I Mátrix determinánsa

mátrix itt végyetes sell legyen!
$\mathbb{R}$ - felett

2 × 2-es mátrix determinánsa

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{1(1)}a_{2(2)} - a_{1(2)}a_{2(1)} = \varepsilon(e)a_{1e(1)}a_{2e(2)} + \varepsilon(\tau_{12})a_{1\tau_{12}(1)}a_{2\tau_{12}(2)}$$

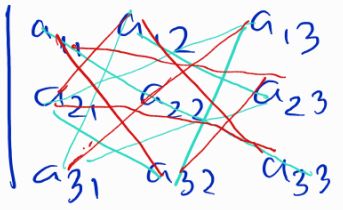
$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\tau_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$2! = 2$

$\varepsilon(e) = 1$ $\varepsilon(\tau_{12}) = -1$

permutációk előjele

τ_{12} 12-es transzpozíció



$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \overset{+}{e=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}} \overset{+}{\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}} \overset{+}{\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Sarrus szabály

$3! = 6$

$\tau_{13} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\tau_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ $\tau_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

$$= \sum_{\sigma \in S_3} \varepsilon(\sigma)\, a_{1\sigma(1)}\, a_{2\sigma(2)}\, a_{3\sigma(3)}$$

Def: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$ $\mathbb{C}$

$n \times n$-es mátrix $\mathbb{R}$ vagy $\mathbb{C}$ - felett

$$\det A \overset{\text{ért}}{=} \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)\, a_{1\sigma(1)}\, a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

a tagok száma $|S_n| = n!$

Ha n nagy $n!$ nagyon nagy és ezért ez a definíció számolásra nem alkalmas.

Tulajd: $\det A^t = \det A$, ahol

$$A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$\uparrow$

A transzponáltja (sorok $\longleftrightarrow$ oszlopok)

Pl

$$\left(\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}\right)^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Biz ért alapján.

A többi det tulajdonság a determináns egy másik értelmezéséből (megközelítéséből) jön

det $\longrightarrow$ multilineáris alternáló forma

Tulajd: 1.) A determináns lineáris minden egyes oszlopában

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \alpha a_{1i} + \beta a'_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \alpha a_{ni} + \beta a'_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \alpha \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a'_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a'_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Pl

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3=2+1 \\ a & b & 2a+b \\ a^2 & b^2 & 2a^2+b^2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & a \\ a^2 & b^2 & a^2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & b \\ a^2 & b^2 & b^2 \end{vmatrix}$$

$= 0$ $= 0$ $= 0$

1)* part esete 1)-nek $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \alpha a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \alpha a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \alpha \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

2.) ha A-nak valamely oszlopa csupa 0, akkor $\det A = 0$

3.) ha A-nak 2 oszlopa egyezik, akkor $\det A = 0$

4.) ha felcserélünk A-nak 2 oszlopát a determinánsnak csak az előjele változik

5.) ha egy oszlophoz hozzáadjuk egy másik oszlop skalárszorosát, akkor a determinánsa nem változik

