Absztrakt homotópiaelmélet

Lukács Andor

Babeş-Bolyai Tudományegyetem
Matematika és Informatika Kar
Kolozsvár, Románia

2015. december 16.

Mivel foglalkozik?

Topológikus terek tanulmányozásával (osztályozásával), homotópia erejéig.

Mivel foglalkozik?

Topológikus terek tanulmányozásával (osztályozásával), homotópia erejéig.

Homotópia

Az $f, g\colon X \to Y$ folytonos függvények **homotópak** ($f \sim g$), ha létezik $H\colon X \times I \to Y$ folytonos függvény úgy, hogy a

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\iota_0"] \arrow[dr, "f"'] & X \times I \arrow[d, "H"] & X \arrow[l, "\iota_1"'] \arrow[dl, "g"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

diagram kommutatív, ahol az I topológikus tér a $[0, 1]$ intervallum.

Homotópia-ekvivalencia

Az X és Y topologikus terek **homotóp ekvivalensek** ($X \simeq Y$) ha léteznek az $f\colon X \to Y$ és $f'\colon Y \to X$ folytonos függvények úgy, hogy $f \circ f' \sim 1_Y$ és $f' \circ f \sim 1_X$.

Homotópia-ekvivalencia

Az X és Y topologikus terek **homotóp ekvivalensek** ($X \simeq Y$) ha léteznek az $f\colon X \to Y$ és $f'\colon Y \to X$ folytonos függvények úgy, hogy $f \circ f' \sim 1_Y$ és $f' \circ f \sim 1_X$.

Sajátos eset: Utak homotópiája

Amikor $X = I$ a fenti értelmezésben, vagyis f és g két út az Y topologikus térben, és teljesül az is, hogy az utak kiinduló- és végpontjai megegyeznek. Ebben az esetben a H homotópia fixen kell hagyja a végpontokat.

Fundamentális csoport intuitív értelmezése

X egy topológikus tér és $x \in X$ egy pont. A $\pi_1(X, x)$ **fundamentális csoport** majdnem (!) az x pontból kiinduló hurkok csoportja, az utak összefűzésével, mint művelettel.

Fundamentális csoport intuitív értelmezése

X egy topologikus tér és $x \in X$ egy pont. A $\pi_1(X, x)$ **fundamentális csoport** majdnem (!) az x pontból kiinduló hurkok csoportja, az utak összefűzésével, mint művelettel.

Fundamentális csoport pontos értelmezése

- Tetszőleges $f, g\colon I \to X$ utakra az X topologikus térben úgy, hogy $f(0) = u$, $f(1) = v = g(0)$ és $g(1) = w$, értelmezzük az $f \cdot g\colon I \to X$ utat:

$$f \cdot g(s) = \begin{cases} f(2s) & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ g(2s-1) & \frac{1}{2} \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Fundamentális csoport intuitív értelmezése

X egy topológikus tér és $x \in X$ egy pont. A $\pi_1(X, x)$ **fundamentális csoport** majdnem (!) az x pontból kiinduló hurkok csoportja, az utak összefűzésével, mint művelettel.

Fundamentális csoport pontos értelmezése

- Tetszőleges $f, g\colon I \to X$ utakra az X topológikus térben úgy, hogy $f(0) = u$, $f(1) = v = g(0)$ és $g(1) = w$, értelmezzük az $f \cdot g\colon I \to X$ utat:

$$f \cdot g(s) = \begin{cases} f(2s) & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ g(2s-1) & \frac{1}{2} \leq s \leq 1. \end{cases}$$

- Legyen $\mathcal{H}(X, x) = \{f\colon I \to X \mid f \text{ út és } f(0) = f(1) = x\}$ az x-ből induló hurkok halmaza.

Fundamentális csoport intuitív értelmezése

X egy topológikus tér és $x \in X$ egy pont. A $\pi_1(X, x)$ **fundamentális csoport** majdnem (!) az x pontból kiinduló hurkok csoportja, az utak összefűzésével, mint művelettel.

