

**Ceremonia decernării titlului de
PROFESOR HONORIS CAUSA
al Universității Babeș-Bolyai Cluj-Napoca
Domnului Prof. Dr. GHEORGHE MOROȘANU
de la Central European University, Budapesta**

Discursul de acceptare

Stimate Doamnelor Președinte al Senatului Universitar,
Distinși Membri ai Comunității Academice,
Distinși Colegi,
Dragi Studenți,
Doamnelor și Domnilor,

Disertația Domnului Profesor Gheorghe Moroșanu susținută cu ocazia decernării titlului de Profesor Honoris Causa al Universității Babeș-Bolyai Cluj-Napoca:

AVEM NEVOIE DE MATEMATICĂ?

Menționez de la bun început că ceea ce voi spune se adresează publicului larg, evitând informații și formulări excesiv de riguroase.

Matematica, în formele ei elementare, s-a născut probabil chiar înainte de apariția scrierii și a coexistat cu societatea umană încă de la începuturi. Era necesară la măsurarea suprafețelor cultivate, la gestionarea bunurilor, în activitățile comerciale etc. Ne putem închipui că, atunci când au apărut mulțimi tot mai mari de bunuri materiale, au apărut imediat și *sistemele de numerație*.

Se consideră că începuturile matematicii mai avansate sunt în Egiptul antic (dupa cum afirma Aristotel (384–322, î. Hr.), elev al lui Platon (428/427 sau 424/423–348/347, î. Hr.), profesor al lui Alexandru Macedon (356–323, î. Hr.)).

De la egipteni moștenim în particular *sistemul de numerație zecimal*, astăzi valabil în toată lumea (au existat și alte sisteme de numerație; de exemplu, sumerienii foloseau sistemul de numerație cu baza 60).

Egiptenii au inventat (în mileniul 4, î. Hr.) cel mai bun calendar din antichitate, care a fost apoi folosit în timpul lui Iulius Cesar (Gaius Iulius Caesar, aprox. 100–44, î. Hr.) la crearea calendarului iulian.

Pentru construcții (inclusiv a piramidelor) și pentru măsurarea pamântului egiptenii foloseau lungimile de 3, 4 și 5 unități pentru construirea unghiului drept (în limbajul actual, putem spune că era vorba despre folosirea reciprocei teoremei lui Pitagora (Samos, 570-495, î. Hr.)).

Desigur, se poate vorbi despre multe cunoștințe de matematică elementară și astronomie, acumulate de-a lungul antichității, nu numai în Egipt, ci și în Mesopotamia, India, China, Grecia antică.

Oricum, la începuturile ei, matematica (se pare că primul care a folosit termenul *matematica* a fost Pitagora, însemnând *ceea ce se învață*) s-a dezvoltat ca o **necesitate a societății umane**. Folosirea matematicii, în forme mai mult sau mai puțin avansate, pentru rezolvarea unor probleme practice, a continuat mereu și va continua și în viitor. Este vorba despre ceea ce numim azi **matematici aplicate**.

Însă omul nu se mulțumește să-și asigure doar existența. În perioade de liniște și prosperitate, oamenii au simțit nevoia de spiritualitate, în particular de filosofie și artă. Matematica, în forme din ce în ce mai avansate, a mers împreună cu filosofia, care în antichitate îngloba toate științele. De exemplu, Pitagora spunea ca *totul este număr* și că universul este discret; a întemeiat o școală, încercând să explice știința, filosofia și chiar religia prin intermediul numerelor. În particular, a descoperit teorema referitoare la triunghiuri dreptunghice care îi poartă numele. Se spune că, pentru a sărbători această descoperire, a jertfit un taur.

Cei care se ocupau cu matematica au început să întâlnească probleme dificile. De exemplu, au observat că diagonala unui pătrat și latura sa sunt segmente incomensurabile; astfel, lungimea diagonalei unui pătrat cu latura unitate nu poate fi exprimată cu un număr rațional (o fracție de numere întregi); astăzi știm că e vorba de rădăcina pătrată a lui 2 (sau radical din 2),

notat $\sqrt{2}$, un număr care nu este rațional și e numit *irrațional*. În mod similar, lungimea cercului cu diametrul unitate este un număr irrațional, cunoscut acum ca fiind numărul π .

