26 noiembrie 2022 — Conf. dr. Cosmin Pelea

Combinatorică

Probleme de numărare

Programa şcolară în vigoare ne pune cel mai adesea în situaţia de a număra pentru o mulţime finită nevidă A (sub)mulţimi finite de elemente din A, (sub)mulţimi ordonate finite de elemente din A şi sisteme ordonate finite de elemente din A.

Să începem cu ultimele dintre ele. Un *sistem ordonat finit de elemente din* A este un element $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ al produsului cartezian $\underbrace{A \times \cdots \times A}_{k \text{ mulţimi}}$ $(k \in \mathbb{N})$. O simplă schimbare de reprezentare — eliminarea parantezelor şi a virgulelor — conduce la scrierea

$$a_1 a_2 \ldots a_k,$$

care justifică denumirea de *cuvânt de lungime* k *peste* A sau *cuvânt cu elemente din* A pe care o preferăm celei de mai sus. Numărul k se numeşte *lungimea cuvântului*, iar elementele $a_1, \ldots, a_k$ se numesc *componentele cuvântului*. Pentru două cuvinte $a_1 a_2 \ldots a_k$ şi $b_1 b_2 \ldots b_s$,

$$a_1 a_2 \ldots a_k = b_1 b_2 \ldots b_s \ \Leftrightarrow \ k = s \text{ şi } a_i = b_i, \forall i = 1, 2, \ldots, k.$$

Cuvântul vid (peste A) este singurul cuvânt (peste A) care are lungimea 0.

Observaţiile 1 *i) Subliniem câteva deosebiri esenţiale între mulţime şi cuvânt:*
a) Într-o mulţime, ordinea în care scriem elementele nu contează, pe când în cuvânt ordinea componentelor este importantă.
b) Elementele unei mulţimi sunt distincte, în timp ce componentele unui cuvânt pot să şi coincidă.
ii) Dacă mulţimea A *are* n *elemente, atunci numărul cuvintelor de lungime* k *peste* A *este*

$$|A^k| = n^k \ (k, n \in \mathbb{N}, \ n \neq 0).$$

Acest număr este egal cu numărul funcţiilor de la $\{1, \ldots, k\}$ *la* A *şi, printr-o generalizare simplă, şi cu numărul funcţiilor de la o mulţime cu* k *elemente la o mulţime cu* n *elemente.*

O submulţime finită a mulţimii nevide A în care elementele sunt aranjate într-o anumită ordine se numeşte *submulţime ordonată a mulţimii* A. Dacă evidenţiem ordinea prin numerotarea elementelor, o submulţime ordonată cu k elemente din A $(k \in \mathbb{N})$ este un sistem ordonat $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ cu toate componentele distincte, adică un cuvânt $a_1 a_2 \ldots a_k$ (peste A) care are componentele distincte.

Definiţia 2 *Fie* A *o mulţime finită nevidă cu* $|A| = n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ *şi fie* $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq k \leq n$. *Submulţimile ordonate de* k *elemente ale lui* A *se numesc aranjamente* [redacted] *de* n *(elemente) luate câte* k.

Observaţia 3 *Două aranjamente de n luate câte k se deosebesc prin natura elementelor lor sau prin ordinea elementelor lor (sau ambele).*

Notaţia 4 *Notăm cu A_n^k numărul aranjamentelor de n luate câte k.*

Observaţia 5 *Dacă $k, n \in \mathbb{N}$, $k \leq n$ atunci*

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} \,.$$

Cum pentru un alfabet vid se poate forma un singur cuvânt, cuvântul vid, iar acesta nu are componente care să se repete, putem scrie $A_0^0 = 1$. Aşadar, $A_n^0 = 1$ chiar şi atunci când $n = 0$.

Definiţia 6 *Fie A o mulţime finită (nevidă) cu $|A| = n$. Se numeşte permutare a mulţimii A sau permutare de n elemente orice mulţime ordonată (cuvânt cu componentele distincte) care se poate forma cu toate cele n elemente ale mulţimii A. Cu alte cuvinte, o permutare de n elemente este un aranjament de n elemente luate câte n.*

Observaţia 7 *Două permutări de n elemente se deosebesc doar prin ordinea elementelor lor.*

Notaţia 8 *Notăm cu P_n numărul permutărilor mulţimii A cu n elemente.*

Observaţia 9 *Ţinând cont de definiţia permutărilor, $P_n = A_n^n$. Aşadar,*

$$P_n = n! = n(n-1)(n-2)\cdot \cdots \cdot 3\cdot 2\cdot 1, \ \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

Definiţia 10 *Pentru o mulţime (nevidă) A cu n elemente, submulţimile lui A având fiecare câte k elemente, unde $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq k \leq n$, se numesc combinări de n (elemente) luate câte k.*

Observaţia 11 *Două combinări de n luate câte k se deosebesc prin natura elementelor lor.*

Notaţia 12 *Notăm cu C_n^k numărul combinărilor de n luate câte k.*

Observaţia 13 *Dacă $k, n \in \mathbb{N}$, $k \leq n$ atunci*

$$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (k \leq n)\,.$$

Chiar şi când $A = \emptyset$ există o singură submulţime cu 0 elemente a mulţimii A, prin urmare putem scrie $C_n^0 = 1$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Enunţuri

~~1.~~ Să se arate că numărul funcţiilor de la o mulţime A cu m elemente la o mulţime B cu n elemente este n^m $(m, n \in \mathbb{N}^*)$.