6.) j-edik oszlop szerinti kifejtés

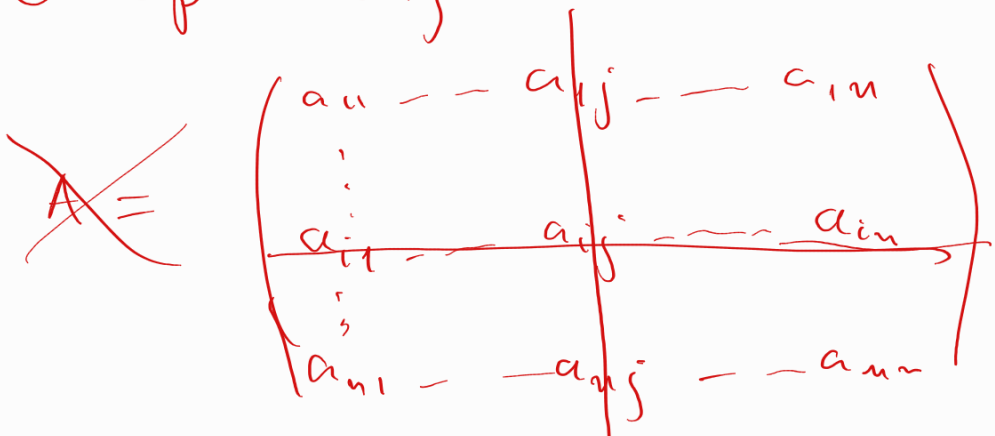
$A = n \times n$-es

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \boxed{(-1)^{i+j} \det A_{ij}}$$

$$\Gamma_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij} = \text{az } a_{ij} \text{ elem}$$

algebrai komplementuma, ahol

A_{ij} = $(n-1) \times (n-1)$-es mátrix, melyet A-ból úgy kapunk, hogy az i-edik sor illetve j-edik oszlop kivágásával.



7.) az előző 6) tulajdonság átfogalmazható sorokra

i-edik sor szerinti kifejtés

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \underbrace{(-1)^{i+j} \det A_{ij}}_{\Delta_{ij}}$$

8.) $A, B \in M_n(\mathbb{R})$

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B$$

Determinánsszámítási stratégia:

- használjuk a sor v oszlop szerinti kifejtését
- ha van egy n db 0 az det → sok n-1 db 0 det
- cél: minél kevesebb n-1 db 0 det legyen

tehát abban a sorban (v oszlopban) ami

Bemutat elvégzésünk a bizonyítást mindkét esetben 0-át kapunk be 5) segítségével

Példák:

1.) 3×3 Vandermonde det

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-c & b-c & c \\ a^2-c^2 & b^2-c^2 & c^2 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a-c & b-c \\ a^2-c^2 & b^2-c^2 \end{vmatrix}$$

$(a-c)\cdot 1$

$(a-c)(a+c)$

$$= (a-c) \begin{vmatrix} 1 & b-c \\ a+c & b^2-c^2 \end{vmatrix} =$$

$$= (a-c)(b-c) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a+c & b+c \end{vmatrix} = (a-c)(b-c)(b-a) =$$

$$= (c-a)(c-b)(b-a)$$ → van általánosítható $n \times n$-es Vandermonde-ra

Másképp:

$$\begin{matrix} -a) \\ +) \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \overset{\pm}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ 0 & b(b-a) & c(c-a) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & b-a \quad c-a \\ 0 & b(b-a) \quad c(c-a) \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b & c \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

2×2-es Vandermonde

2.)

$n \times n$-es Vandermonde det

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-3} & a_2^{n-3} & \cdots & a_n^{n-3} \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2} \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} =: V_n(a_1, a_2, \dots, a_n) =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & \cdots & a_n - a_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_2^{n-3}(a_2 - a_1) & \cdots & a_n^{n-3}(a_n - a_1) \\ 0 & a_2^{n-2}(a_2 - a_1) & \cdots & a_n^{n-2}(a_n - a_1) \end{vmatrix} =$$

$$= (a_2 - a_1) \cdots (a_n - a_1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2} \end{vmatrix} =$$

$$= (a_2 - a_1) \cdots (a_n - a_1) \, V_{n-1}(a_2, a_3, \dots, a_n)$$

resolvendo ddo

$\Rightarrow$

$$V_n(a_1, a_2, \dots, a_n) = (a_2 - a_1) \cdots (a_n - a_1)(a_3 - a_2) \cdots (a_n - a_2) \, V_{n-2}(a_3, \dots, a_n) = \cdots$$

$$\cdots = \prod_{1 \le i < j \le n} (a_j - a_i)$$

$$V_n(a_1, \dots, a_n) = \prod_{1 \le i < j \le n} (a_j - a_i)$$

3.) $-A = \begin{pmatrix} -a_{11} & \cdots & -a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & \cdots & -a_{nn} \end{pmatrix}$

$$\det(-A) = \underbrace{(-1) \cdots (-1)}_{n \text{ drb}} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & & \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \det A$$

$$= (-1)^n \det A$$

$$\begin{vmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{vmatrix} = (-1)^2 \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

