17 ianuarie 2023 Lect. dr. Anca GRAD

Reprezentări grafice ale funcţiilor si aplicaţii

A. Asimptote - breviar teoretic

Fie $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$ şi funcţia $f : D \to \mathbb{R}$.

Reamintim definiţia mulţimii punctelor de acumulare

$$D' = \left\{ x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} : \forall V \in \mathcal{V}(x_0), \quad V \cap D \backslash \{x_0\} \neq \emptyset \right\}.$$

O submulţime V a lui $\mathbb{R} \cup \{\pm\}$ este vecinătate a lui x_0 (deci $\in \mathcal{V}(x_0)$) dacă, atunci când:

- $x_0 \in \mathbb{R}$ $\quad \exists\, r > 0$ astfel încât $(x_0 - r, x_0 + r) \subseteq V$;
- $x_0 = \infty$ $\quad \exists r > 0$ astfel încât $(r, \infty] \subseteq V$;
- $x_0 = -\infty$ $\quad \exists r > 0$ astfel încât $[-\infty, -r) \subseteq V$;

Folosind aceste formulări echivalente prin intervale centrate (degenerate pentru $\pm\infty$), obţinem următoarele formulări echivalente pentru punctele de acumulare ale unei mulţimi. Astfel

$$\text{dacă } x_0 \in \mathbb{R}, \text{ atunci } x_0 \in D' \iff \quad \forall r > 0, \quad (x_0 - r, x_0 + r) \cap D \backslash \{x_0\} \neq \emptyset$$
$$\infty \in D' \iff \quad \forall r > 0, \quad (r, \infty] \cap D \neq \emptyset$$
$$-\infty \in D' \iff \quad \forall r > 0, \quad [-\infty, r) \cap D \neq \emptyset$$

Observaţie:

- Dacă D este nemărginită inferior, atunci $-\infty \in D'$.
- Dacă D este nemărginită superior, atunci $\infty \in D'$.
- Dacă $x_0 \in D$, dar **nu este punct izolat** atunci $x_0 \in D'$, deci $D \backslash IzoD \subset D'$.
- De cele mai multe ori, chiar şi pentru mulţimi mărginite, $D' \backslash D \neq \emptyset$.
- Fie $a < b \in \mathbb{R}$. Atunci
  - dacă $(a, b] \in D$, atunci $a \in D' \backslash D$;
  - dacă $[a, b) \in D$, atunci $b \in D' \backslash D$;
  - dacă $(a, b) \in D$, atunci $a, b \in D' \backslash D$.

Studiind limitele funcţiei f către ∞ şi respectiv $-\infty$ putem obţine în cazuri particulare, fie asimptote **orizontale**, fie **oblice** la graficul funcţiei f. Astfel, diferenţiem:

- **Asimptote orizontale**

– Dacă D este nemărginită inferior (deci $-\infty \in D'$), se verifică existenţa

$$a := \lim_{x\to-\infty} f(x).$$

Dacă $\exists a \in \mathbb{R}$, atunci dreapta de ecuaţie

$$y = a = \lim_{x\to-\infty} f(x)$$

este **asimptota orizontală către** $-\infty$ a funcţiei f.

– Dacă D este nemărginită superior (deci $\infty \in D'$), se verifică existenţa

$$b := \lim_{x\to\infty} f(x).$$

Dacă $\exists b \in \mathbb{R}$, atunci dreapta de ecuaţie

$$y = b = \lim_{x\to\infty} f(x)$$

este **asimptota orizontală** către ∞ a funcţiei f.

- **Asimptote oblice** (se verifică existenţa lor doar atunci când nu există cele orizontale)

  – Dacă D este nemărginită inferior şi $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) \notin \mathbb{R}$, analizăm

$$m := \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}.$$

Dacă $m \in \mathbb{R}$, verificăm dacă există în $\mathbb{R}$

$$n = \lim_{x\to-\infty} \left(f(x) - mx\right).$$

Atunci, dreapta de ecuaţie

$$y = mx + n$$

este **asimptota oblică către** $-\infty$ a funcţiei f.