Faptul că numerele raționale nu pot exprima întotdeauna mărimi din lumea reală a creat o mare problemă. Se simțea nevoia extinderii mulțimii numerelor raționale la o mulțime de numere mai amplă care să poată fi folosită în orice fel de problemă practică. Astăzi se cunoaște că o asemenea mulțime este *mulțimea numerelor reale*, notată de regulă cu \mathbb{R} . În același timp, era și o problemă teoretică, care se încadrează în ceea ce numim azi **matematică pură**. Construcția riguroasă (axiomatică) a numerelor reale (ca un corp ordonat complet) a venit foarte târziu, abia în secolul al XIX-lea. Există mai multe modele pentru \mathbb{R} , de exemplu, modelele create de Cantor–Méray, Dedekind, Stolz–Weierstrass (Georg Cantor, 1845-1918, german; Charles Méray, 1835-1911, francez; Otto Stolz, 1842-1905, austriac; Karl Weierstrass, 1815-1897, german; Richard Dedekind, 1831-1916, german), toate echivalente între ele. În particular, modelul lui Cantor–Méray se bazează pe șiruri Cauchy de numere raționale (Augustin Louis Cauchy, 1789–1857, francez). Pe scurt, *limitele* tuturor acestor șiruri compun mulțimea \mathbb{R} . Orice număr rațional r se obține ca limita șirului constant (r, r, \dots) . Dacă se consideră, de exemplu, șirul definit prin

$$x_1 = 2, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right), \quad n = 1, 2, \dots,$$

acesta este un șir de numere raționale convergent (deci Cauchy), limita sa fiind soluția pozitivă a ecuației $x^2 = 2$, adică $\sqrt{2}$. De fapt, există mai multe șiruri Cauchy cu aceeași limită, astfel încât, în modelul lui Cantor–Méray, un element se identifică cu clasa tuturor șirurilor *echivalente* în sens Cauchy. Nu intrăm în amănunte.

Pentru înțelegerea modelului avem nevoie de conceptul de *infiniț*, care este esențial în *analiza matematică*. În prezent, conceptul de infinit este acceptat și folosit în mod uzual. Însă, începând din antichitate până târziu, în secolul XIX, au existat dispute aprinse asupra acestui concept. Unul dintre paradoxurile lui Zenon (enunțat cam pe la anul 450, î. Hr.) spunea așa: ca să ajungi dintr-un punct A în alt punct, B (distanța dintre cele două puncte fiind cunoscută, să zicem d unități de lungime), trebuie să parcurgi întâi jumătate din distanță, adică $d/2$, apoi jumătate din distanța rămasă, adică $d/4$, apoi $d/8$ ș. a. m. d. Conform acestui raționament, în concepția lui Zenon, nu vei putea ajunge niciodată în punctul B, pentru că mereu rămâne o distanță

care trebuie parcursă. Fiind un număr nelimitat de distanțe de parcurs se credea atunci ca *suma* timpilor necesari parcurgerii acestor distanțe se tot mărește, deci punctul B nu poate fi niciodată atins. De fapt, în limbajul de astăzi, considerând că viteza de deplasare este egală cu unitatea (ceea ce nu retrânge generalitatea), avem de fapt o serie (geometrică) convergentă,

$$d/2 + d/4 + d/8 + \dots = d,$$

deci punctul B se poate atinge în timp finit (adică, distanța d poate fi acoperită). Remarcăm că, în această explicație, se folosește esențial conceptul de infinit, mai exact avem o sumă infinită (serie).

Un paradox similar, formulat tot de Zenon, spune că Ahile nu poate ajunge niciodată o broască țestoasă, deși evident Ahile merge mai repede. Anume, să zicem că inițial Ahile se află în punctul A, iar broasca în punctul B; Ahile parcurge distanța AB, timp în care broasca parcurge o distanță mai mică, BC; apoi, Ahile parcurge distanța BC, timp în care broasca parcurge o distanță mai mică, CD ș. a. m. d. Zenon concluzionează că Ahile nu ajunge broasca niciodată, deoarece pentru el rămâne mereu o distanță de parcurs pentru a ajunge la broască. Se rezolvă și acest paradox ușor folosind noțiunea de infinit (de fapt, noțiunea de serie). Așadar, paradoxurile discutate nu sunt cu adevărat paradoxuri.

În general, prin **matematică pură** se înțelege acea parte a matematicii care nu are legătură directă cu experiența practică a omului. Ca și filosofia, are existența ei proprie și se dezvoltă independent de societate, cel puțin în prima instanță. Adevărurile matematice sunt acolo, așteaptă să fie descoperite, rând pe rând.

În particular, este cunoscută istoria postulatului al V-lea al lui Euclid (Sec. 4-3, î. Hr., grec), al paralelelor, despre care s-a crezut multă vreme că este o teoremă care ar rezulta din celelate postulate/axiome ale lui Euclid. Abia în prima jumătate a secolului XIX, Janos Bolyai (n. la Cluj, 1802-1860, maghiar) și Nikolai Lobacevski (1792-1856, rus) au arătat, în mod independent și aproape în același timp, că este vorba de o axiomă. Prin negarea acestei axiome se obțin geometrii diferite de cea clasică (euclidiană), numite geometrii ne-euclidiene. Evident, crearea geometriilor ne-euclidiene ține de matematica pură. La bază a stat efortul de a clarifica dacă postulatul paralelelor este teoremă sau axiomă. Totuși, chiar Lobacevski spunea că *nu există nici un domeniu al matematicii, oricât de abstract, care să nu se aplice cândva la fenomene din lumea reală*. În particular, geometria hiper-

bolică (neeuclidiană) a fost folosită mai târziu (în 1916) de Einstein (Albert Einstein, 1879-1955) la formularea teoriei generalizate a relativității.

