LINEÁRIS ALGEBRA FELADATOK

1. Determinánsok

1. Számítsd ki az alábbi determinánst és add meg az eredményt irreducibilis tényezők szorzataként:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a+b & -a+b-c & b+c \\ a-b-c & a+b & a+c \\ a+c & b+c & -a-b+c \end{vmatrix}.$$

2. Bizonyítsd be, hogy érvényesek a következő összefüggések:

(a)

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ a\alpha & b\beta & c\gamma \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ bcp & caq & abr \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix}.$$

(b)

$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ q+r & r+p & p+q \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}.$$

3. Számítsd ki a

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}$$

determinánst, tudva azt, hogy x_1, x_2, x_3 az $x^3 - 2x + 3 = 0$ egyenlet gyökei.

4. Tudjuk, hogy az $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ polinomfüggvény gyökei $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Bizonyítsd be, hogy

$$f(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x & x & \cdots & x & x \\ x_1 & x_2 & x & \cdots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x & x \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n & x \end{vmatrix}.$$

5. Legyen $A \in M_n(R)$, ahol $n \in \mathbb{N}^*$. Igazold, hogy ha n páratlan, akkor $\det(A - A^t) = 0$. Igaz-e az állítás páros n esetén?

6. Legyen $A \in M_2(\mathbb{C})$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Vezessük be a $\operatorname{Tr} A = a + d$ jelölést.

(a) Igazold, hogy $A^2 - (\operatorname{Tr} A)A + (\det A)I_2 = O_2$.
(b) Számítsd ki az A^n mátrixot minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén, abban a két esetben, ha vagy $\det A = 0$, vagy pedig $\operatorname{Tr} A = 0$.

2. Mátrixok rangja, inverze, egyéb feladatok mátrixokkal

7. Határozd meg a következő valós mátrixok rangját:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$; (b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$; (c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

8. Határozd meg a következő mátrixok inverzét:

(a) $\begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{4} & \hat{2} \\ \hat{1} & \hat{1} & \hat{1} \\ \hat{3} & \hat{2} & \hat{1} \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Z}_5)$; (b) $\begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{0} & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{2} & \hat{1} \\ \hat{2} & \hat{1} & \hat{1} \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Z}_3)$.

9. Adottak az $a, b > 0$ valós számok. Határozd meg azokat az x pozitív valós számokat, amelyekre az

$$A = \begin{pmatrix} \ln x & \ln a & \ln b \\ \ln a & \ln x & \ln b \\ \ln a & \ln a & \ln x \end{pmatrix}$$

mátrix invertálható és számítsd ki ezekben az esetekben az A inverzét.

10. Minden $k \in \mathbb{N}^*$ esetén értelmezzük az $A(k) = \begin{pmatrix} 0 & k \\ k & 0 \end{pmatrix}$ mátrixot. Legyen $H = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Határozz meg egy összefüggést az $A(k)$, H és I_2 mátrixok között és számítsd ki az $(A(k))^n$ mátrixot minden $n \in \mathbb{N}$ esetén!

11. Legyen $\alpha \in \mathbb{R}$ egy valós szám és

$$A = \begin{pmatrix} \alpha - 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 - \alpha \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 - \alpha & -1 \\ 1 - \alpha & (\alpha - 1)^2 & \alpha - 1 \\ -1 & \alpha - 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Igazold, hogy ha $C = A + B$, akkor $C^n = A^n + B^n$ minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén.

12. Számítsd ki a következő mátrixok n-edik hatványát minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén:

(a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

(b) $B = \begin{pmatrix} a & a - 1 \\ 1 - a & 2 - a \end{pmatrix}$, ahol $a \in \mathbb{R}$.

13. Legyen $A \in M_3(\mathbb{R})$. Igazold, hogy ha $\det A \neq 0$, akkor $(A^*)^* = (\det A)A$.

3. Lineáris egyenletrendszerek

14. Oldd meg a következő lineáris egyenletrendszereket a valós számok halmazán:

(a) $\begin{cases} 4x - 3y + z = 0 \\ 2x + y - z = 2 \\ 3x + 4y - 3z = 5 \end{cases}$; (b) $\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 2x + 3y + 2z = 0 \\ 3x + y + 3z = 0 \end{cases}$.

