b],$$

atunci

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0.$$

Demonstrație. Fie $(\Delta^n)_{n \geq 1}$ un șir de diviziuni

$$\Delta^n = (x_0^n, x_1^n, \dots, x_{m_n}^n) \in \text{Div}[a, b], (n \in \mathbb{N})$$

cu $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Delta^n\| = 0$ și $(\xi^n)_{n \geq 1}$ un șir de sisteme

$$\xi^n = (\xi_1^n, \xi_2^n, \dots, \xi_{m_n}^n) \in \text{Pi}(\Delta^n), (n \in \mathbb{N}).$$

Din faptul că funcția f este integrabilă Riemann pe $[a, b]$, avem că

$$(3.3.32) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(f; \Delta^n, \xi^n) = \int_a^b f(x) dx.$$

Pe de altă parte, funcția f fiind pozitivă, pentru orice număr natural n avem

$$\sigma(f; \Delta^n, \xi^n) = \sum_{i=1}^{m_n} f(\xi_i^n) (x_i^n - x_{i-1}^n) \geq 0$$

și deci, în baza teoremei de trecere la limită în inegalități, din (3.3.32) deducem concluzia teoremei. ■

Teorema 3.3.2 Fie $a, b \in \mathbb{R}$ cu $a < b$ și $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ două funcții integrabile Riemann pe $[a, b]$. Dacă

$$f(x) \leq g(x), \text{ oricare ar fi } x \in [a, b],$$

atunci

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

Demonstrație. Funcția $f - g$ satisface ipotezele teoremei 3.3.1; atunci

$$\int_a^b (f - g)(x) dx \geq 0.$$

Intrucât

$$\int_a^b (f - g)(x) dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$$

teorema este demonstrată. ■

Teorema 3.3.3 Fie $a, b \in \mathbb{R}$ cu $a < b$ și $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție integrabilă Riemann pe $[a, b]$ și m, M două numere reale cu proprietatea că:

$$m \leq f(x) \leq M, \text{ oricare ar fi } x \in [a, b].$$

Atunci

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b - a).$$

Demonstrație. Aplicând teorema 3.3.2 funcției f și funcțiilor constante m și M , obținem

$$m(b - a) = \int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx = M(b - a).$$

■

Teorema 3.3.4 Fie $a, b \in \mathbb{R}$ cu $a < b$. Dacă funcția $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este integrabilă Riemann pe $[a, b]$, atunci funcția $|f|$ este integrabilă Riemann pe $[a, b]$ și are loc inegalitatea

$$(3.3.33) \quad \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f|(x) dx.$$

Demonstrație. Funcția f fiind integrabilă Riemann pe $[a, b]$ este mărginită pe $[a, b]$, prin urmare există un număr real $M > 0$ cu proprietatea că

$$|f(x)| \leq M, \text{ oricare ar fi } x \in [a, b].$$

Fie $g : [-M, M] \rightarrow \mathbb{R}$ funcția definită prin

$$g(t) = |t|, \text{ oricare ar fi } t \in [-M, M].$$

Deoarece pentru orice $t', t'' \in [a, b]$ avem

$$|g(t') - g(t'')| = ||t'| - |t''|| \leq |t' - t''|,$$

rezultă că funcția g este lipschitziană și atunci funcția $|f| = g \circ f$ este integrabilă Riemann pe $[a, b]$.

Pentru a dovedi inegalitatea (3.3.33), să considerăm un șir $(\Delta^n)_{n \geq 1}$ de diviziuni $\Delta^n \in \text{Div}[a, b]$, $(n \in \mathbb{N})$ cu proprietatea că $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Delta^n\| = 0$ și un șir de sisteme $\xi^n \in Pi(\Delta^n)$, $(n \in \mathbb{N})$. Din faptul că funcțiile f și $|f|$ sunt integrabile Riemann pe $[a, b]$, rezultă

$$(3.3.34) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(f; \Delta^n, \xi^n) = \int_a^b f(x) dx \quad \text{și} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(|f|; \Delta^n, \xi^n) = \int_a^b |f|(x) dx.$$

Intrucât, pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$, avem

$$|\sigma(f; \Delta^n, \xi^n)| \leq \sigma(|f|; \Delta^n, \xi^n),$$

din (3.3.34), în baza teoremei de trecere la limită în inegalități, deducem că inegalitatea (3.3.33) are loc. ■

4. Probleme propuse spre rezolvare - Integrala Riemann

Exemplul 3.4.1 Să se calculeze:

$$\begin{array}{ll} a) \int_1^2 \frac{1}{x^3 + x^2 + x + 1} dx; & b) \int_1^3 \frac{1}{x(x^2 + 9)} dx; \\ c) \int_{-1}^1 \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx; & d) \int_{-1}^1 \frac{x}{x^2 + x + 1} dx. \end{array}$$

Exemplul 3.4.2 Să se calculeze:

$$\begin{array}{ll} a) \int_{-3}^{-2} \frac{x}{(x+1)(x^2+3)} dx; & b) \int_0^1 \frac{x+1}{(x^2+4x+5)^2} dx; \\ c) \int_1^2 \frac{1}{x^3+x} dx; & d) \int_0^2 \frac{x^3+2x^2+x+4}{(x+1)^2} dx. \end{array}$$

Exemplul 3.4.3 Să se calculeze:

$$\begin{array}{ll} a) \int_0^1 \frac{1}{1+x^4} dx; & b) \int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x^2+4)} dx; \\ c) \int_2^3 \frac{2x^3+x^2+2x-1}{x^4-1} dx; & d) \int_0^1 \frac{x^3+2}{(x+1)^3} dx. \end{array}$$

