I. Változat

I. TÉTEL (30 puncte)

1. Oldjuk meg $\mathbb{R}$-ben a következő egyenlőtlenséget: $\left(\frac{1}{3}\right)^{x} < \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{9}{x}}$.

2. Legyenek az $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ mátrixok.
Határozzuk meg az X mátrixot úgy, hogy $AXB = C$.

3. Adjunk példát egy elsőfokú $g \in \mathbb{Z}_4[X]$ polinomra, amelynek nicsenek gyökei $\mathbb{Z}_4$-ben.

II. TÉTEL

1. Legyenek az $A(3,5), B(-1,1), C(-3,5), A'(5,-1), B'(3,1)$ és a $C'(2,m)$ pontok. Határozzuk meg az $m \in \mathbb{R}$ értékét, úgy, hogy az ABC és az $A'B'C'$ háromszögek hasonlóak legyenek.

2. Az ABC háromszögben adottak az $AB = c$ és az $AC = b$ hosszúságú oldalak. Igazoljuk, hogy ha igaz az $\overrightarrow{AD} = b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}$ egyenlőség, akkor az AD egyenes az A szög szögfelezője.

3. Oldjuk meg a $\cos(\pi x) + 2\cos(\pi^2 x) = 3$ egyenletet.

III. TÉTEL

Legyen az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kétszer deriválható függvény úgy, hogy $f''(x) \geq 0$, bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén és $f'(-1) = f'(1) = 0$.

1. Bizonyítsuk be, hogy $f'(x) = 0$, bármely $x \in [-1,1]$ esetén.

2. Bizonyítsuk be, hogy f monoton csökkenő a $(-\infty,-1]$, állandó a $[-1,1]$ és monoton növekvő az $[1,+\infty)$ intervallumon.

3. Mutassuk ki, hogy $\int_{-1}^{1} f(x)dx = 2f(0)$ és $\int_a^b f(x)dx \geq (b-a)f(0)$ bármely $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ esetén.