  – Dacă D este nemărginită inferior şi $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) \notin \mathbb{R}$, analizăm

$$m' := \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}.$$

Dacă $m' \in \mathbb{R}$, verificăm dacă există în $\mathbb{R}$

$$n' = \lim_{x\to\infty} \left(f(x) - m'x\right).$$

Atunci, dreapta de ecuaţie

$$y = m'x + n'$$

este **asimptota oblică către** ∞ a funcţiei f.

- **Asimptote verticale** se caută analizând limitele laterale în puncte situate fie în mulţimea $\left(D' \setminus D\right) \cap \mathbb{R}$, fie în pucte din D, dar în care funţia are o schimbare de formulă (de exemplu la interseţia a două ramuri). În fapt, aceste puncte sunt de obicei(dar nu numai) capetele reale ale intervalelor deschise incluse în D. Pentru fiecare astfel de punct x_0 se analizează limitele laterale ale lui f.

- Dacă
$$\exists \quad f(x_0-0)=\lim_{x\uparrow x_0} f(x_0)\in\{\pm\infty\}.$$
atunci dreapta de ecuaţie
$$x=x_0$$
este **asimptotă verticală la stânga** la graficul funcţiei f.
- Dacă
$$\exists \quad f(x_0+0)=\lim_{x\downarrow x_0} f(x_0)\in\{\pm\infty\}.$$
atunci dreapta de ecuaţie
$$x=x_0$$
este **asimptotă verticală la dreapta** la graficul funcţiei f.
- Dacă
$$\exists \quad f(x_0-0)=f(x_0+0)\in\{\pm\infty\}.$$
atunci dreapta de ecuaţie
$$x=x_0$$
este **asimptotă verticală** la graficul funcţiei f.

B. Algoritm de abordare al graficului unei funcţii

I. Analiza lui D şi a lui D'

1. Determinarea mulţimii de definiţie.
2. Studiul **parităţii** (simetrie faţă de axa Oy), **imparităţii** (simetria faţă de origine) şi al **periodicităţii**.
3. Intersecţia cu axele de coordonate.
4. Determinarea mulţimii de acumulare şi studierea asimptotelor.
5. Mulţimea de continuitate $C\subseteq D$.

II. Analiza cu ajutorul derivatei de ordinul 1

1. Determinarea mulţimii de derivabilitate $D_1\subset D$.
2. Calcularea valorilor funcţiei derivate f'.
3. Studierea pentru ficare punct $x_0\in C\backslash D_1$ a derivatelor laterale la stânga şi la dreapta şi detereminarea
   - **punctelor unghiulare**, atunci când există ambele derivate laterale, şi cel puţin una e finită.
   - **punctelor de întoarcere**, atunci când există amândoua derivatele laterale, sunt infinite şi diferite.
4. Determinarea soluţiilor reale ale ecuaţiei $f'(x)=0$.

5. Studierea monotoniei şi a punctelor de extrem ale f prin analizarea tabelului de variaţie funcţiei.

III. Analiza cu ajutorul derivatei de ordinul al II-lea

1. Determinarea mulţimii de derivabilitate pentru derivate de ordinul 2, $D_2 \subset D_1$.
2. Calcularea valorilor funcţiei derivate de ordinul 2, f''.
3. Determinarea soluţiilor reale ale ecuaţiei $f''(x) = 0$.
4. Stabilirea
   - **intervalelor de convexitate**, când $f''(x) \geq 0$;
   - **intervalelor de concavitate**, când $f''(x) \leq 0$;
   - **punctelor de inflexiune** în care derivata de oridinul 2 are o schimbare de semn.

C. Tabelul de variaţie

Tabelul se structurează pe patru linii:

Linia 1 cuprinde **valorile remarcabile ale lui** x : mulţimea de definiţie D, evidenţierea punctelor din $D \backslash D'$, intersecţia cu axele de coordonate, soluţiile reale ale ecuaţilor $f(x) = 0$, $f'(x) = 0$ şi $f''(x) = 0$, etc.

Linia 2 este dedicată **valorilor remarcabile ale lui** f', şi semnului acestei derivate.

Linia 3 este dedicată **valorilor remarcabile ale lui** f'', şi semnului acestei derivate de ordin 2.

Linia 4 este dedicată **valorilor remarcabile ale lui** f, şi monotoniei acesteia.