4.) $$\begin{vmatrix} a+b & a+c & b+c \\ a^2+b^2 & a^2+c^2 & b^2+c^2 \\ a^3+b^3 & a^3+c^3 & b^3+c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a+c & b+c \\ a^2 & a^2+c^2 & b^2+c^2 \\ a^3 & a^3+c^3 & b^3+c^3 \end{vmatrix} +$$

nemusíš
vlepos image mezi

$$\begin{vmatrix} b & a+c & b+c \\ b^2 & a^2+c^2 & b^2+c^2 \\ b^3 & a^3+c^3 & b^3+c^3 \end{vmatrix} = \quad - \quad - \quad -$$

$$= \begin{vmatrix} a & a & b \\ a^2 & a^2 & b^2 \\ a^3 & a^3 & b^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & a & c \\ a^2 & a^2 & c^2 \\ a^3 & a^3 & c^3 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} a & c & b \\ a^2 & c^2 & b^2 \\ a^3 & c^3 & b^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & c & c \\ a^2 & c^2 & c^2 \\ a^3 & c^3 & c^3 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} b & a & b \\ b^2 & a^2 & b^2 \\ b^3 & a^3 & b^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & a & c \\ b^2 & a^2 & c^2 \\ b^3 & a^3 & c^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & c & b \\ b^2 & c^2 & b^2 \\ b^3 & c^3 & b^3 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} b & c & c \\ b^2 & c^2 & c^2 \\ b^3 & c^3 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c & b \\ a^2 & c^2 & b^2 \\ a^3 & c^3 & b^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & a & c \\ b^2 & a^2 & c^2 \\ b^3 & a^3 & c^3 \end{vmatrix}$$

-1 $\qquad -1$

$$= -2 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = -2abc \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \overset{1)}{=}$$

a) b) c) $\quad = -2abc(c-a)(c-b)(b-a)$

5) $$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2 & a^2+2a+1 & a^2+4a+4 \\ b^2 & b^2+2b+1 & b^2+4b+4 \\ c^2 & c^2+2c+1 & c^2+4c+4 \end{vmatrix}$$

$=$

Colops permit nehme dyn. 3 drb det $3 \cdot 3$

$$= \begin{vmatrix} a^2 & 2a & 4 \\ b^2 & 2b & 4 \\ c^2 & 2c & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a^2 & 1 & 4a \\ b^2 & 1 & 4b \\ c^2 & 1 & 4c \end{vmatrix} =$$

$$= 8 \cdot \begin{vmatrix} a^2 & a & 1 \\ b^2 & b & 1 \\ c^2 & c & 1 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} a^2 & 1 & a \\ b^2 & 1 & b \\ c^2 & 1 & c \end{vmatrix} =$$

$$= 4 \cdot \begin{vmatrix} a^2 & a & 1 \\ b^2 & b & 1 \\ c^2 & c & 1 \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

transponáljuk

$$= (-4) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \overset{1.)}{=} (-4)(c-a)(c-b)(b-a)$$

6.)