15. Tárgyald a következő egyenletrendszer megoldásait az α, β, γ valós paraméterek szerint:

$$\begin{cases} 2x - y + z - u = 1 \\ x + y + \alpha z + y = -1 \\ x - y + z + \beta u = \gamma \end{cases}.$$

4. Lineáris algebra feladatok az előző évek felvételi-feladataiból

16. Adott a $\beta \in \mathbb{R}$ paraméter és az

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2\beta & 2\beta \\ 2\beta & 2\beta \end{pmatrix}$$

mátrixok. Határozd meg azokat az (x_1, x_2, x_3, x_4) valós számnégyeseket, amelyekre

$$x_1 A + x_2 B + x_3 C + x_4 D = \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Tárgyalás β értéke szerint.

17. Tekintjük az $\alpha \in \mathbb{R}$ számot, az $f = X^3 + \alpha X^2 - \alpha X - 1 \in \mathbb{R}[X]$ polinomot és az

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C})$$

mátrixot, amelynek elemei az f gyökei.

(a) Igazold, hogy az A mátrix minden sorában legalább az egyik elem 1-es.
(b) Határozd meg az α azon értékeit, amelyekre $A \in M_3(\mathbb{R})$.
(c) Bizonyítsd be, hogy $\det A \in \mathbb{R}$ minden $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén.
(d) Tárgyald az A mátrix rangját az $\alpha \in \mathbb{R}$ paraméter értéke szerint.

18. Tárgyald és oldd meg az

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ 2x - 3y + z = 1 \\ -3x + y + 2z = a \end{cases}$$

egyenletrendszert a valós számok halmazán az $a \in \mathbb{R}$ paraméter értékei szerint.

19. Legyen $A, B \in M_2(\mathbb{Z})$, $A = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 18 & 8 \end{pmatrix}$ és $B = \begin{pmatrix} 5 & b \\ a & 7 \end{pmatrix}$. Határozd meg az a és b pareméter értékeit úgy, hogy teljesüljön a $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} B$ feltétel.

20. Legyen $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Igazold, hogy ha X nem invertálható, akkor $X^n = (a+d)^{n-1}X$ bármely $n \geq 2$ természetes szám esetén!

21. Adott az $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ mátrix. Számítsd ki az A^{-1}, A^2, A^{2015} mátrixokat. Határozd meg az A^{2015} mátrix inverzét.

22. Tekintsük az $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3^x \end{pmatrix}$ mátrixot, ahol $x \in \mathbb{R}$. Számítsd ki az $A(x)$ mátrix determinánsát, majd oldd meg a $\det A(x) = 81$ egyenletet!

23. Tekintsük az $A = \begin{pmatrix} 0 & m & 1 \\ m & -2 & 0 \\ 1 & -1 & m \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ mátrixot.

(a) Számítsd ki az A determinánsát.
(b) Határozd meg az $m \in \mathbb{R}$ azon értékeit, amelyekre az A mátrix invertálható.
(c) Az $m = 2$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ esetben oldd meg az $AX = B$ egyenletrendszert.
(d) Tárgyald az $m \in \mathbb{R}$ értékei szerint az $AX = B$ egyenletrendszer kompatibilitását, ahol B az előző pontnál megadott mátrix.

24. Adott a

$$\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ 3x - y + mz = 0 \\ -x + 2y + z = 0 \end{cases}$$

egyenletrendszer.

(a) Számítsd ki a rendszer együtthatómátrixának a determinánsát.
(b) Határozd meg az $m \in \mathbb{R}$ értékét úgy, hogy a rendszernek végtelen sok megoldása legyen.
(c) Igazold, hogy $m = -\frac{3}{5}$ esetén az $E = \frac{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}{x_0^2 + y_0^2 - z_0^2}$ kifejezés értéke állandó a rendszer tetszőleges (x_0, y_0, z_0) megoldása esetén.

25. Tekintsük a valós együtthatójú

$$\begin{cases} x + ay + (b+c)z = 0 \\ x + by + (c+a)z = 0 \\ x + cy + (a+b)z = 0 \end{cases}$$

lineáris egyenletrendszert.

(a) Számítsd ki a rendszer mátrixának a determinánsát.
(b) Igazold, hogy minden $a, b, c \in \mathbb{R}$ esetén a rendszernek léteznek nemzérus megoldásai és határozd meg ezeket a megoldásokat.
(c) Oldd meg a rendszert, tudva azt, hogy $a \neq b$ és $(1, 1, 1)$ megoldása a rendszernek.