Exemplul 3.4.4 Să se calculeze:

$$\begin{aligned}
 a) \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx; & \quad b) \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}} dx; \\
 c) \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{4x^2+x+1}} dx; & \quad d) \int_2^3 \frac{x^2}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}} dx.
 \end{aligned}$$

Exemplul 3.4.5 Să se calculeze:

$$\begin{aligned}
 a) \int_2^3 \sqrt{x^2+2x-7} dx; & \quad b) \int_0^1 \sqrt{6+4x-2x^2} dx; \\
 c) \int_0^{3/4} \frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+1}} dx; & \quad d) \int_2^3 \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx.
 \end{aligned}$$

Exemplul 3.4.6 Să se arate că:

$$\begin{aligned}
 a) 2\sqrt{2} < \int_{-1}^1 \sqrt{x^2+4x+5} dx < 2\sqrt{10}; \\
 b) e^2(e-1) < \int_e^{e^2} \frac{x}{\ln x} dx < \frac{e^3}{2}(e-1).
 \end{aligned}$$

Observația 3.4.7 Pentru detalii puteți consulta [5] și [3].

CAPITOLUL 4

Primitive

1. Primitive: definiția primitivei și a primitivabilității

În acest capitol vom introduce o clasă importantă de funcții reale și anume **clasa funcțiilor care admit primitive**. Conceptul de **primitivă** leagă între ele două concepte fundamentale ale Analizei Matematice: **derivata** și **integrala**. Vom aborda probleme de natură **calitativă** privind studiul existenței primitivelor precum și de natura **calculatorie** relative la metode de calcul de primitive.

Definiția 4.1.1 Fie D o submulțime nevidă a mulțimii numerelor reale \mathbb{R} , $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție și I o submulțime nevidă a mulțimii D . Spunem că funcția f **admite primitive** (sau că este **primitivabilă**) pe I dacă există o funcție $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât:

- i) funcția F este derivabilă pe I ;
- ii) $F'(x) = f(x)$, oricare ar fi $x \in I$.

Dacă funcția f admite primitive pe mulțimea de definiție D , atunci spunem simplu că funcția f **admite primitive** (sau că este **primitivabilă**). \square

Exemplul 4.1.2 Funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = x$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, admite primitive pe \mathbb{R} deoarece funcția derivabilă $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $F(x) = x^2/2$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, are proprietatea că $F' = f$. \square

Definiția 4.1.3 Fie D o submulțime nevidă a mulțimii numerelor reale \mathbb{R} , $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție și I o submulțime nevidă a mulțimii D . Se numește **primitivă a funcției f** pe mulțimea I orice funcție $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ care satisface următoarele proprietăți:

- i) funcția F este derivabilă pe I ;
- ii) $F'(x) = f(x)$, oricare ar fi $x \in I$.

Dacă F este o primitivă a funcției f pe mulțimea de definiție D a funcției f , atunci se spune simplu că funcția F este primitivă a funcției f . \square

Teorema 4.1.4 Fie I un interval din \mathbb{R} și $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție. Dacă $F_1 : I \rightarrow \mathbb{R}$ și $F_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ sunt două primitive ale funcției f pe I , atunci există un număr real c astfel încât

$$F_2(x) = F_1(x) + c, \text{ oricare ar fi } x \in I.$$

(Oricare două primitive ale unei funcții primitivabile diferă printr-o constantă).

Demonstrație. Funcțiile F_1 și F_2 fiind primitive ale funcției f , sunt derivabile și $F_1' = F_2' = f$, deci

$$(F_2 - F_1)' = F_2' - F_1' = 0.$$

Funcția derivabilă $F_2 - F_1$ având derivata nulă pe intervalul I , este constantă pe acest interval. Prin urmare, există un număr real c astfel încât

$$F_2(x) - F_1(x) = c, \text{ oricare ar fi } x \in I.$$

■

Observația 4.1.5 In teorema 4.1.4, ipoteza că mulțimea I este interval este esențială. Într-adevăr, pentru funcția $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x) = 0, \text{ oricare ar fi } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

funcțiile $F_1, F_2 : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ definite prin

$$F_1(x) = 0, \text{ oricare ar fi } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

respectiv

$$F_2(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x < 0 \\ 1, & \text{dacă } x > 0, \end{cases}$$

sunt primitive ale funcției f pe $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Să observăm că nu există $c \in \mathbb{R}$ ca să avem $F_2(x) = F_1(x) + c$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Subliniem faptul că $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ nu este interval. □

Definiția 4.1.6 Fie I un interval din \mathbb{R} și $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție care admite primitive pe intervalul I . Mulțimea tuturor primitivelor funcției f pe intervalul I se numește **integrala nedefinită** a funcției f pe intervalul I și se notează cu simbolul

$$\int f(x) dx, \quad x \in I.$$

Operația de calculare a primitivelor funcției f se numește **integrare**.