~~2.~~ Să se determine numărul legilor de compoziţie ce pot fi definite pe o mulţime M cu 3 elemente. Câte dintre acestea sunt comutative? Câte legi de compoziţie admit element neutru? Să se generalizeze la o mulţime cu n elemente $(n \in \mathbb{N}^*)$. Generalizare. temă

$\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$

impusă de ordinea liniilor lui A

~~3.~~ Fie $m, n \in \mathbb{N}^*$, $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(K)$ şi $i_1, \ldots, i_l, j_1, \ldots, j_k \in \mathbb{N}^*$ cu $1 \le i_1 < \cdots < i_l \le m$ şi $1 \le j_1 < \cdots < j_k \le n$. O matrice

$$\begin{pmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \ldots & a_{i_1 j_k} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \ldots & a_{i_2 j_k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i_l j_1} & a_{i_l j_2} & \ldots & a_{i_l j_k} \end{pmatrix} \in M_{lk}(K)$$

$\underline{\underline{R}}$: $C_m^l \cdot C_n^k$ submatrici de tip (l,k)

formată din elementele matricei A situate la intersecţiile liniilor $i_1, \ldots, i_l$ cu coloanele $j_1, \ldots, j_k$ se numeşte **submatrice a matricei** A de tipul (l, k). Să se determine numărul submatricelor de tip (l, k) ale unei matrice de tip (m, n). Aplicaţie la calculul rangului unei matrice.

4. Considerăm cifrele 0, 1, 2, 3, 4 şi 5.

a) Câte numere de 8 cifre pot fi formate cu aceste cifre? Câte dintre acestea sunt pare?

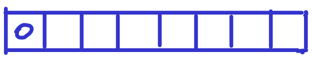
b) Câte numere pot fi formate cu aceste cifre astfel încât în fiecare număr fiecare cifră apare exact o dată? Câte dintre acestea sunt pare? ← numărăm permutări

c) Câte numere de 4 cifre pot fi formate cu aceste cifre astfel încât în fiecare număr fiecare cifră apare o singură dată? Câte dintre acestea sunt pare? ← numărăm aranjamente de 6 luate câte 4 care satisfac diverse condiții suplimentare

Indicații la final

d) Câte numere de 4 cifre pot fi formate cu aceste cifre astfel încât în fiecare număr fiecare cifră este strict mai mică (respectiv mai mare) decât precedenta? Câte dintre acestea sunt pare?

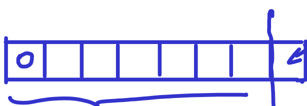
4. a) $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$



8 căsuțe

Cuvinte de lungime 8 peste A putem forma 8^6. Dintre acestea sunt numere de 8 cifre doar acele cuvinte, care nu încep cu 0, în număr de $8^6 - 7^6$.

→ Să le numărăm pe cele pare:



0,2,4

7 căsuțe

$3 \cdot (7^6 - 6^6)$

nr. cuvintelor de lungime 7 peste A

cuvinte de lungime 7 peste A care încep cu 0

b) $\underline{R}$: $6! - 5!$

cuvinte de lungime 6 cu comp. distincte

cuvinte de lungime 6 cu comp. distincte care încep cu 0.

Să le numărăm pe cele pare:

- ultima cifră este 0: $5!$ numere
- — " — 2: $5! - 4!$ numere
- — " — 4: $5! - 4!$

$\Longrightarrow 2(5! - 4!) + 5! = \ldots$

c) Ca la b) se arată că există $A_6^4 - A_5^3$ numere care respectă cerința, dintre care $A_5^3 + 2(A_5^3 - A_4^2)$ sunt pare.

cuvinte de lungime 4 peste A cu comp. distincte care încep cu 0

cuvinte de lungime 4 peste A cu componente distincte

cu ultima cifră 0

← cu ultima cifră 2 sau 4.

Rezolvări:

1. A, B mulțimi, $|A| = m$, $|B| = n$, $m, n \in \mathbb{N}^*$

$B^A = \{f \mid f: A \to B\}$, $|B^A| \overset{?}{=} n^m$

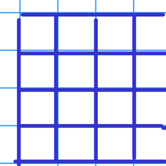
Soluție: Inducție după $m \in \mathbb{N}^*$.

$m = 1$, $|A| = 1 \Rightarrow |B^A| = n \ (= n^1)$, $A = \{a_1\}$

f_i

x	a_1
$f_i(x)$	b_i

$\in B = \{b_1, \dots, b_n\}$, $i = \overline{1,n}$



$\Rightarrow |B^A| = n^1$ adevărată

Ip.: că afirm. din enunț este adevărată pentru funcțiile de la o mulț. cu m elem. la o mulț. cu n elem. (nr. lor este n^m) și considerăm $A = \{a_1, \dots, a_m, a_{m+1}\}$ și $B = \{b_1, \dots, b_n\}$
distincte distincte

x	a_1	a_2	...	a_m	a_{m+1}
$f(x)$	.	.		.	

