HATÁRÉRTÉKEK

1. Igazold az alábbi azonosságokat!

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\left(\sqrt{n+\frac{1}{2}}\right)=\frac{1}{2}$;

(b) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n})=0$;

(c) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$;

(d) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}=\frac{1}{p+1}$, ha $p>0$.

(e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}\right)=0$;

(f) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)=\infty$;

(g) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1$;

2. Bizonyítsd be, hogy ha a és b olyan pozitív valós számok, amelyekre $b\le a$, akkor az $x_n=\sqrt[n]{a^n+b^n}$ képlettel értelmezett valós számsorozat konvergens és határértéke a. Mi történik az $y_n=\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_k^n}$ képlettel értelmezett sorozattal, ahol $k\in\mathbb{N}^*$ rögzített és $a_1,a_2,\ldots,a_k>0$?

3. Igazold, hogy a $\sqrt{2},\sqrt{2\sqrt{2}},\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}},\ldots$ sorozat konvergens és számítsd ki a határértékét!

4. Igazold, hogy ha $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=x$. Igaz-e az állítás fordítottja?

5. Számítsd ki a következő határértékeket!

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right)$;

(b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}\right)$.

6. Igazold, hogy $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[2n+1]{n^2+n}=1$.

7. Legyen x_1 és y_1 két olyan pozitív valós szám, amelyekre $x_1<y_1$. Értelmezzük az $x_{n+1}=\sqrt{x_ny_n}$ és $y_{n+1}=\frac{x_n+y_n}{2}$ képlettel az $(x_n)_{n\ge1}$ és $(y_n)_{n\ge1}$ valós számsorozatokat. Bizonyítsd be, hogy mindkét sorozat konvergens és a határétékeik megegyeznek!

8. Legyen x_1 és y_1 két olyan pozitív valós szám, amelyekre $x_1<y_1$. Értelmezzük az $x_{n+1}=\sqrt{x_ny_n}$ és $y_{n+1}=\frac{2x_ny_n}{x_n+y_n}$ képlettel az $(x_n)_{n\ge1}$ és $(y_n)_{n\ge1}$ valós számsorozatokat. Bizonyítsd be, hogy mindkét sorozat konvergens és a határétékeik megegyeznek!

9. Igazold, hogy a

$$\sqrt{2},\sqrt{2+\sqrt{2}},\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}},\ldots$$

sorozat konvergens és számítsd ki a határértékét!

10. Bizonyítsd be, hogy az

$$x_n=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}$$

képlettel értelmezett sorozat konvergens és a határértéke $\frac{1}{2}$ és 1 között van!

11. Igazold, hogy az

$$x_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$$

képlettel értelmezett sorozat konvergens és számítsd ki a határértékét!

12. Igazold, hogy az

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$$

képlettel értelmezett sorozat konvergens és határértéke 0 és 1 között van.

13. Igazold, hogy az $a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$ képlettel értelmezett sorozat konvergens és határértéke e. Igazold azt is, hogy e irracionális!

14. Ha az $(x_n)_{n\geq 1}$ valós számsorozat pozitív tagú és $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \ell$, akkor

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \ell.$$

Felhasználva az előbbi eredményt, számítsd ki a következő képletekkel értelmezett sorozatok határértékeit:

(a) $a_n = \sqrt[n]{n!}$;

(b) $a_n = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$;

(c) $a_n = \sqrt[n]{\ln n}$;

(d) $a_n = \sqrt[n]{\ln(n!)}$;

(e) $a_n = \frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\dots(n+n)}$;

(f) $a_n = \sqrt[n]{\frac{3^{3n}(n!)^3}{(3n)!}}$.

15. Igazold, hogy ha $x_n > 0$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén és ha $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, akkor

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} = x.$$

Igaz-e az állítás fordítottja?

16. Tanulmányozd a következő sorozatok konvergenciáját, és ha konvergensek, számítsd ki a határértéküket:

(a) $a_n = \frac{1}{1+a_{n-1}}$, $a_0 = 0$;

(b) $a_n = 1 + \frac{2}{a_{n-1}}$, $a_0 = 1$;

(c) $a_n = \frac{n^n}{(n!)^2}$;

(d) $a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}$, $a_0 \in [-2, \infty)$;

17. Léteznek-e a következő függvény-határértékek?

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$;

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} (1 - \cos x)e^x$;

(c) $\lim\limits_{x\to 1} e^{\frac{x}{x-1}}$.

18. Számítsd ki a következő határértékeket!

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos^3 x}{x \sin x}$;

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{x^2}$;

(c) $\lim\limits_{x\to a} \frac{x^x - a^a}{x-a}$, ahol $a > 0$;

(d) $\lim\limits_{x\to a} \frac{a^x - x^a}{x-a}$, ahol $a > 0$;

(e) $\lim\limits_{x\to a} \frac{a^{a^x} - a^{a^a}}{x-a}$, ahol $a > 0$;

(f) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin^3 x + \sin^3 2x + \cdots + \sin^3 nx}{x^3}$;

(g) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+5x)}{x}$;

(h) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2}$;

(i) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{2^{\operatorname{ctg} x} - 2}{x - \frac{\pi}{4}}$;

(j) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{x^2}$;

(k) $\lim\limits_{x\to e} (\ln x)^{\frac{1}{x^2 - 3ex + 2e^2}}$.

19. Határozd meg az $a, b, c, p \in \mathbb{R}$ valós számokat úgy, hogy teljesüljön a

$$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{9x^4 - 24x^3 + 6x^2 + 5} - (ax^p + bx + c)\right) = \frac{7}{3}$$

egyenlőség!