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & a & b & c & d \\ -a & 0 & e & f & g \\ -b & -e & 0 & h & i \\ -c & -f & -h & 0 & j \\ -d & -g & -i & -j & 0 \end{vmatrix} \overset{a,b,\ldots,j \in \mathbb{R}}{=} (-1)^5 \begin{vmatrix} 0 & -a & -b & -c & -d \\ a & 0 & -e & -f & -g \\ b & e & 0 & -h & -i \\ c & f & h & 0 & -j \\ d & g & i & j & 0 \end{vmatrix}$$

$\det A^t$

de $\det A^t = \det A$

$$= (-1)^5 \det A^t = (-1) \cdot \det A \Rightarrow 2 \det A = 0$$
$$\Rightarrow \det A = 0$$

Megj: (1) páratlan dimenziójú "antiszimmetrikus mátrix" determinánsa $= 0$

$\Downarrow$



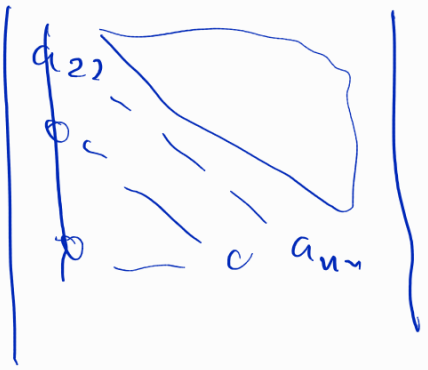
$a_{ii} = 0$

$a_{ij} = -a_{ji} \quad i < j$

(2)



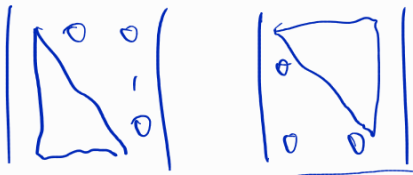
$= a_{11} \cdot$



$=$

$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}$

alsó v felső Δ alakú mátrix determinánsa
= a főátló elemeinek szorzata



(+)

(+)

4.)

$$\begin{vmatrix} 1+x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1 & 1+x_2 & \dots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & \dots & 1+x_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+x_1+\dots+x_n & x_2 & \dots & x_n \\ & 1+x_2 & \dots & x_n \\ & \vdots & & \vdots \\ 1+x_1+\dots+x_n & x_2 & \dots & 1+x_n \end{vmatrix}$$

$$= (1 + x_1 + \dots + x_n) \begin{vmatrix} 1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1 + x_1 + \dots + x_n$$

II Négyzetes mátrixok hatványai

$A \in M_n(\mathbb{R})$

1. tétel: Cayley - Hamilton tétel 2×2-es mátrixokra

Ha $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$, akkor

$$A^2 - \mathrm{Tr}A \cdot A + \det A \cdot I_2 = O_2$$

, ahol

$\mathrm{Tr}A = a + d$ = az A mátrixra "nyoma" = a mátrix főátlón levő elemeinek összege

$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

2 tanítás $A \in M_n(\mathbb{R})$

$A^m = ?$ $\quad A = B + \alpha \cdot I_n$ $\quad B^m$ már kell hogy legyen számunk

ekkor $A^m = (B + \alpha \cdot I_n)^m = \dots$

Newton binomiális tételes alkalmazható ezért

$B \cdot (\alpha I_n) = (\alpha I_n) B = \alpha \cdot B$

$\dots = B^m + \alpha C_m^1 \cdot B^{m-1} + \alpha^2 C_m^2 B^{m-2} + \dots + \alpha^m I_n$

Példák:

1.) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a+b \end{pmatrix}$

$A^m = ?$

Első lépések: $A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a+b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & b^2+2ab \\ 0 & (a+b)^2 \end{pmatrix}$ $\quad (a+b)^2 - a^2$

$A^3 = \begin{pmatrix} a^3 & b^3+3a^2b+3b^2a \\ 0 & (a+b)^3 \end{pmatrix} = (a+b)^3 - a^3$

$\vdots$

Sejtés $A^m = \begin{pmatrix} a^m & (a+b)^m - a^m \\ 0 & (a+b)^m \end{pmatrix}$ ✓