Observația 4.1.7 Menționăm că simbolul $\int f(x) dx$ trebuie privit ca o notație indivizibilă, adică părților \int sau dx , luate separat, nu li se atribuie nici o semnificație. □

Fie I un interval din \mathbb{R} și $\mathfrak{F}(I; \mathbb{R})$ mulțimea tuturor funcțiilor definite pe I cu valori în \mathbb{R} . Dacă \mathcal{G} și \mathcal{H} sunt submulțimi nevide ale lui $\mathfrak{F}(I, \mathbb{R})$ și a este un număr real, atunci

$$\mathcal{G} + \mathcal{H} = \{f : I \rightarrow \mathbb{R} : \text{există } g \in \mathcal{G} \text{ și } h \in \mathcal{H} \text{ astfel încât } f = g + h\},$$

și

$$a\mathcal{G} = \{f : I \rightarrow \mathbb{R} : \text{există } g \in \mathcal{G} \text{ astfel încât } f = ag\}.$$

Dacă \mathcal{G} este formată dintr-un singur element g_0 , adică $\mathcal{G} = \{g_0\}$, atunci în loc de $\mathcal{G} + \mathcal{H} = \{g_0\} + \mathcal{H}$ vom scrie simplu $g_0 + \mathcal{H}$.

În cele ce urmează vom nota cu \mathcal{C} mulțimea tuturor funcțiilor constante definite pe I cu valori în \mathbb{R} , adică

$$\mathcal{C} = \{f : I \rightarrow \mathbb{R} : \text{există } c \in \mathbb{R} \text{ astfel încât } f(x) = c, \text{ oricare ar fi } x \in I\}.$$

Se constată imediat că:

a) $\mathcal{C} + \mathcal{C} = \mathcal{C}$;

b) $a\mathcal{C} = \mathcal{C}$, oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$,

adică suma a două funcții constante este tot o funcție constantă, iar o funcție constantă înmulțită cu un număr real este tot o funcție constantă.

Cu aceste observații, să ne reamintim că dacă $F_0 : I \rightarrow \mathbb{R}$ este o primitivă a funcției $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ pe intervalul $I \subseteq \mathbb{R}$, atunci orice altă primitivă $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ a lui f pe I este de forma $F = F_0 + c$, unde $c : I \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție constantă, adică $c \in \mathcal{C}$. Atunci

$$\begin{aligned} \int f(x)dx &= \{F \in \mathfrak{F}(I, \mathbb{R}) : F \text{ este primitivă a lui } f \text{ pe } I\} = \\ &= \{F_0 + c : c \in \mathcal{C}\} = F_0 + \mathcal{C}. \end{aligned}$$

Observația 4.1.8 Fie $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție care admite primitive pe I și fie $F_0 : I \rightarrow \mathbb{R}$ o primitivă a funcției f pe I . Ținând seama de observația 4.1.5, avem că

$$\int f(x)dx = \{F : I \rightarrow \mathbb{R} : F \text{ este primitivă a funcției } f\} = F_0 + \mathcal{C}.$$

Rezultă că

$$\int f(x)dx + \mathcal{C} = (F_0 + \mathcal{C}) + \mathcal{C} = F_0 + (\mathcal{C} + \mathcal{C}) = F_0 + \mathcal{C},$$

deci

$$\int f(x)dx + \mathcal{C} = \int f(x)dx.$$

Observația 4.1.9 Dacă funcția $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ admite primitive pe intervalul I și $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ este o primitivă a funcției f pe I , atunci

$$\int f(x)dx = F + \mathcal{C}$$

sau

$$\int F'(x)dx = F + \mathcal{C}.$$

2. Primitivabilitatea funcțiilor continue

În cele ce urmează vom arăta că funcțiile continue admit primitive.

Teorema 4.2.1 Fie I un interval din \mathbb{R} , $x_0 \in I$ și $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție local integrabilă Riemann pe I . Dacă funcția f este continuă în punctul x_0 , atunci pentru orice $a \in I$, funcția $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt, \text{ oricare ar fi } x \in I,$$

este derivabilă în punctul x_0 și $F'(x_0) = f(x_0)$.

Demonstrație. Evident $F(a) = 0$. Fie $\varepsilon > 0$. Deoarece funcția f este continuă în x_0 , există un număr real $\delta > 0$ astfel încât pentru orice $t \in I$ cu $|t - x_0| < \delta$ să avem

$$|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon/2,$$

sau echivalent

$$f(x_0) - \frac{\varepsilon}{2} < f(t) < f(x_0) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Fie $x \in I \setminus \{x_0\}$ cu $|x - x_0| < \delta$. Distingem două cazuri:

Cazul 1: $x > x_0$; atunci, pentru fiecare $t \in [x_0, x]$, avem

$$f(x_0) - \frac{\varepsilon}{2} < f(t) < f(x_0) + \frac{\varepsilon}{2},$$

și deci

$$\int_{x_0}^x \left(f(x_0) - \frac{\varepsilon}{2}\right) dt \leq \int_{x_0}^x f(t) dt \leq \int_{x_0}^x \left(f(x_0) + \frac{\varepsilon}{2}\right) dt,$$

de unde rezultă că

$$\left(f(x_0) - \frac{\varepsilon}{2}\right)(x - x_0) \leq F(x) - F(x_0) \leq \left(f(x_0) + \frac{\varepsilon}{2}\right)(x - x_0),$$

sau echivalent

$$f(x_0) - \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \leq f(x_0) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Prin urmare

$$\left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| < \varepsilon$$

Cazul 2: $x < x_0$; atunci pentru fiecare $t \in [x, x_0]$, avem

$$f(x_0) - \frac{\varepsilon}{2} < f(t) < f(x_0) + \frac{\varepsilon}{2},$$

și deci

$$\int_x^{x_0} \left(f(x_0) - \frac{\varepsilon}{2}\right) dt \leq \int_x^{x_0} f(t) dt \leq \int_x^{x_0} \left(f(x_0) + \frac{\varepsilon}{2}\right) dt,$$

