II. Változat

I. TÉTEL

1. a) Legyenek az $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ valós számok. Ha $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$, mutassuk ki, hogy $\alpha = \beta = \gamma$.

b) Oldjuk meg a $4^x + 9^x + 25^x = 6^x + 10^x + 15^x$ egyenletet a valós számok halmazán.

2. Legyen az $f = X^3 - 3X^2 + aX + b$ polinom. Határozzuk meg az a és b valós számokat tudva, hogy f osztható $X - 2$-vel, illetve az $X + 1$-el való osztási maradéka 11.

3. a) Jelölje $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_3)$ azon 2×2-es mátrixok halmazát, amelyeknek elemei a $\mathbb{Z}_3$ halmazból vannak. Határozzuk meg az $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_3)$ halmaz elemeinek a számát.

b) Oldjuk meg $\mathbb{Z}_6$-ban a $\widehat{x}^3 = \widehat{x}$ egyenletet.

II. TÉTEL

1. Aottak az $O(0,0), A(3,4)$ şi $B(x,y)$ pontok. Határozzuk meg az x, y valós számokat úgy, hogy az OAB egyenlő oldalú háromszög legyen.

2. Legyen az OAB egyenlő oldalú háromszög, ahol $O(0,0)$, $A(m,n)$ ($m, n \in \mathbb{N}^*$) és $B(x,y)$, ahol $x, y \in (0, +\infty)$. Bizonyítsuk be, hogy a B pont mindkét koordinátája nem lehet természetes szám.

3. Oldjuk meg a $\min\{\sin x, \cos x\} = \frac{\pi}{4}$ egyenletet a $[0, 2\pi]$ halmazon.

III. TÉTEL

Tetszőleges (a,b,c) valós számhármas esetén tekintsük az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt, amelyet az

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c & \text{dacă} \quad x < 0 \\ 2\sin x + \cos x & \text{dacă} \quad x \geq 0. \end{cases}$$

képlettel értelmeztünk.

1. Határozzuk meg azokat az (a,b,c) számhármasokat, amelyekre az f függvény folytonos az $\mathbb{R}$-en.

2. Határozzuk meg azokat az (a,b,c) számhármasokat, amelyekre az f függvény deriválható az $\mathbb{R}$-en.

3. Mutassuk ki, hogy az f függvény kétszer deriválható az $\mathbb{R}$-en egyetlen (a,b,c) számhármas esetén és ebben az esetben számítsuk ki a $\int_{-1}^{\pi} f''(x)dx$ határozott integrált.