Bizonyítás indukcióval

$m = 1 - re$ igaz

ekkor $m - re$ és így $m+1-re$

$A^{m+1} = A^m \cdot A = \begin{pmatrix} a^m & (a+b)^m - a^m \\ 0 & (a+b)^m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a+b \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} a^{n+1} & (a+b)^{n+1} - a^n(a+b) + a^n b = (a+b)^{n+1} - a^{n+1} \\ 0 & (a+b)^{n+1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a^{n+1} & (a+b)^{n+1} - a^{n+1} \\ 0 & (a+b)^{n+1} \end{pmatrix}$$

1 trick: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a+b \end{pmatrix}$ $\quad Tr A = 2a+b$, $\det A = a^2+ab$

$$A^2 - (2a+b)A + (a^2+ab)I_2 = O_2$$

$$A^2 = (2a+b)A - (a^2+ab)I_2 \;/\; \text{resultió } A^{n-2}$$

$$A^n = (2a+b)A^{n-1} - (a^2+ab)A^{n-2}$$

$$A^3 = (2a+b)A^2 - (a^2+ab)A = (2a+b)^2 A - \dots$$

— — — —

$$= b^m \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + C_m^1 a b^{m-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \dots + C_m^{m-1} a^{m-1} b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} +$$

$$+ a^m \cdot I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\left(b^m + C_m^1 a b^{m-1} + \dots + C_m^{m-1} a^{m-1} b \right)}_{(a+b)^m - a^m}$$

$$+ a^m I_2 = \left((a+b)^m - a^m \right) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a^m & 0 \\ 0 & a^m \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a^m & (a+b)^m - a^m \\ 0 & (a+b)^m \end{pmatrix} \checkmark$$

2.) $A \in M_2(\mathbb{R})$ $\quad A^{2023} = O_2$ $\quad A = ?$

1 módszer: $A^2 - \operatorname{Tr} A \cdot A + \det A \cdot I_2 = O_2$

$A^{2023} = O_2 \quad / \det \Rightarrow (\det A)^{2023} = \det O_2 = 0$

$\Rightarrow \det A = 0$

$\Rightarrow A^2 - \operatorname{Tr} A \cdot A = O_2 \Rightarrow A^2 = \operatorname{Tr} A \cdot A \quad / A^{2021}$

$\Rightarrow O_2 = A^{2023} = \operatorname{Tr} A \cdot A^{2022} = \dots = (\operatorname{Tr} A)^{2022} \cdot A$ Sokk — ötlik

$\Rightarrow A = O_2$

$\Rightarrow$ $\begin{cases} \operatorname{Tr} A = 0 \\ \det A = 0 \end{cases} \Rightarrow A^2 = O_2$

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$\operatorname{Tr} A = 0 \Leftrightarrow a + d = 0$

$\det A = 0 \Leftrightarrow ad = bc$

$A^{2023} = O_2 \Leftrightarrow A^2 = O_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Tr} A = 0 \\ \det A = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a + d = 0 \\ ad = bc \end{cases}$

III. Mátrixok rangja

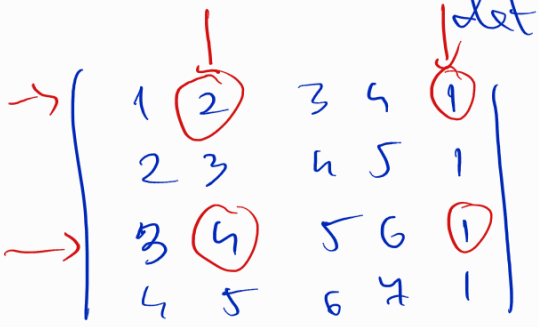
$A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$

nem feltétlenül négyzetes

Def: $\operatorname{rang} A = r \overset{\text{def}}{\iff}$ Ex. r db. determinánsa amik nem nullák és minden r-nél nagyobb dimenziós determinánsa $= 0$

r db. determináns = az eredeti mátrix r sora és r oszlopa tetszőleges kiválasztásával képzett $r \times r$-es mátrix determinánsa

pl.