de unde rezultă că

$$\left(f(x_0) - \frac{\varepsilon}{2}\right)(x_0 - x) \leq F(x_0) - F(x) \leq \left(f(x_0) + \frac{\varepsilon}{2}\right)(x_0 - x),$$

sau echivalent

$$f(x_0) - \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \leq f(x_0) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Prin urmare

$$\left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| < \varepsilon$$

Așadar, oricare ar fi $x \in I \setminus \{x_0\}$ cu $|x - x_0| < \delta$ avem

$$\left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| < \varepsilon.$$

Rezultă că există

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0),$$

deci F este derivabilă în punctul x_0 și $F'(x_0) = f(x_0)$. ■

Observația 4.2.2 Dacă funcția F din teorema 4.2.1 este derivabilă în punctul x_0 , nu rezultă că funcția f este continuă în punctul x_0 . Intr-adevăr, funcția $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \lfloor x \rfloor$, oricare ar fi $x \in [0, 1]$, nu este continuă în punctul $x_0 = 1$, în timp ce funcția $F : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^x 0dt = 0, \text{ oricare ar fi } x \in [0, 1],$$

este derivabilă în punctul 1. ◇

Teorema 4.2.3 (teorema de existență a primitivelor unei funcții continue) Fie I un interval din \mathbb{R} , $a \in I$ și $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Dacă funcția f este continuă pe intervalul I , atunci funcția $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \text{ oricare ar fi } x \in I,$$

este o primitivă a funcției f pe I cu proprietatea că $F(a) = 0$.

Demonstrație. Se aplică teorema 4.2.1. ■

Teorema 4.2.4 (teorema de reprezentare a primitivelor funcțiilor continue) Fie I un interval din \mathbb{R} , $a \in I$ și $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă pe I . Dacă $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ este o primitivă a funcției f pe I cu proprietatea că $F(a) = 0$, atunci

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \text{ oricare ar fi } x \in I.$$

Demonstrație. În baza teoremei de existență a primitivelor unei funcții continue (teorema 4.2.3), funcția $F_1 : I \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin

$$F_1(x) = \int_a^x f(t)dt, \text{ oricare ar fi } x \in I,$$

este o primitivă a funcției f pe I . Atunci există $c \in \mathbb{R}$ astfel încât $F(x) = F_1(x) + c$, oricare ar fi $x \in I$. Deoarece $F(a) = F_1(a) = 0$, deducem ca $c = 0$ și teorema este demonstrată. ■

Teorema 4.2.5 Fie I un interval din \mathbb{R} și $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție local integrabilă pe I . Dacă funcția f este mărginită pe I , atunci pentru orice $a \in I$, funcția $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt, \text{ oricare ar fi } x \in I,$$

este lipschitziană pe I .

Demonstrație. Funcția f este mărginită pe I , atunci există un număr real $M > 0$ astfel încât

$$|f(t)| \leq M, \text{ oricare ar fi } t \in I.$$

De aici deducem că, pentru orice $u, v \in I$, avem

$$|F(u) - F(v)| = \left| \int_u^v f(t) dt \right| \leq \left| \int_u^v |f(t)| dt \right| \leq M |u - v|,$$

prin urmare funcția F este lipschitziană. ■

3. Formula lui Leibniz-Newton

Teorema 4.3.1 (teorema lui Leibniz – Newton) Fie $a, b \in \mathbb{R}$ cu $a < b$ și $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție. Dacă:

- (i) funcția f este integrabilă Riemann pe $[a, b]$;
- (ii) funcția f admite primitive pe $[a, b]$,

atunci pentru orice primitivă $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ a funcției f are loc egalitatea

$$(4.3.35) \quad \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Demonstrație. Fie $(\Delta^n)_{n \in \mathbb{N}}$ un șir de diviziuni $\Delta^n = (x_0^n, \dots, x_{p_n}^n)$ ale intervalului $[a, b]$ astfel încât $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Delta^n\| = 0$. În baza teoremei de medie a calculului diferențial aplicată restricției funcției F la intervalul $[x_{i-1}^n, x_i^n]$, ($n \in \mathbb{N}$) deducem că pentru fiecare număr natural n și pentru fiecare $i \in \{1, \dots, p_n\}$ există un punct $\xi_i^n \in]x_{i-1}^n, x_i^n[$ cu proprietatea că

$$F(x_i^n) - F(x_{i-1}^n) = F'(\xi_i^n) (x_i^n - x_{i-1}^n).$$

Cum, prin ipoteză, $F'(x) = f(x)$, oricare ar fi $x \in [a, b]$, avem că

$$F(x_i^n) - F(x_{i-1}^n) = f(\xi_i^n) (x_i^n - x_{i-1}^n),$$

oricare ar fi numărul natural n și oricare ar fi $i \in \{1, \dots, p_n\}$.

Evident, pentru fiecare număr natural n avem $\xi^n = (\xi_1^n, \dots, \xi_{p_n}^n) \in \text{Pi}(\Delta^n)$. Intrucât

$$\begin{aligned}\sigma(f; \Delta^n, \xi^n) &= \sum_{i=1}^{p_n} f(\xi_i^n) (x_i^n - x_{i-1}^n) = \sum_{i=1}^{p_n} F(x_i^n) - F(x_{i-1}^n) = \\ &= F(b) - F(a), \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N},\end{aligned}$$

deoarece

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(f; \Delta^n, \xi^n),$$

obținem că

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Teorema este demonstrată. ■

Notație: În loc de $F(b) - F(a)$ se folosesc frecvent notațiile

$$F(x)|_a^b \quad \text{sau} \quad [F(x)]_a^b$$

care se citesc: $F(x)$ luat între a și b .

