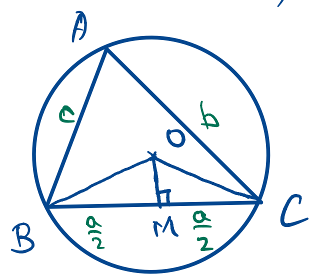
Trigonometrie

Teorema Sinusului. Fie ABC un triunghi oarecare. Atunci are loc egalitatea

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R,$$

unde R este raza cercului circumscris tringhiului ABC.

Dem: Presupunem că ΔABC este ascuțitunghic (în caz contrar, demonstrația se face în mod analog.)



$$\sphericalangle BOC = 2 \cdot \sphericalangle A$$

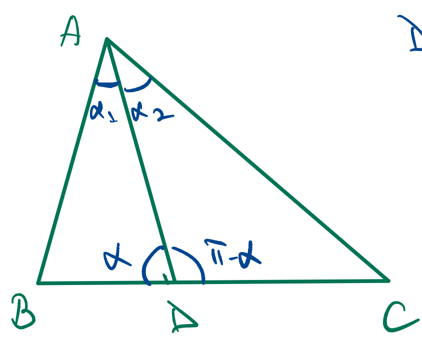
Deci, $\sphericalangle BOM = \sphericalangle A$. Din ΔBOM

$$\sin \sphericalangle A = \frac{BM}{OB} = \frac{\frac{a}{2}}{R}.$$

Rearanjând, $\boxed{\dfrac{a}{\sin \sphericalangle A} = 2R.}$

Aplicaţie. În triunghiul ABC, fie $D \in BC$ şi notăm cu α_1, α_2 măsurile unghiurilor $\angle BAD$ şi respectiv $\angle DAC$. Atunci

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB \cdot \sin \alpha_1}{AC \cdot \sin \alpha_2}.$$



Din T. sinusului în ΔABD:

$$\frac{BD}{\sin \alpha_1} = \frac{AB}{\sin \alpha} \quad (1)$$

- - - - - - - - - în ΔADC

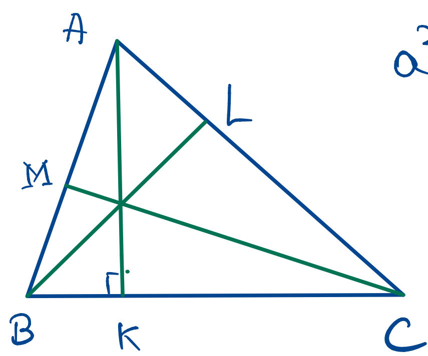
$$\frac{DC}{\sin \alpha_2} = \frac{AC}{\sin(\pi - \alpha)} = \frac{AC}{\sin \alpha} \quad (2)$$

Împărțind (1) și (2) rezultă concluzia.

Continuare...

Teorema Cosinusului. Fie ABC un triunghi oarecare. Atunci

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\angle A.$$



$$\begin{aligned} a^2 &= a\cdot(BK + KC) \\ &= a\cdot(c\cdot\cos\measuredangle B + b\cdot\cos\measuredangle C) \\ &= c\cdot(a\cdot\cos\measuredangle B) + b\cdot(a\cdot\cos\measuredangle C) \\ &= c\cdot BM + b\cdot CL \\ &= c\cdot(c - AM) + b\cdot(b - AL) \\ &= c\cdot(c - b\cdot\cos\measuredangle A) + b(b - c\cdot\cos\measuredangle A) \\ &= b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos\measuredangle A. \end{aligned}$$

În figură am presupus că ΔABC este ascuţitunghic, însă cazurile complementare se demonstrează în mod analog.

1. Determinaţi mulţimea soluţiilor ecuaţiei $\sin x + \cos^3 x = \cos x + \sin^3 x$.

$$\sin x - \cos x = \sin^3 x - \cos^3 x$$
$$= (\sin x - \cos x)(\sin^2 x + \sin x \cdot \cos x + \cos^2 x)$$

$$\Leftrightarrow (\sin x - \cos x)(1 + \sin x \cdot \cos x - 1) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\sin x \cdot \cos x \cdot (\sin x - \cos x) = 0$$

Mulţimea soluţiilor ecuaţiei este:

$$\{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

2. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^*$ definită prin $f(x) = \cos x + i \cdot \sin x$. Să se indice care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate:

A f este un morfism de grupuri între grupurile $(\mathbb{R}, +)$ şi $(\mathbb{C}^*, \cdot)$.
B f este injectivă.
C f este surjectivă.
D f este un izomorfism de grupuri între grupurile $(\mathbb{R}, +)$ şi $(\mathbb{C}^*, \cdot)$.

$f(0) = f(2\pi) = 1 \Rightarrow$ B este fals.

$\mathrm{Im}(f) = f(\mathbb{R}) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} \Rightarrow$ C este fals;

Din B (sau C) $\Rightarrow$ D este falsă.