$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$ 2×2-es determináns

Definícióval nagyon nehéz rangot meghatározni. Ezért az ún. **megfigyelés módszerét** alkalmazzuk a rang meghatározásra, ehhez pedig **ez az ún. tétel**

Alapja

Tétel: $\operatorname{rang} A = r \iff$ Ex. r db. determináns $\neq 0$ és az összes $r+1$ db. determináns amely tartalmazza az előző $\neq 0$ r db. determinánst vagy nulla kell legyen

Gyakorlatban:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$1 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rang} A \geq 1$ ezért Ex. nem nulla elem

$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rang} A \geq 2$

$$\left.\begin{array}{l} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \operatorname{rang} A = 2$$

Gyors rangmeghatározásra az elemi transzformációk módszerét ajánljuk.

Lényege: rangőrző elemi transzformációkkal alakítjuk a mátrixunkat addig amíg az alábbi alakú



Ebben rang A = az 1-esek száma

Elemi transzformációk:

1.) 2 sort (oszlopot) fel lehet cserélni
2.) sort (oszlopot) lehet nem nulla számmal szorozni
3.) sorhoz (oszlophoz) hozzáadhatjuk egy másik sor (oszlop) számszorosát
⟶ így kapunk be 0-kat

Példa:

1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \sim$

$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \operatorname{rang} A = 2$

2.)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -2 & 1 & \beta \\ 1 & 1 & 2 & 0 & \alpha & \gamma \end{pmatrix} \sim \begin{matrix} \\ +1 \\ -2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & \beta \\ 2 & 1 & 1 & 0 & \alpha & \gamma \end{pmatrix} \sim \dots$$

$\operatorname{rang} A = ?$ Trianguláris

cél: olyan bázis keresése parciális oszlopcserék (sorcserék) mellett, hogy 0 vagy nem 0

$$\dots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & \beta \\ 0 & 1 & -1 & -2 & \alpha & \gamma-2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & \beta \\ 0 & 1 & -1 & -2 & \alpha & \gamma-2 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha-1 & \gamma-2-\beta \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (\alpha-1) & (\gamma-2-\beta) \end{pmatrix}$$

ha $\alpha \neq 1$ vagy $\gamma \neq \beta+2$ $\Rightarrow$ $\operatorname{rang} A = 3$