De fapt, se poate spune că unele părți ale matematicii sunt mai aproape de aplicații decât altele și că nu există o frontieră precisă între matematica pură și cea aplicată. Uneori aplicațiile conduc la rezultate teoretice semnificative, altele teorii matematice își găsesc ulterior aplicații importante.

În matematică se întâlnește deseori noțiunea de *spațiu liniar (vectorial)*. Un exemplu simplu este mulțimea vectorilor liberi din spațiul fizic. Această mulțime, notată de exemplu cu V_3 , formează un spațiu liniar (în raport cu operațiile uzuale: adunarea vectorilor și înmulțirea cu scalari). Orice vector \mathbf{v} poate fi caracterizat de un triplet ordonat $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, numerele x, y, z fiind coordonatele lui \mathbf{v} în raport cu un sistem cartezian dat (după numele lui René Descartes, latinizat Cartesius (1596–1650), matematician și filosof francez). Se spune că Descartes a inventat sistemul de coordonate (care îi poartă numele) când stătea în pat (fiind bolnav), încercând să găsească o modalitate de a caracteriza poziția unei muște care zbura prin cameră. Așa s-a ajuns la crearea geometriei analitice. Astfel, spațiul V_3 poate fi identificat cu \mathbb{R}^3 . Orice vector (triplet ordonat) $\mathbf{v} \equiv (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ se poate exprima ca o combinație liniară de vectorii $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$, $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$: $\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Se spune că $B = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ este o bază în $V_3 \equiv \mathbb{R}^3$ și dimensiunea acestui spațiu este 3. Astfel, dimensiunea definită în acest fel coincide cu imaginea intuitivă a tri-dimensionalității spațiului fizic. Când vorbim însă de dimensiuni mai mari, deja apare o rezistență din partea publicului larg, deoarece în acest caz nu ne mai putem baza pe ceea ce se poate vizualiza prin desen. Totuși nu este dificil de înțeles. Iată, să considerăm acum mulțimea polinoamelor cu coeficienți numere reale, de grad cel mult 9, să zicem. Orice asemenea polinom poate fi identificat cu un vector cu zece componente, coeficienții polinomului. Deci acest spațiu se poate identifica cu \mathbb{R}^{10} și are dimensiunea 10, o bază fiind $\{(1, 0, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 0, 1)\} \subset \mathbb{R}^{10}$.

În general, se pot imagina diverse spații vectoriale cu dimensiunea n , adică spații finit-dimensionale. Mai mult, se pot defini chiar spații infinit dimensionale. De exemplu, mulțimea tuturor polinoamelor (de orice grad) cu coeficienți reali este un asemenea spațiu: orice asemenea polinom se poate identifica cu un șir de numere reale $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, 0, 0, \dots)$ și o bază în acest spațiu este $\{(1, 0, 0, \dots), (0, 1, 0, 0, \dots), (0, 0, 1, 0, 0, \dots), \dots\}$. Fără să intrăm în detalii, menționăm că tot spații infinit dimensionale sunt spațiile Lebesgue

și spațiile Sobolev, care sunt foarte utile în rezolvarea problemelor legate de ecuații cu derivate parțiale (de exemplu, ecuația căldurii, ecuația undelor, sistemul Navier-Stokes etc.).

Pentru exemplificare, ecuațiile Navier-Stokes modelează multe fenomene din mecanica fluidelor, cum ar fi: mișcarea curenților atmosferici, curgerea aerului în jurul unei aripi de avion, curgerea sângelui prin vene etc. În particular, ecuațiile Navier-Stokes se folosesc la proiectarea avioanelor. Atunci când călătorim cu un transatlantic, apreciem performanțele piloților, ceea ce este natural. Dar trebuie să fim conștienți că principalii autori sunt fizicienii, inginerii și matematicienii care au contribuit la realizarea acestor aparate de zbor excepționale. Acesta este doar un exemplu de felul cum știința, în particular matematica, vine în sprijinul societății umane.

De menționat că studiul problemelor Navier-Stokes (formulate în secolul XIX) nu este complet, în sensul că existența și unicitatea soluțiilor nu este cunoscută în cazul general. Demonstrarea acestor fapte ar aduce certitudine și înțelegere completă a fenomenelor respective. Datorită importanței deosebite, această problemă a fost inclusă pe o listă de șapte probleme deschise ale mileniului nostru (*Millenium Prize Problems*), propuse de Clay Mathematics Institute. Premiile (în valoare de câte un milion dolari pentru fiecare din cele 7 probleme) au fost anunțate la o întâlnire din 2000 de la College de France (Paris).