Egalitatea (4.3.35) se numește **formula lui Leibniz-Newton**.

Exemplul 4.3.2 Funcția $f : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x) = \frac{1}{x(x+1)}, \text{ oricare ar fi } x \in [1, 2],$$

este continuă pe $[1, 2]$. Atunci funcția f este integrabilă Riemann pe $[1, 2]$. Pe de altă parte, funcția f admite primitive pe intervalul $[1, 2]$ și $F : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin

$$F(x) = \ln x - \ln(x+1), \text{ oricare ar fi } x \in [1, 2],$$

este o primitivă a funcției f pe $[1, 2]$. În baza formulei lui Leibniz-Newton (teorema 4.3.1), obținem

$$\int_1^2 \frac{1}{x(x+1)} dx = [\ln x - \ln(x+1)]_1^2 = \ln \frac{4}{3}. \quad \square$$

4. Metode de calcul a primitivelor

4.1. Integrarea prin părți. Folosind formula de derivare a produsului a două funcții derivabile și rezultatul că orice funcție continuă pe un interval admite primitive pe acel interval, obținem teorema următoare:

Teorema 4.4.1 (formula de integrare prin părți) *Fie I un interval din \mathbb{R} și $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$. Dacă:*

(i) *funcțiile f și g sunt derivabile pe I ,*

(ii) derivatele f' și g' sunt continue pe I ,
 atunci funcțiile fg' și $f'g$ admit primitive pe I și are loc egalitatea:

$$\int (fg')(x)dx = fg - \int (f'g)(x)dx.$$

(formula integrării prin părți)

Demonstrație. Deoarece orice funcție derivabilă este continuă, din (i) rezultă că funcțiile f și g sunt continue pe I . Atunci, dacă ținem seama și de (ii), avem că funcțiile $f'g$ și fg' sunt continue pe I și deci au primitive pe I . Intrucât

$$(fg)' = f'g + fg',$$

deducem că fg este o primitivă a funcției $f'g + fg'$, prin urmare avem

$$\int (f'g + fg')(x) dx = fg + \mathcal{C}.$$

Dar

$$\int (f'g + fg')(x) dx = \int (f'g)(x) dx + \int (fg')(x) dx.$$

și deci

$$\int (f'g)(x) dx + \int (fg')(x) dx = fg + \mathcal{C}.$$

Deoarece

$$\int (f'g)(x) dx - \mathcal{C} = \int (f'g)(x) dx,$$

obținem

$$\int (fg')(x) dx = fg - \int (f'g)(x) dx,$$

sau echivalent

$$\int (fg')(x) dx = f(x)g(x) - \int (f'g)(x) dx, \quad x \in I.$$

adică concluzia teoremei. ■

Observația 4.4.2 Schematic, formula de integrare prin părți se scrie

$$\int fg' = fg - \int f'g.$$

Exemplul 4.4.3 Să se calculeze integrala

$$\int x \ln x dx, \quad x \in]0, +\infty[;$$

Soluție. Considerăm funcțiile $f, g :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ definite prin

$$f(x) = \ln x, \quad g'(x) = x, \quad \text{oricare ar fi } x \in]0, +\infty[.$$

Deducem $g(x) = \frac{x^2}{2}$, oricare ar fi $x \in]0, +\infty[$. Aplicând formula integrării prin părți, obținem

$$\begin{aligned} \int x \ln x dx &= \frac{x^2}{x} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x dx = \\ &= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + \mathcal{C}, \quad x \in]0, +\infty[. \end{aligned}$$

■

4.2. Metoda schimbării de variabilă. Metoda schimbării de variabilă are la bază formula derivării unei funcții compuse.

Teorema 4.4.4 (*prima metodă de schimbare de variabilă*) Fie I și J două intervale din \mathbb{R} și $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ și $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ două funcții. Dacă

- (i) $u(I) \subseteq J$;
- (ii) funcția u este derivabilă pe I ;
- (iii) funcția f admite primitive pe J ,

atunci funcția $(f \circ u) u'$ admite primitive pe I .

Mai mult, dacă $F : J \rightarrow \mathbb{R}$ este o primitivă a funcției f pe J , atunci funcția $F \circ u$ este o primitivă a funcției $(f \circ u) u'$ pe I și are loc egalitatea

$$\int f(u(x)) u'(x) dx = F \circ u + \mathcal{C}.$$

Demonstrație. Fie $F : J \rightarrow \mathbb{R}$ o primitivă a funcției f pe intervalul J , atunci funcția F este derivabilă pe J și $F' = f$. Cum funcția u este derivabilă pe I , obținem că $F \circ u$ este derivabilă pe I și

$$(F \circ u)'(x) = F'(u(x)) u'(x) = f(u(x)) u'(x), \text{ oricare ar fi } x \in I..$$

Prin urmare, funcția $F \circ u$ este o primitivă a funcției $(f \circ u) u'$. ■

Observația 4.4.5 Fie I un interval din \mathbb{R} . Pentru a calcula primitivele funcției primitivabile $g : I \rightarrow \mathbb{R}$, adică pentru a calcula integrala

$$\int g(x) dx,$$

folosind metoda schimbării de variabilă, parcurgem următoarele trei etape:

1⁰ Punem în evidență, în expresia funcției g , o funcție derivabilă $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ și o funcție primitivabilă $f : u(I) \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât $g(x) = f(u(x)) u'(x)$, oricare ar fi $x \in I$.