Fie $\phi \neq D \subseteq \mathbb{R}$ și $f: D \to \mathbb{R}$ o funcție.
$G_f = \{(x, f(x)) : x \in D\} \subseteq \mathbb{R}^2 \to$ graficul funcției f

Avem în vedere următoarele:

- INTERSECȚIA G_f cu axele de coordonate
  - $x = 0 \Rightarrow f(0)$
  - $y = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$

- ASIMPTOTE
  - ORIZONTALE (doar dacă $-\infty$ sau $\infty \in D'$) $\to$ mulțimea punctelor de acumulare ale domeniului

    $\Leftrightarrow$ D conține intervale $(-\infty, c)$ $(-\infty \in D')$
    (c, ∞) $(\infty \in D')$

    către $-\infty$ și $+\infty$

    - către $-\infty$

      $\boxed{\lim_{x \to -\infty} f(x)}$
      - $\to \exists = a \in \mathbb{R}$ atunci $\boxed{y = a}$ este asimptota orizontală către $-\infty$ a lui G_f
      - $\not\exists \Rightarrow \not\exists$ asimptotă orizontală către $-\infty$ a G_f
      - $\exists = \pm\infty \in \mathbb{R} \xrightarrow{\text{AS. OBLICE}}$? $\boxed{\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}}$
        - $\to \exists = m \in \mathbb{R}$, apoi $\lim_{x \to -\infty} f(x) - mx$
          - $\to \exists = n \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow y = mx + n$ este asimptotă oblică către $-\infty$
          - $\not\exists\, n \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow \not\exists$ asimptotă oblică spre $-\infty$
        - $\not\exists$ sau $\exists \notin \mathbb{R}$ $\Rightarrow \not\exists$ as. oblică spre $-\infty$

    - $\boxed{\lim_{x \to \infty} f(x)}$ - similar pentru asimptote spre $+\infty$

  - AS. VERTICALE (în puncte $D' \cap \mathbb{R}$) care nu sunt puncte în care funcția este continuă

    $a \in (D' \setminus C) \cap \mathbb{R}$

    - $\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) \to \exists = \pm\infty \Rightarrow x = a$ as. verticală la stg
    - $\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) \to \exists = \pm\infty \Rightarrow x = a$ as. verticală la dr

- paritate:
  - funcții pare $\to$ simetrice față de axa Oy $(f(-x) = f(x))$
  - funcții impare $\to$ — ‖ — de origine $(f(-x) = -f(x))$

II f'? $D_1 \to$ dom. de derivabilitate

$\boxed{f'(x) = 0} \to$ puncte critice

- monotonia

- PUNCTE UNGHIULARE $\to \exists$ ambele derivate laterale și cel puțin una este finită
- DE ÎNTOARCERE $\to \exists f'_s, f'_d$ dar sunt ∞ și $\neq$

III f'' D_2

$\boxed{f''(x)=0}$ $\quad f''(x)>0$ cv.

$f''(x)<0$ concavă

în $a\in D_2$ - are loc o schimbare de semn $\Rightarrow a$ este un punct de inflexiune

- nu — — " — — " — $\quad a$ s.n punct de ondulare

Considerați funcția $f(x)=\cos x-|x|$

I ~~A~~ Dom. de def = dom. de continuitate = dom. de derivabilitate

~~B~~ $f(x)=0$ are o ∞ de soluții reale

~~C~~ $y=1$ asimptotă orizontală la G_f

D ✓ G_f are o infinitate de puncte de inflexiune

II A ✓ G_f este simetric față de axa Oy

~~B~~ f are o infinitate de puncte unghiulare

~~C~~ $y=x+1$ este asimptotă oblică la G_f

D $f(x)=-4$ are exact două soluții reale

III A ✓ G_f are o infinitate de tg. paralele cu axa Ox

B ✓ f nu este derivabilă în 0

C ✓ f este pară

~~D~~ f are o infinitate de puncte de optim local

$$f(x)=\cos x-|x|=\begin{cases}\cos x-x\ ; & x\ge 0\\ \cos x-(-x) : & x<0\end{cases}=\begin{cases}\cos x-x : & x\ge 0\\ \cos x+x : & x<0\end{cases}$$