Menționăm că una din cele 7 probleme a fost deja rezolvată în 2002 de Grigori Perelman (Sankt Petersburg, n. 1966), care refuză premiul de 1 milion de dolari (în trecut fie spus, Perelman refuză - în 2006 - și medalia Fields, premiu pentru matematică, considerat echivalent cu Premiul Nobel, care nu se oferă pentru matematică). Este vorba de conjectura lui Poincaré (Henri Poincaré, 1854-1912, matematician francez) formulată în 1904, care spune că: orice varietate tridimensională închisă și simplu conexă este homeomorfă (adică, echivalentă topologic) cu sfera tridimensională. Celelalte 6 probleme nu sunt încă rezolvate.

Mai sunt și alte probleme deschise celebre, care nu sunt incluse în lista celor 7 probleme ale mileniului, spre exemplu, conjectura lui Goldbach (propusă de germanul Christian Goldbach în 1742 și înlocuită de Euler (Leonhard Euler, 1707-1783, matematician elvețian) cu o variantă mai tare: orice număr par > 2 se poate scrie ca suma a două numere prime. În ciuda simplității enunțului, ea nu a fost încă rezolvată.

O altă problemă celebră, care a fost însă rezolvată, este Marea Teoremă a lui Fermat (Pierre de Fermat, 1607-1665), enunțată în 1637: pentru orice n

număr întreg > 2 , nu există nici un triplet de numere întregi pozitive (x, y, z) care să verifice ecuația $x^n + y^n = z^n$. Deși enunțul e foarte ușor de înțeles pentru oricine, conjectura aceasta a rezistat 357 ani, fiind rezolvată în 1994 de englezul Andrew Wiles (acesta fiind recompensat, în 2016, de Academia Norvegiană de Științe și Litere cu Premiul Abel (după numele matematicianului norvegian Niels Henrik Abel, 1802-1829), în valoare de aprox. 700 mii dolari). De fapt Wiles anunțase soluția în 1993, ca o parte a unei teorii mai generale, dar s-a dovedit imediat că soluția sa avea o eroare. Wiles a reușit să dea soluția completă în anul următor. Desigur, presa vremii a discutat mult acest subiect de interes maxim, nu numai pentru matematicieni, ci și pentru publicul larg. Menționăm că cercetările pentru demonstrarea Marii Teoreme a lui Fermat au condus la crearea unui nou domeniu în matematică, anume teoria algebrică a numerelor.

Matematica exercită o atracție deosebită pentru mulți și satisfacțiile provocate de descoperirile matematice sunt poate mai puternice decât cele care însoțesc creațiile muzicale, literare etc. De altfel, matematica nu este incompatibilă cu literatura și arta. Se știe că Eminescu a avut înclinații, nu numai spre filosofie, ci și spre matematică (mai ales în ultimii ani de viață). Ion Barbu (Dan Barbilian) a creat atât în matematică, cât și în poezie. Regretatul Cezar Avramescu, fost membru al Departamentului de Matematică al Universității din Craiova, a fost nu numai un matematician distins, dar și jurnalist și poet, continuând tradiția lui Ion Barbu.

Uneori matematica poate să inspire creații artistice. Cunosce un pictor, Victor Foca (Botoșani), care folosește în picturile D-sale *secțiunea de aur* (sau *secțiunea divină*) precum și diverse forme geometrice regulate pentru a descrie - în concepția D-sale - universul inițial perfect.

Matematica nu este incompatibilă nici cu religia. Există matematicieni, chiar în zilele noastre, care cred în Dumnezeu. Unii consideră ca adevărurile matematice sunt de inspirație divină. De exemplu, Srinivasa Ramanujan (1887-1920, matematician indian) spunea că Dumnezeu îi dezvăluia teoremele pe care le enunța (majoritatea rezultatelor sale fiind legate de teoria numerelor).

Mai mult, unii consideră că matematica este o cale spre Dumnezeu: frumusețea și perfecțiunea ei poate induce transcedența spre lumea divină.

Matematica este una din principalele discipline în școală, jucând un rol important și în înțelegerea altor discipline. În plus, matematica, inclusiv elementele de logică aferente, are un rol formator în educația copiilor.

În încheiere, putem spune că matematica este utilă societății umane și este minunată ca regină a științelor, cum o numea Gauss (Carl Friedrich Gauss, 1777–1855, matematician, fizician și astronom german); aduce beneficii imense și produce satisfacții extraordinare celor care îi calcă pragul. Iubirea de matematică îi traspune pe cei împătimiți într-o lume minunată, o adevărată grădină spirituală a raiului.

19 aprilie 2019

Gheorghe Moroșanu