2⁰ Determinăm o primitivă $F : u(I) \rightarrow \mathbb{R}$ a funcției f pe $u(I)$, adică

$$\int f(t) dt = F + \mathcal{C}.$$

3^o O primitivă a funcției $g = (f \circ u) u'$ pe I este $F \circ u$, adică

$$\int g(x) dx = F \circ u + \mathcal{C},$$

sau, echivalent,

$$\int g(x) dx = F(u(x)) + \mathcal{C}, \quad x \in I.$$

Exemplul 4.4.6 Să se calculeze integrala

$$\int \cot x dx, \quad x \in]0, \pi[.$$

Soluție. Avem $I =]0, \pi[$ și $g(x) = \cot x$, oricare ar fi $x \in]0, \pi[$. Deoarece

$$g(x) = \frac{1}{\sin x} (\sin x)', \quad \text{oricare ar fi } x \in]0, \pi[,$$

luăm $u :]0, \pi[\rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $u(x) = \sin x$, oricare ar fi $x \in]0, \pi[$ și $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $f(t) = 1/t$, oricare ar fi $t \in]0, +\infty[$. Evident

$$g(x) = f(u(x)) u'(x), \quad \text{oricare ar fi } x \in]0, +\infty[.$$

O primitivă a funcției f pe $]0, +\infty[$ este funcția $F :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ definită prin

$$F(t) = \ln t, \quad \text{oricare ar fi } t \in]0, +\infty[,$$

adică

$$\int f(t) dt = \int \frac{1}{t} dt = \ln t + \mathcal{C}, \quad t \in]0, +\infty[.$$

Atunci o primitivă a funcției g pe $]0, +\infty[$ este $F \circ u$, adică avem

$$\int \cot x dx = \ln |\sin x| + \mathcal{C}, \quad x \in]0, \pi[.$$

■

Teorema 4.4.7 (a doua metodă de schimbare de variabilă) Fie I și J două intervale din \mathbb{R} și $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ și $u : J \rightarrow I$ două funcții. Dacă:

- (i) funcția u este bijectivă;
- (ii) funcția u este derivabilă pe J și $u'(x) \neq 0$, oricare ar fi $x \in J$;
- (iii) funcția $h = (f \circ u) u'$ admite primitive pe J ,

atunci funcția f admite primitive pe I .

Maimult, dacă $H : J \rightarrow \mathbb{R}$ este o primitivă a funcției $h = (f \circ u) u'$ pe J , atunci funcția $H \circ u^{-1}$ este o primitivă a funcției f pe I , adică are loc egalitatea

$$\int f(x) dx = H \circ u^{-1} + \mathcal{C}.$$

Demonstrație. Fie $H : J \rightarrow \mathbb{R}$ o primitivă a funcției $h = (f \circ u) u'$ pe J , atunci funcția H este derivabilă pe J și

$$H' = h = (f \circ u) u'.$$

Pe de altă parte, din (i) și (ii) rezultă că funcția $u^{-1} : I \rightarrow J$ este derivabilă pe I . Atunci funcția $H \circ u^{-1}$ este derivabilă pe I și

$$\begin{aligned} (H \circ u^{-1})(x) &= H'(u^{-1}(x)) (u^{-1})'(x) = h(u^{-1}(x)) (u^{-1})'(x) = \\ &= ((f \circ u)(u^{-1}(x))) u'(u^{-1}(x)) (u^{-1})'(x) = \\ &= f(x) u'(u^{-1}(x)) \frac{1}{u'(u^{-1}(x))} = f(x), \text{ oricare ar fi } x \in I. \end{aligned}$$

Prin urmare, funcția $H \circ u^{-1}$ este o primitivă a funcției f pe I . ■

Observația 4.4.8 Fie I un interval din \mathbb{R} . Pentru a calcula primitivele funcției primitivabile $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, adică pentru a calcula integrala

$$\int f(x) dx,$$

folosind metoda schimbării de variabilă dată de teorema 4.4.7, parcurgem următoarele trei etape:

1⁰ Punem în evidență un interval $J \subseteq \mathbb{R}$ și o funcție $u : J \rightarrow I$ bijectivă, derivabilă pe J și cu derivata nenulă pe J (Se apune că funcția u^{-1} schimbă variabila x în variabila t).

2⁰ Determinăm o primitivă $H : J \rightarrow \mathbb{R}$ a funcției $(f \circ u) u'$ pe J , adică

$$\int f(u(t)) dt = H + C.$$

3⁰ O primitivă a funcției f pe I este $H \circ u^{-1}$, adică

$$\int f(x) dx = H \circ u^{-1} + C,$$

sau, echivalent,

$$\int f(x) dx = H(u^{-1}(x)) + C, \quad x \in I.$$

Exemplul 4.4.9 Să se calculeze integrala

$$\int \frac{1}{\sin x} dx, \quad x \in]0, \pi[.$$

Avem $I :=]0, \pi[$. Luăm funcția $u :]0, +\infty[\rightarrow]0, \pi[$ definită prin $u(t) = 2 \arctan t$, oricare $t \in]0, +\infty[$. Funcția u este bijectivă, derivabilă

Observația 4.4.10 Fie I și J două intervale din \mathbb{R} și $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ și $u : I \rightarrow J$ două funcții cu următoarele proprietăți:

(a) funcția u este bijectivă, derivabilă pe I cu derivata continuă și nenulă pe I ;

(b) funcția f este continuă pe J .