Fundamentális csoport pontos értelmezése

- Tetszőleges $f, g\colon I \to X$ utakra az X topológikus térben úgy, hogy $f(0) = u$, $f(1) = v = g(0)$ és $g(1) = w$, értelmezzük az $f \cdot g\colon I \to X$ utat:

$$f \cdot g(s) = \begin{cases} f(2s) & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ g(2s-1) & \frac{1}{2} \leq s \leq 1. \end{cases}$$

- Legyen $\mathcal{H}(X, x) = \{f\colon I \to X \mid f \text{ út és } f(0) = f(1) = x\}$ az x-ből induló hurkok halmaza.
- A fundamentális csoport $\pi_1(X, x) = \mathcal{H}(X, x)/_\sim$, a fenti "$\cdot$"-ból származtatott művelettel.

Megjegyzések

- Ha az X útszerűen összefüggő, akkor az x bázispont megválasztása irreleváns:
$$\pi_1(X, x) \simeq \pi_1(X, y).$$

Megjegyzések

- Ha az X útszerűen összefüggő, akkor az x bázispont megválasztása irreleváns:
$$\pi_1(X,x) \simeq \pi_1(X,y).$$

- A fundamentális csoport az X térben "előforduló" egy dimenziós lyukakat (is) "számolja".

Megjegyzések

- Ha az X útszerűen összefüggő, akkor az x bázispont megválasztása irreleváns:
$$\pi_1(X,x) \simeq \pi_1(X,y).$$
- A fundamentális csoport az X térben "előforduló" egy dimenziós lyukakat (is) "számolja".
- $\pi_1(\mathbb{R}) = \pi_1(\mathbb{R}^2) = \pi_1(D^2) = 1$,
$\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$, $\pi_1(T^1) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $\pi_1(8) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$.
- Bevezethetők a magasabb dimenziós homotópiacsoportok is: $\pi_n(X,x)$.

Megjegyzések

- Ha az X útszerűen összefüggő, akkor az x bázispont megválasztása irreleváns:
$$\pi_1(X,x) \simeq \pi_1(X,y).$$

- A fundamentális csoport az X térben “előforduló” egy dimenziós lyukakat (is) “számolja”.
- $\pi_1(\mathbb{R}) = \pi_1(\mathbb{R}^2) = \pi_1(D^2) = 1$,
$\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$, $\pi_1(T^1) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $\pi_1(8) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$.
- Bevezethetők a magasabb dimenziós homotópiacsoportok is: $\pi_n(X,x)$.

Első alkalmazások

- **Brouwer fixpont tétel:** Ha $f\colon D^2 \to D^2$ folytonos, akkor van fixpontja.
- **Algebra alaptétele:** Minden komplex együtthatós, nem konstans $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ polinomfüggvénynek van komplex gyöke.

Poincaré-Perelman tétel

- Minden egyszeresen összefüggő, zárt három dimenziós sokaság homeomorf a 3-gömbbel.

Miről szól, honnan ered?

- Daniel Quillen:
  - *Rational homotopy theory*, Ann. Math., 1969.
  - *Homotopical Algebra*, Lecture Notes in Math., Springer, 1967.

Miről szól, honnan ered?

- Daniel Quillen:
  - *Rational homotopy theory*, Ann. Math., 1969.
  - *Homotopical Algebra*, Lecture Notes in Math., Springer, 1967.

- A klasszikus homotópiaelmélet eredményeinek és szerkesztéseinek analógjai léteznek más kategóriákban is (nem csak a topológikus terek kategóriájában).

Miről szól, honnan ered?

- Daniel Quillen:
  - *Rational homotopy theory*, Ann. Math., 1969.
  - *Homotopical Algebra*, Lecture Notes in Math., Springer, 1967.

- A klasszikus homotópiaelmélet eredményeinek és szerkesztéseinek analógjai léteznek más kategóriákban is (nem csak a topológikus terek kategóriájában).
- Ilyen kategóriák például a szimpliciális halmazok, groupoidok, lánckomplexusok, modulusok, DGA-k kategóriája.