A

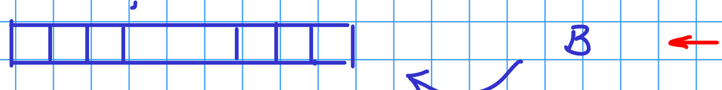
B

n moduri

$\exists\, n^m$ moduri de a construi o f-ție $\{a_1, \dots, a_m\} \to B$. Pentru fiecare astfel de funcție, pentru a obține o f-ție $A \to B$ îi asociem lui a_{m+1} o imagine din B (ceea ce se poate face în n moduri)

$\Longrightarrow$ nr. f-țiilor de la A la B este $n^m \cdot n = n^{m+1}$.

— m căsuțe



2. $M = \{a, b, c\}$ $\quad a \neq b \neq c \neq a$

$*: \underbrace{M \times M}_{9 \text{ elem.}} \to \underset{3 \text{ elem.}}{M}$ $\quad \exists\, 3^9$ legi de comp. pe M.

$*$	a	b	c
a	.	.	.
b	.	.	.
c	.	.	.

Tb. poate fi privită ca "a completa 9 căsuțe cu elem. lui M."

Dacă vorbim despre legi de comp. comutative, cum tabla lor este simetrică față de diag. principală, ne rămâne să completăm 6 căsuțe cu cele 3 el. ale lui M, ceea ce se poate face în 3^6 moduri

$*$	a	b	c
a	.	.	.
b		.	.
c			.

$\Longrightarrow$ nr. legilor de comp. com. pe M este 3^6.

Pentru legile de comp. care admit elem. neutru pe $\underline{\underline{a}} \in M$.

*	a	b	c
a	a	b	c
b	b	·	·
c	c	·	·

$\Longrightarrow$ 3^4 legi de comp.

Dar și b sau c ar putea fi el. neutre $\Big\} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow$ nr. legilor de comp. ce admit el. neutru este $3 \cdot 3^4 = 3^5$.

3. rang $O_{mn} = 0$, $A \in M_{mn}(K)$, $A \neq O_{mn}$, $r \in \mathbb{N}^*$

Minor de ordin k al lui A = determinant al unei submatrice de tip (k, k).

__Def:__ rang $A = r \iff$ A are un minor nenul de ordinul r și
toți minorii de ordin strict mai mare decât r sunt nuli.

__Obs:__ Pentru o matrice A de rang r, odată găsit un minor $d \neq 0$ de ordinul r,
mai avem de calculat $C_m^{r+1} C_n^{r+1} + \underbrace{C_m^{r+2} C_n^{r+2} + \dots + C_m^{\min\{m,n\}} C_n^{\min\{m,n\}}}$ minori (nuli).

__Caracterizare 1:__ rang $A = r \iff$ A are un minor nenul de ordinul r și
toți minorii de ordinul $r+1$ sunt nuli.

__Obs:__ Pentru o matrice A de rang r, odată găsit un minor $d \neq 0$ de ordinul r,
mai avem de calculat $C_m^{r+1} C_n^{r+1}$ minori (nuli).

__Caracterizare 2:__ rang $A = r \iff$ A are un minor nenul de ordinul r (să îl notăm d) și
toți minorii de ordinul $r+1$ obținuți prin bordarea lui d sunt 0.

__Obs:__ Pentru o matrice A de rang r, odată găsit un minor $d \neq 0$ de ordinul r,
mai avem de calculat $(m-r)(n-r)$ minori (nuli).

4. d) Ordinea cifrelor este impusă, ca urmare, pentru formarea de astfel de numere formăm subm. ale lui A

→ Dacă ordinea cifrelor este __strict descrescătoare__, chiar dacă apare 0, acesta nu va fi prima cifră $\Longrightarrow \exists\, C_6^4$ astfel de numere.

Dintre acestea sunt pare:

- cu ultima cifră 0: C_5^3 numere (alegem cifrele miilor, sutelor și zecilor dintre cele 5 rămase)
- cu ultima cifră 2: $C_3^3 = 1$ (au rămas 3, 4, 5 pentru cifrele miilor, sutelor și zecilor)
- cu ultima cifră 4: 0

$\Longrightarrow \exists\, C_5^3 + C_3^3$ numere pare care satisfac condiția din enunț.

→ Dacă ordinea cifrelor este __strict crescătoare__, într-un astfel de număr 0 ar trebui să fie prima cifră, ceea ce nu convine. Prin urmare, în formarea de astfel de numere nu îl folosim pe 0 și formăm submulțimi cu 4 elemente ale mulțimii $A \setminus \{0\} = \{1,2,3,4,5\}$. $\Longrightarrow \exists\ C_5^4$ astfel de numere.

Dintre acestea, cele care se pot termina doar cu 4 (în număr de $C_3^3 = 1$).

folosim cifrele 1, 2, 3 înainte de 4.