$\forall x, y \in \mathbb{R}$: $f(x+y) \stackrel{?}{=} f(x) \cdot f(y) \Leftrightarrow$

$\cos(x+y) + i \sin(x+y) = [\cos x + i \sin x][\cos y + i \sin y]$.

f este morfism, deci A este adevărată

3. Dacă $\sin\alpha+\sin\beta = a$ şi $\cos\alpha+\cos\beta = b$, atunci aflaţi $\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$, $\cos(\alpha-\beta)$ şi $\cos(\alpha+\beta)$ în funcţie de a şi b.

$$\begin{cases} a^2 = \sin^2\alpha + \sin^2\beta + 2\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta \\ b^2 = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + 2\cos\alpha\cdot\cos\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} a^2+b^2 = 2 + 2\cdot\cos(\alpha-\beta) \quad (1) \\ b^2-a^2 = \cos 2\alpha + \cos 2\beta + 2\cos(\alpha+\beta) \quad (2) \end{array}$$

Din (1) rezultă: $\cos(\alpha-\beta) = \frac{a^2+b^2}{2} - 1$. (3)

Cum $\cos(\alpha-\beta) = 2\cos^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) - 1 \Rightarrow \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{a^2+b^2}{4}}$.

Relația (2) se rescrie $b^2-a^2 = 2\cdot\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta) + 2\cdot\cos(\alpha+\beta)$

Înlocuind (3) obținem:

$$b^2-a^2 = \cos(\alpha+\beta)\left[\overbrace{2\cos(\alpha-\beta)+2}^{a^2+b^2}\right]$$

$$\Rightarrow \cos(\alpha+\beta) = \frac{b^2-a^2}{a^2+b^2}.$$

4. Să se simplifice expresia

$$\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}\cdot\frac{\cos x}{1+\cos x}\cdot\frac{\cos\frac{x}{2}}{1+\cos\frac{x}{2}}.$$

5. Demonstraţi că pentru $x \in (0, \pi/2)$ are loc relaţia

$$\sqrt{2+2\cos\ x} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+2\cos\ x}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos\ x}}} = \frac{\sin\ x}{\sin\frac{x}{8}}.$$

6. Numerele reale a şi b satisfac egalitatea $(\cos a + \cos b)^2 + (\sin a + \sin b)^2 = 2\cos^2\frac{a-b}{2}$. Să se determine mulţimea soluţiilor pentru $a - b$.

7. Rezolvaţi ecuaţia $4^{\sin 2x} + 4^{3-\sin 2x} = 65$, unde $x \in \mathbb{R}$.

Notăm $t := 4^{\sin 2x} \in \left[\frac{1}{4}, 4\right]$. $(*)$

Ecuația se rescrie:

$$t + \frac{64}{t} = 65 \Leftrightarrow t^2 - 65t + 64 = 0$$
$$\Leftrightarrow (t-1)(t+64) = 0$$

Din $(*) \Rightarrow 4^{\sin 2x} = t = 1$.

Cum $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 4^x$ este injectivă rezultă

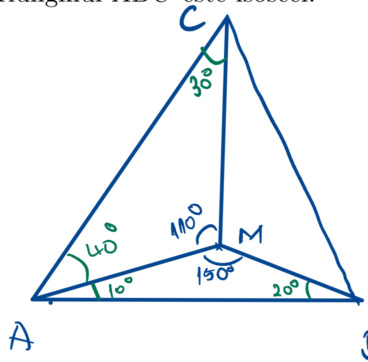
$\sin 2x = 0 \Leftrightarrow 2x \in \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \Leftrightarrow x \in \{k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

$\boxtimes$

8. Demonstraţi că dacă $\alpha + \beta - \gamma = \pi$, atunci

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta - \sin^2\gamma = 2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma.$$

(USAMO 1996) 9. Fie ABC un triunghi şi M un punct în interiorul său astfel încât $\angle MAB = 10°$, $\angle MBA = 20°$, $\angle MAC = 40°$ şi $\angle MCA = 30°$. Demonstraţi că triunghiul ABC este isoscel.



$\measuredangle AMB = 150°$
$\measuredangle AMC = 110°$.
$\measuredangle CMB = 100°$

Fără a restrânge generalitatea, pres. că $AB = 1$.

Din T. sinusului în ΔAMB şi ΔAMC

$$AM = AB \cdot \frac{\sin 20°}{\sin 150°} = 2 \cdot \sin 20°.$$

$$AC = AM \cdot \frac{\sin 110°}{\sin 30°} = 2 \cdot \sin 40°$$

Din T. cosinusului în ΔABC obţinem:

$$BC^2 = 1^2 + (2\sin 40°)^2 - 2 \cdot 1 \cdot 2\sin 40° \cdot \underbrace{\cos 50°}_{\cos \measuredangle BAC} \;=\sin 40°$$

$$= 1^2 + 4\sin^2 40 - 4 \cdot \sin^2 40$$

$$= 1.$$

Deci $AB = BC$ şi ΔABC este isoscel.

10. Rezolvaţi ecuaţia

$$\sin(x + 30^\circ) + \cos(x + 60^\circ) = 1 + \cos 2x.$$

11. Să se determine soluţiile ecuaţiei

$$\cos 4x \cos 8x - \cos 5x \cos 9x = 0$$

situate în intervalul $(0, 2)$.

12. Rezolvaţi şi discutaţi rădăcinile ecuaţiei

$$(2m-1)\cos 2x - 9\cos x + m - 5 = 0$$

după valorile parametrului real m.