ha $\alpha = 1$ és $\beta+2 = \gamma$ $\Rightarrow$ $\operatorname{rang} A = 2$

pld $\alpha = 3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\gamma =$

IV. Egyenletrendszerek.

(5)
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

a rendszer mátrixa

$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ a szabadtagok oszlopa

$\overline{A} = (A \; b)$ a bővített mátrix

1. Kérdés:
Van-e megoldás? / vagy: kompatibilis-e?

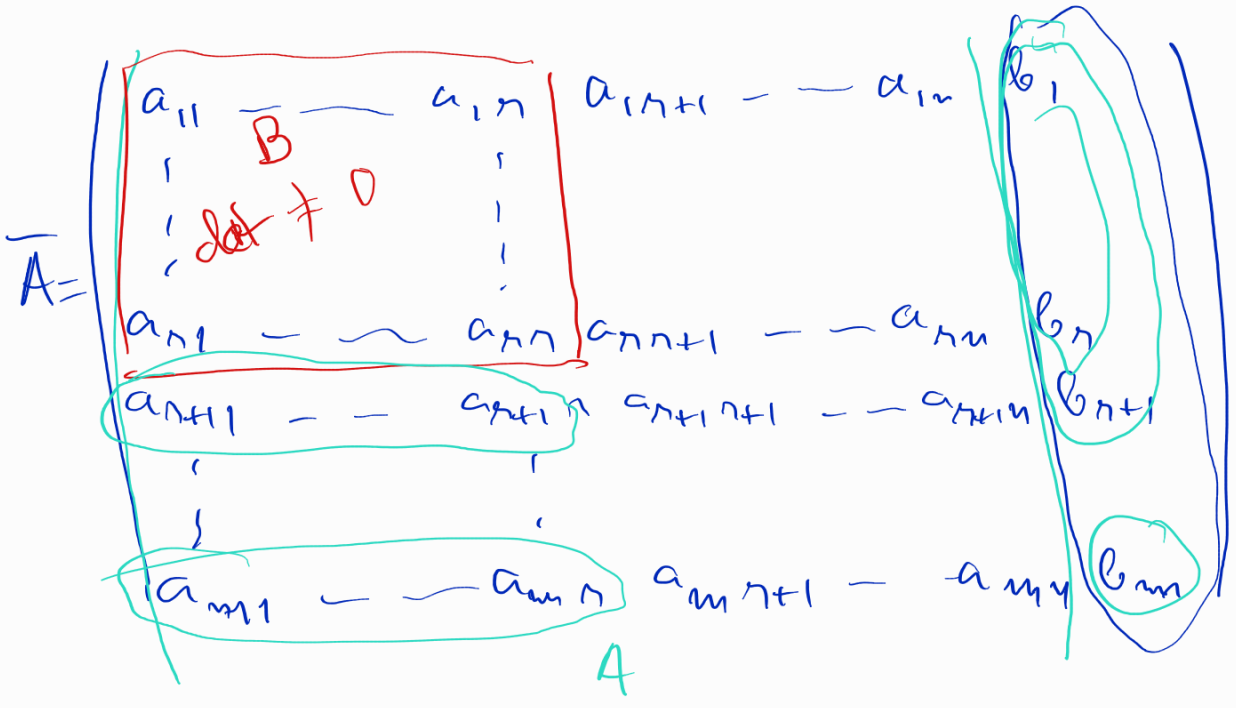
Tétel (Kronecker-Capelli)

(S) kompatibilis $\Leftrightarrow$ $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \overline{A}$

$\Downarrow$

Rouché tétel:

tegyük fel $\operatorname{rang} A = r$ és az $r \times r$-es aldeterminánsok közül $a_{11} \neq 0$ a bal felső sarokban van
(ezáltal $x_1, \dots, x_r$ főismeretlenek
$1., 2., \dots, r.$ egyenlet a főegyenlet)



(S) kompatibilis $\Leftrightarrow$ (K-C) $\operatorname{rang}\bar{A} = \operatorname{rang}A$

$\Leftarrow$ a karakterisztikus $\det = 0$

$$\begin{vmatrix} & B & \\ a_{n+1,1} & \cdots & a_{n+1,n} \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \\ b_{n+1} \end{matrix} \Bigg| = 0$$

$n+1.$ egyenlet (az első n ellőegyenlet) együtthatói

$$\begin{vmatrix} & B & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \\ b_m \end{matrix} \Bigg| = 0$$

A rendszer homogén $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ és ez biztos kompatibilis ezt az $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ megoldás. Ez az ún triviális megoldás.

A rendszer Cramer ha $n = m$ és $\det A \neq 0$

Tétel: ha $n = m$

(S) kompatibilis és egyértelmű megoldása van $\Leftrightarrow \det A \neq 0$

Mitőbb ez esetben az egyértelmű megoldás $x^0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{pmatrix}$ ahol $x_i^0 = \dfrac{\det(o_1^A \dots \overset{i}{\overline{b}} \dots o_n^A)}{\det A}$

$\det(o_1^A \dots b \dots o_n^A) =$ A-ban kicseréljük az i-edik oszlopot a mellékelt oszlopával és kiszámoljuk a determinánst.