Fie $F : J \rightarrow \mathbb{R}$ o primitivă a funcției f pe J (o astfel de primitivă există deoarece f este continuă pe J).

În baza primei metode de schimbare de variabilă (teorema 4.4.4), funcția $F \circ u$ este o primitivă a funcției $(f \circ u) u'$ pe I .

Reciproc, să presupunem că $H = F \circ u$ este o primitivă a funcției $(f \circ u) u'$ pe I . Atunci, în baza celei de a doua metode de schimbare de variabilă (teorema 4.4.7), funcția $H \circ u^{-1} = F \circ u \circ u^{-1} = F$ este o primitivă a funcției f pe J .

Prin urmare, în ipotezele (a) și (b), funcția $F : J \rightarrow \mathbb{R}$ este o primitivă a funcției f pe J dacă și numai dacă funcția $F \circ u$ este o primitivă a funcției $(f \circ u) u'$ pe I . Cu alte cuvinte, în ipotezele (a) și (b), cele două metode de schimbare de variabilă sunt echivalente.

Practic avem o singură metodă de schimbare de variabilă și mai multe variante de aplicare a ei.

Varianta 1. Avem de calculat

$$\int f(x) dx, \quad x \in I.$$

Atunci:

1⁰ Punem în evidență în expresia lui f , o funcție $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ și o funcție primitivabilă $g : u(I) \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât

$$f(x) = g(u(x)) u'(x), \quad \text{oricare ar fi } x \in I.$$

2⁰ Facem înlocuirile formale $u(x) := t$ și $u'(x) dx := dt$; obținem integrala nedefinită

$$\int g(t) dt = G(t) + \mathcal{C}, \quad t \in u(I).$$

3⁰ Revenim la vechea variabilă x , punând $t := u(x)$ în expresia primitivei G ; obținem

$$\int f(x) dx = G(u(x)) + \mathcal{C}, \quad x \in I.$$

Varianta 2. Avem de calculat

$$\int f(x) dx, \quad x \in I.$$

Atunci:

1⁰ Punem în evidență un interval $J \subseteq \mathbb{R}$ și o funcție $u : J \rightarrow I$ bijectivă și derivabilă.

2⁰ Facem înlocuirile formale $x := u(t)$ și $dx := u'(t) dt$; obținem integrala nedefinită

$$\int f(u(t)) u'(t) dt, \quad t \in J,$$

pe care o calculăm. Fie

$$\int f(u(t)) u'(t) dt = H(t) + \mathcal{C}, \quad t \in J.$$

3⁰ Revenim la vechea variabilă x , punând $t := u^{-1}(x)$ în expresia primitivei H ; obținem

$$\int f(x) dx = H(u^{-1}(x)) + \mathcal{C}, \quad x \in I.$$

Varianta 3. Avem de calculat

$$\int f(x) dx, \quad x \in I.$$

Atunci:

1⁰ Punem în evidență, în expresia lui f , o funcție injectivă $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ cu $u^{-1} : u(I) \rightarrow I$ derivabilă, și o funcție $g : u(I) \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât

$$f(x) = g(u(x)), \quad \text{oricare ar fi } x \in I.$$

2⁰ Facem înlocuirile formale $u(x) := t$ și $dx := (u^{-1})'(t) dt$; obținem integrala nedefinită

$$\int g(t) (u^{-1})'(t) dt, \quad t \in u(I),$$

pe care o calculăm. Fie

$$\int g(t) (u^{-1})'(t) dt = F(t), \quad t \in u(I),$$

3⁰ Revenim la vechea variabilă x , punând $t := u(x)$ în expresia primitivei F ; obținem

$$\int f(x) dx = G(u(x)) + \mathcal{C}, \quad x \in I.$$

În toate cele trei variante ale formulei schimbării de variabilă, expuse mai sus, expresia funcției u se impune din context, analizând expresia funcției f .

Când se dă o indicație asupra schimbării de variabilă folosite, se spune simplu ”*se face substituția* $x = u(t)$ ” sau ”*se face substituția* $t = u(x)$ ”, celelalte elemente rezultând din context.

Exemplul 4.4.11 Să se calculeze

$$I = \int \frac{\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} dx, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right).$$

Se face substituția $\tan x = t$, deci $x := \arctan t$ și $dx := \frac{1}{1+t^2}$. Se obține

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{t}{(1+t)(1+t^2)} dt = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{t^2+1} + \frac{1}{t^2+1} - \frac{1}{t+1} \right) dt = \\ &= \frac{1}{4} (t^2+1) + \frac{1}{2} \arctan t - \frac{1}{2} \ln(t+1) + \mathcal{C}, \quad t \in (-1, +\infty). \end{aligned}$$

Atunci

$$I = \int \frac{\tan x}{1 + \tan x} dx = \frac{1}{2} (x - \ln(\sin x + \cos x)) + \mathcal{C}, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right).$$

Observația 4.4.12 Nu există reguli de calcul al primitivelor decât pentru clase restrânse de funcții elementare.

