III. Változat

I. TÉTEL

1. Oldjuk meg az $x + \log_2 x + 2^x = 7$ egyenletet a $(0, \infty)$ halmazon.

2. Jelólje x_1, x_2, x_3 és x_4 az $x^4 - x - 8 = 0$ egyenlet gyökeit. Határozzuk meg az

$$A = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \text{ és a } B = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4$$

számokat.

3. Az $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ halmazban legyenek az

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mátrixok.

a) Számítsuk ki A^3. Mutassuk ki, hogy $I_3 + A$ invertálható és az inverze $I_3 - A + A^2$.

b) Oldjuk meg az $XA = AX$ egyenletet a $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ halmazon.

II. TÉTEL)

1. Legyen az $ABCD$ konvex négyszög, amely átlóinak felezőpontjai nem esnek egybe. Jelöje M, N, P, Q, S, T az $[AB], [BC], [CD], [DA], [AC]$ és a $[BD]$ szakaszok felezőpontjait. Bizonyítsuk be, hogy az MP, NQ és az ST egyenesek összefutóak egy pontban.

2. a) Bizonyítsuk be, hogy bámely $x \in \mathbb{R}$ valós szám esetén igaz a $[\sin x] + [\cos x] \leq 1$ egyenlőtlenség, ahol $[\alpha]$ az $\alpha \in \mathbb{R}$ valós szám egész részét jelöli.

b) Oldjuk meg az $[\sin x] + [\cos x] = 2^{1-\sin x}$ egyenletet.

III. TÉTEL)

1. Legyen az $f : (-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ függvény, amelyet az

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{dacă} \quad x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ \pi - x & \text{dacă} \quad x \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) \end{cases}$$

képlettel értelmeztünk.

a) Ábrázoljuk az f függvényt.

b) Bizonyítsuk be, hogy az f vannak primitív függvényei és határozzuk meg egy primitív függvényét az f-nek.

c) Bizonyítsuk be, hogy az f integrálható a $[0, \pi]$ intervallumon és számítsuk ki az $\int_0^\pi f(x)dx$ határozott integrált.

2. Számítsuk ki az $\int_0^\pi \arcsin(\sin x)dx$ határozott integrált.