Tulajd: ha $n = m$ és a rendszer homogén akkor csak triviális megoldásunk van $\Leftrightarrow \det A \neq 0$

Példa:
$$\begin{cases} x_1 + x_3 + x_4 + x_6 = 4 \\ -x_1 + x_2 - 2x_4 + x_5 + \beta x_6 = -2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + \alpha x_5 + x_6 = \gamma \end{cases}$$

Tárgyaljuk $\mathbb{R}$ - felett

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -2 & 1 & \beta \\ 1 & 1 & 2 & 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ \gamma \end{pmatrix}$$

1 Lépés: Kompatibilitás vizsgálat

$$A = \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 0 & -2 & 1 & \beta & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & \alpha & 1 & \gamma \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & \beta+1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & \alpha & 0 & \gamma-4 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & \beta+1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha-1 & -\beta-1 & \gamma-6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha-1 & -\beta-1 & \gamma-6 \end{array}\right)$$

$\operatorname{rang} A \geq 2$ Ha $\operatorname{rang}_{3\times 6} A = 3 = \operatorname{rang}_{3\times 7} \bar{A}$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} & A & & \begin{matrix}4\\-2\\\gamma\end{matrix} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha-1 & -\beta-1 & \gamma-6 \end{array}\right)$$

$x_1\ x_2$ $\quad$ x_5 $\quad$ x_6

(S) kompatibilis $(\Leftrightarrow)$ $\operatorname{rang} A \neq \operatorname{rang} \overline{A} = 2 (\Leftrightarrow)$

$(\Leftrightarrow)$ $\alpha = 1 \quad \beta = -1 \quad \gamma \neq 6$

(S) kompatibilis $(\Leftrightarrow)$

$\begin{cases} \alpha = 1 \ \beta = -1 \quad \gamma = 6 \\ \text{vagyis } \operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \overline{A} = 2 \\ \text{vagy} \\ \alpha \neq 1 \quad \text{vagy} \quad \beta \neq -1 \\ \text{vagyis } \operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \overline{A} = 3 \end{cases}$

2. Lépés

1 eset: $\alpha = 1 \quad \beta = -1 \quad \gamma = 6$

$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \overline{A} = 2$

$\Rightarrow$ 2 főismeretlen: x_1, x_2

2 főegyenlet: 1., 2.

4 mellékismeretlen

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + x_4 + x_6 = 4 \\ -x_1 + x_2 - 2x_4 + x_5 - x_6 = -2 \end{cases} \quad / +$$

$$x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 2 \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 2 - x_3 + x_4 - x_5 \\ x_1 = 4 - x_3 - x_4 + x_6 \end{cases}$$

$\alpha \quad \beta \quad \gamma$

$1 \quad 0$

$-1 \quad 1$

$\rightarrow$ d Stepp Cramer Sapkettel

$$\begin{cases} x_1 = 4-\alpha-\beta-\delta \\ -x_1+x_2 = -2+2\beta-\gamma+\delta \end{cases}$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 4-\alpha-\beta-\delta & 0 \\ -2+2\beta-\gamma+\delta & 1 \end{vmatrix}}{\det \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}} = 4-\alpha-\beta-\delta$$

$$x_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4-\alpha-\beta-\delta \\ -1 & -2+2\beta-\gamma+\delta \end{vmatrix} = \dots$$

---

2 eset: $\alpha \neq 1 \quad \vee \quad \beta \neq -1$

$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \overline{A} = 3$

3 főismeretlen: x_1, x_2, x_5 ha $\alpha \neq 1$

3 főegyenlet: x_1, x_2, x_6 ha $\beta \neq -1$

(az összes)

Cramer rendszer pld ha $\alpha \neq 1$

x_1, x_2, x_5 főismeretlen

$x_3 = a \quad x_4 = b \quad x_6 = c$ paraméterek

$$\begin{cases} x_1 = 4-a-b-c \\ -x_1+x_2+x_5 = -2+2b-\beta c \\ x_1+x_2+\alpha x_5 = \gamma-2a-c \end{cases}$$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix} \qquad \alpha \neq 1$$

$\det A' \neq 0$