5. Probleme propuse spre rezolvare

Exemplul 4.5.1 Să se arate că următoarele funcții $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ admit primitive pe intervalul $I \subseteq \mathbb{R}$ și să se determine o primitivă $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ a funcției f pe intervalul I , dacă:

- a) $f(x) = x^2 + x$, oricare ar fi $x \in I = \mathbb{R}$;
- b) $f(x) = x^3 + 2x - 4$, oricare ar fi $x \in I = \mathbb{R}$;
- c) $f(x) = x(x+1)(x+2)$, oricare ar fi $x \in I = \mathbb{R}$;
- d) $f(x) = 1/x$, oricare ar fi $x \in I =]0, +\infty[$;
- e) $f(x) = 1/x$, oricare ar fi $x \in I =]-\infty, 0[$;
- f) $f(x) = x^5 + 1/x$, oricare ar fi $x \in I =]0, +\infty[$;
- g) $f(x) = 1/x^2$, oricare ar fi $x \in I =]0, +\infty[$;
- h) $f(x) = 1/x^2$, oricare ar fi $x \in I =]-\infty, 0[$.

Exemplul 4.5.2 Să se calculeze:

- a) $\int \frac{2x-1}{x^2-3x+2} dx, x \in]2, +\infty[$;
- b) $\int \frac{4}{(x-1)(x+1)^2} dx, x > 1$;
- c) $\int \frac{1}{x^3-x^4} dx, x > 1$;
- d) $\int \frac{2x+5}{x^2+5x+10} dx, x \in \mathbb{R}$;
- e) $\int \frac{1}{x^2+x+1} dx, x \in \mathbb{R}$.

Exemplul 4.5.3 Să se calculeze:

- a) $I = \int \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} dx, x \in]0, +\infty[$;
- b) $I = \int \frac{1}{x + \sqrt{x-1}} dx, x \in]1, +\infty[$.

Exemplul 4.5.4 Să se calculeze:

$$a) I = \int \frac{1}{1 + \sqrt{x^2 + 2x - 2}} dx, \quad x \in]\sqrt{3} - 1, +\infty[;$$

$$b) I = \int \frac{1}{(x + 1)\sqrt{-4x^2 - x + 1}} dx, \quad x \in]\frac{-1 - \sqrt{17}}{8}, \frac{\sqrt{17} - 1}{8}[.$$

Bibliografie

- [1] D. Andrica, D.I. Duca, I. Purdea și I. Pop: *Matematica de bază*, Editura Studium, Cluj-Napoca, 2004
- [2] D.I. Duca și E. Duca: *Exerciții și probleme de analiză matematică* (vol. 1), Editura Casa Cărții de Știință, Cluj-Napoca, 2007
- [3] D.I. Duca și E. Duca: *Exerciții și probleme de analiză matematică* (vol. 2), Editura Casa Cărții de Știință, Cluj-Napoca, 2009
- [4] D.I. Duca și E. Duca: *Culegere de probleme de analiză matematică*, Editura GIL, Zalău, 1996 (vol. 1), 1997 (vol. 2)
- [5] D.I. Duca: *Analiza matematică*, Casa Cărții de Știință, Cluj-Napoca, 2013
- [6] M. Megan: *Bazele analizei matematice* (vol. 1), Editura Eurobit, Timișoara 1997
- [7] M. Megan: *Bazele analizei matematice* (vol. 2), Editura Eurobit, Timișoara 1997
- [8] M. Megan, A.L. Sasu, B. Sasu: *Calcul diferențial în \mathbb{R} , prin exerciții și probleme*, Editura Universității de Vest, Timișoara, 2001
- [9] P. Preda, A. Crăciunescu, C. Preda: *Probleme de analiză matematică*, Editura Mirton, Timișoara, 2004
- [10] P. Preda, A. Crăciunescu, C. Preda: *Probleme de analiză matematică. Diferențiabilitate*, Editura Mirton, Timișoara, 2005
- [11] P. Preda, A. Crăciunescu, C. Preda: *Probleme de analiză matematică. Integrabilitate*, Editura Mirton, Timișoara, 2007

Glosar

- criteriul
 - comparatiei
 - al doilea, 36
 - al treilea, 38
 - primul, 35
 - radacinii al lui Cauchy, 42
 - raportului al lui D'Alembert, 40
- criteriul lui
 - Kummer, 43
 - Raabe-Duhamel, 45
- diviziune, 59
 - mai fina, 60
- formul lui Leibniz-Newton, 73
- formula lui Taylor, 50
- functie
 - care admite primitive, 67
 - integrabila Riemann, 61
 - primitivabila, 67
- integrala
 - nedefinita, 68
- integrala Riemann, 63
- multimea termenilor unui sir, 2
- norma a unei diviziuni, 59
- polinomul lui Taylor, 49
- primitiva a unei functii, 67
- restul
 - unei serii, 34
- restul lui Schlomilch-Roche, 53
- restul Taylor, 50
- seria
 - armonica, 31
 - armonica generalizata, 39
- serie
 - convergenta, 29
 - cu termeni pozitivi, 34
 - divergenta, 29
 - geometrica, 30
- serie de numere reale, 29
- sir
 - de numere reale, 1
- sirul sumelor partiale
 - a unei serii de numere, 29
- sistem de puncte intermediare atasat unei diviziuni, 61
- suma partiala de rang n
 - a unei serii, 29
- suma Riemann, 61
- suma unei serii, 29
- termenul de rang n al unui sir, 1
- termenul general
 - al unei serii, 29
- termenul general al unui sir, 1