A homotópiaelmélet kategorifikálása: a model kategóriák fogalma

Adott egy C kategória, és benne három osztálya a morfizmusoknak: a gyenge ekvivalenciák, a kofibrálások és a fibrálások. Teljesülnek a következő axiómák:

A homotópiaelmélet kategorifikálása: a model kategóriák fogalma

Adott egy C kategória, és benne három osztálya a morfizmusoknak: a gyenge ekvivalenciák, a kofibrálások és a fibrálások. Teljesülnek a következő axiómák:

- C-ben léteznek a direkt és inverz határértékek (limitek és kolimitek).

A homotópiaelmélet kategorifikálása: a model kategóriák fogalma

Adott egy C kategória, és benne három osztálya a morfizmusoknak: a gyenge ekvivalenciák, a kofibrálások és a fibrálások. Teljesülnek a következő axiómák:

- C-ben léteznek a direkt és inverz határértékek (limitek és kolimitek).
- Ha $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ két morfizmus C-ben, amelyekre teljesül, hogy az f, g és $g \circ f$ közül kettő gyenge ekvivalencia, akkor a harmadik is az.

A homotópiaelmélet kategorifikálása: a model kategóriák fogalma

Adott egy C kategória, és benne három osztálya a morfizmusoknak: a gyenge ekvivalenciák, a kofibrálások és a fibrálások. Teljesülnek a következő axiómák:

- C-ben léteznek a direkt és inverz határértékek (limitek és kolimitek).
- Ha $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ két morfizmus C-ben, amelyekre teljesül, hogy az f, g és $g \circ f$ közül kettő gyenge ekvivalencia, akkor a harmadik is az.
- Ha $f\colon X \to Y$ retraktja a $g\colon X' \to Y'$-nek, akkor a g osztálya meghatározza az f osztályát.

A homotópiaelmélet kategorifikálása: a model kategóriák fogalma

- Ha a következő diagram kommutatív

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "p"] \\ B \arrow[r] \arrow[ur, dotted] & Y, \end{tikzcd}$$

  akkor létezik egy $B \to X$ függvény, ami felbontja a fenti diagrammot, feltéve ha az alábbi két kijelentés közül az egyik teljesül:
  - i egy kofibrálás és p egy olyan fibrálás, ami egyben gyenge ekvivalencia is;
  - p egy fibrálás és i egy olyan kofibrálás, ami egyben gyenge ekvivalencia is;

A homotópiaelmélet kategorifikálása: a model kategóriák fogalma

- Ha a következő diagram kommutatív

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "p"] \\ B \arrow[r] \arrow[ur, dotted] & Y, \end{tikzcd}$$

akkor létezik egy $B \to X$ függvény, ami felbontja a fenti diagrammot, feltéve ha az alábbi két kijelentés közül az egyik teljesül:
  - i egy kofibrálás és p egy olyan fibrálás, ami egyben gyenge ekvivalencia is;
  - p egy fibrálás és i egy olyan kofibrálás, ami egyben gyenge ekvivalencia is;
- minden $f\colon X \to Z$ morfizmus a C-ből felbontható az alábbi két alakban:

$$X \xrightarrow{i} Y \xrightarrow{p} Z \quad \text{és} \quad X \xrightarrow{i'} Y \xrightarrow{p'} Z,$$

ahol i kofibrálás, p triviális fibrálás, és i' triviális kofibrálás, p' fibrálás.

Ciklikus operádok absztrakt homotópiaelmélete

- Létezik egy model kategória struktúra a ciklikus operádok kategóriáján.

Ciklikus operádok absztrakt homotópiaelmélete

- Létezik egy model kategória struktúra a ciklikus operádok kategóriáján.
- Ez a struktúra lehetővé teszi a ciklikus operádok egy kofibráns felbontásának (Boardman-Vogt) a természetes értelmezését.

Ciklikus operádok absztrakt homotópiaelmélete

- Létezik egy model kategória struktúra a ciklikus operádok kategóriáján.
- Ez a struktúra lehetővé teszi a ciklikus operádok egy kofibráns felbontásának (Boardman-Vogt) a természetes értelmezését.
- A klasszikus bar-cobar felbontás és a szimpliciális Godement felbontás sajátos esetei a fentinek.