I ~~A~~ $D=\mathbb{R}$

$C=\mathbb{R}$

• c pe $(-\infty,0)$, $(0,\infty)$ ca și comp. de f. continue

• $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=1-0=1=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=f(0)\Rightarrow f$ c. în 0

D_1 - dom. de deriv. $=\mathbb{R}\setminus\{0\}$ $\quad f'(x)=\begin{cases}-\sin x-1 : & x>0\\ -\sin x+1 : & x\le 0\end{cases}$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{\cos x-x-1}{x}=\underbrace{\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{\cos x-1}{x}}\ \boxed{-1}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{\underset{L'H}{=}}\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{-\sin x}{x}=-1$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=1$$

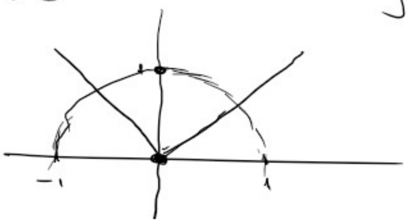
$\Bigg\}\ \nexists \Rightarrow 0\notin D_1$

~~B~~ $f(x)=0$? $\quad \cos x=|x|$

$$\left.\begin{array}{l}\cos x\in[-1,1]\\ \cos x=|x|\ge 0\end{array}\right\}\Rightarrow \cos x\in[0,1]\Rightarrow x\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right]\cup\left[0,\frac{\pi}{2}\right]=\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$$

$0\le|x|\le 1 \Leftrightarrow x\in[-1,1]$

$\Rightarrow x\in[-1,1]$

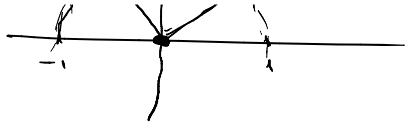


$\Rightarrow f(x)=0$ are exact două soluții reale

$x_1\in(-1,0)$ și $x_2(0,1)$

$\Rightarrow f(x)=0$ are exact două soluții reale

$x_1 \in (-1,0)$ și $x_2 (0,1)$



c) $y=1$ as. orizontală

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \cos x + x = \boxed{-\infty}$

$-1 \le \cos x \le 1$

$\cos x + x < x+1$

$\lim_{x\to-\infty} x+1 = -\infty$

$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\cos x + x}{x} = $

$= 1 + \lim_{x\to-\infty} \frac{\cos x}{x} =$

$\boxed{= 1+0}$

$\Rightarrow \boxed{m=1}$

$\frac{\cos x}{x}$

$-1 \le \cos x \le 1 \quad \Big| \cdot \frac{1}{x} \quad (x \to -\infty)$

$x<0$

$-\frac{1}{x} \ge \frac{\cos x}{x} \ge \frac{1}{x}$

0

$\lim_{x\to-\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to-\infty} \cos x + x - x =$

$= \lim_{x\to-\infty} \cos x \ \nexists$

$\Rightarrow \nexists$ AS. OBLICE către $-\infty$

analog către $+\infty$

!!! $\lim_{x\to-\infty} \cos x \ \nexists$

t. lui Heine

$\lim_{x\to a} f(x) = l \iff \forall (a_n) \subseteq D\setminus\{a\}$ cu $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ avem $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = l$

pt. a dem $\nexists \lim_{x\to a} f(x)$ evidențiem două șiruri

$(a_n) \subseteq D$ a.i. $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$

$(b_n) \subseteq D$

dar $\lim_{n\to\infty} f(a_n) \neq \lim_{n\to\infty} f(b_n)$

$(a_n), (b_n) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow -\infty$

$(n \to -\infty)$

$a_n = -2n\pi \longrightarrow -\infty \qquad f(a_n) = \cos(-2n\pi) = 1$

$b_n = -2n\pi + \frac{\pi}{2} \longrightarrow -\infty \qquad f(b_n) = \cos(-2n\pi + \frac{\pi}{2}) = 0$

$\neq 0 \Rightarrow \nexists \lim_{x\to a} \frac{\cos x}{x}$

Studiul parității

$f(x) = \cos x - |x| \qquad f(-x) = \cos(-x) - |-x| = \cos x - |x| = f(x)$

$\Rightarrow f$ este pară $\Rightarrow$ simetrică față $\Rightarrow$ simetrică G_f de Oy

$D_1 = \mathbb{R}\setminus\{0\} \qquad f'(x) = \begin{cases} -\sin x - 1 & : x > 0 \\ -\sin x + 1 & : x < 0 \end{cases}$

Puncte unghiulare

$(\Delta \setminus C) \cap \mathbb{R}$

↳ punctele în care f' nu e continuă

$\boxed{x=0}$

$\lim_{\substack{x\to0 \\ x<0}} f'(x) = \lim_{\substack{x\to0 \\ x<0}} -\sin x - 1 = -1$

$\ldots = \lim -\sin x + 1 = 1$

$\neq$ 0 → punct unghiular

$(0, f(0)) = (0,1)$

$\boxed{x=0}$ $\qquad \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \ldots \qquad \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \ldots$ $\qquad \nexists\, f'(0) \rightarrow$ punct unghiular

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f'(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} -\sin x + 1 = 1 \qquad (0, f(0)) = (0,1)$$

$$f'(x)=0 \iff \begin{cases} -\sin x - 1 = 0 & , x>0 \\ -\sin x + 1 = 0 & , x<0 \end{cases} \iff \begin{cases} \sin x = -1 & , x>0 \\ \sin x = 1 & , x<0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = \frac{3\pi}{2} - 2k\pi & , k \geq 1 \\ x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi & , k \geq 1 \end{cases} \Rightarrow f'(x)=0 \iff x \in M = \left\{ \frac{3\pi}{2} - 2k\pi \text{ sau } \frac{\pi}{2}+2k\pi, k \geq 1 \right\}$$

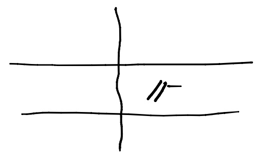
$\exists$ o ∞ de puncte critice

Fie $(a, f(a)) \in G_f$ tg. la G_f în acest punct are ecuația

$$y - f(a) = \underbrace{f'(a)}(x-a)$$

dacă $f'(a)=0 \Rightarrow y = f(a)$ este ec. tg. la G_f.

$\parallel$ cu axa Ox



Pt. că $f'(x)=0$ are o ∞ de soluții

$\Rightarrow \exists$ o ∞ de tg la G_f $\parallel$ cu axa Ox

$D_2 = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\qquad f''(x) = \begin{cases} -\cos x & ; x>0 \\ -\cos x & ; x<0 \end{cases} = \boxed{-\cos x}$

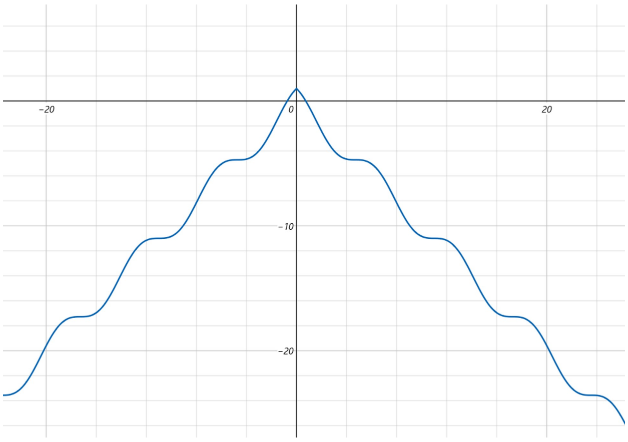
punctele de inflexiune $\qquad f''(x)=0$ + schimbare de monotonie

$$f''(x)=0 \iff -\cos x = 0 \iff \cos x = 0 \iff$$

$$x = k\pi + \frac{\pi}{2}$$

x	$-\frac{7\pi}{2}$	$-\frac{5\pi}{2}$	$-\frac{3\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{2}$
$f'(x)$					|				
$f''(x)$	0 +	0 −	0 +	0 −	| −	0 +	0 −	0 +	0

$\Rightarrow \exists$ o ∞ de puncte de inflexiune ale pb. noastre



∃ două reale

-4 $f(x) - 4$

! $f(x) = 4$ ∄ soluții reale