Geometrie analitică

Assoc. Prof. Cornel Pintea

E-mail: `cpintea math.ubbcluj.ro`

1 Probleme cu vectori

1.1 Probleme care implică operaţiile de adunare şi de înmulţire a vectorilor cu scalari

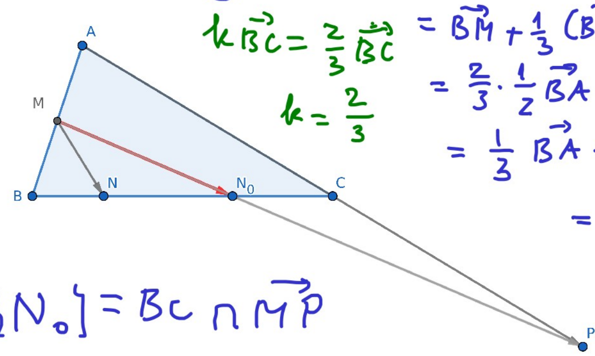
1. Se consideră triunghiul ABC şi punctele M, N, P astfel încât M este mijlocul laturii AB, $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{AC}$ şi $\overrightarrow{BN} = k\overrightarrow{BC}$. Determinaţi valoarea parametrului real k pentru care $\overrightarrow{MP} = 3\overrightarrow{MN}$[1].

Soluţie.

1

$$k\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BM} + \frac{1}{3}\overrightarrow{MP}$$
$$= \overrightarrow{BM} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{BP} - \overrightarrow{BM}) = \left(1 - \frac{1}{3}\right)\overrightarrow{BM} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BP}$$
$$= \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AP})$$
$$= \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AP}$$
$$= \frac{2}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\cdot 2\overrightarrow{AC}$$
$$= \frac{2}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA})$$
$$= \cancel{\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} - \cancel{\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}}$$

$$k\overrightarrow{BC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$$
$$k = \frac{2}{3}$$



2 $\{N_0\} = BC \cap MP$

Menelaus: $\underbrace{\frac{MA}{MB}}_{=1} \cdot \frac{N_0B}{N_0C} \cdot \underbrace{\frac{PC}{PA}}_{\frac{1}{2}} = 1 \iff \frac{N_0B}{N_0C}\cdot\frac{1}{2} = 1 \iff N_0B = 2N_0C$

$\overrightarrow{BN_0} = k\overrightarrow{BC} \Rightarrow k > 0$

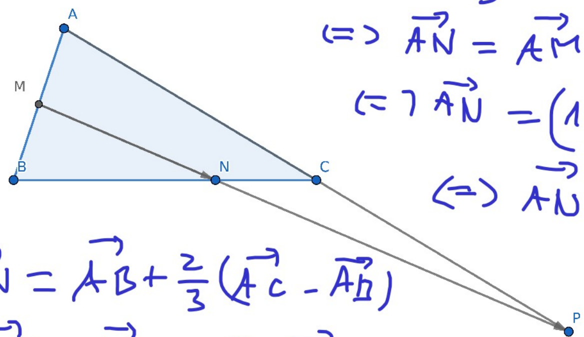
$BN_0 = k\,BC = k(BN_0 + N_0C) = k\,BN_0 + k\,N_0C$

$(1-k)BN_0 = k\,N_0C$. Asador $2 = \frac{BN_0}{N_0C} = \frac{k}{1-k} \Rightarrow k = \frac{2}{3}$

[1] ADMITERE, UNIVERSITATEA BABEŞ-BOLYAI CLUJ-NAPOCA, FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ, Iulie 2021, Proba scrisă la MATEMATICĂ, Varianta 1

2. Se consideră triunghiul ABC şi punctele M, N, P astfel încât M este mijlocul laturii AB, $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{AC}$ şi $\overrightarrow{MP} = 3\overrightarrow{MN}$. Arătaţi că B, N, C sunt coliniare.

Soluţie.



$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{MP} \iff \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AM}\right)$$

$$\iff \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AM} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AP} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AM}$$

$$\iff \overrightarrow{AN} = \left(1 - \frac{1}{3}\right)\overrightarrow{AM} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AP}$$

$$\iff \overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\cdot 2\overrightarrow{AC}$$

$$\iff \overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$$

$$\iff \overrightarrow{AN} = \left(1 - \frac{2}{3}\right)\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$$

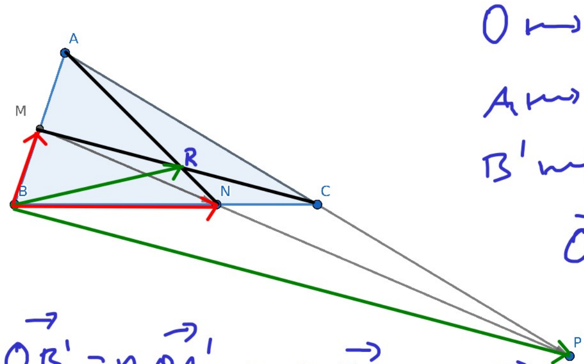
$$\iff \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)$$

$$\iff \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$$

$$\iff \overrightarrow{BN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} \Rightarrow B, N, C - \text{coliniare}$$

3. Se consideră triunghiul ABC şi punctele M, N, P astfel încât M este mijlocul laturii AB, $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{AC}$ şi N punctul determinat in problemele (1) şi (2). Exprimaţi vectorii $\overrightarrow{BP}$ şi $\overrightarrow{BR}$ în funcţie de vectorii $\overrightarrow{BN}$ şi $\overrightarrow{BM}$, unde $\{R\} = MC \cap AN$.

Soluţie.



$O \rightsquigarrow B,\ N \rightsquigarrow P,\ M \rightsquigarrow R$

$A \rightsquigarrow N,\ B \rightsquigarrow C,\ A' \rightsquigarrow M$

$B' \rightsquigarrow A$

$\overrightarrow{OB} = m\overrightarrow{OA} \rightsquigarrow \overrightarrow{BC} = m\overrightarrow{BN}$

$\overrightarrow{BN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{BC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BN}$

$\boxed{m = \frac{3}{2}}$

$\overrightarrow{OB'} = n\overrightarrow{OA'} \rightsquigarrow \overrightarrow{BA} = n\overrightarrow{BM}$

$\overrightarrow{BA} = 2\overrightarrow{BM}$ $\boxed{n = 2}$

$$\overrightarrow{OM} = m\frac{1-n}{1-mn}\overrightarrow{OA} + n\frac{1-m}{1-mn}\overrightarrow{OA'}$$

$$\overrightarrow{BR} = \frac{3}{2}\frac{1-2}{1-\frac{3}{2}\cdot 2}\overrightarrow{BN} + 2\frac{1-2}{1-\frac{3}{2}\cdot 2}\overrightarrow{BM}$$

$$\overrightarrow{BR} = \frac{3}{2}\frac{1}{2}\overrightarrow{BN} + 2\cdot\frac{1}{2}\overrightarrow{BM} \Leftrightarrow \boxed{\overrightarrow{BR} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BN} + \overrightarrow{BM}}$$

4. Considerăm unghiul BOB' şi punctele $A \in (OB)$, $A' \in (OB')$. Arătaţi că

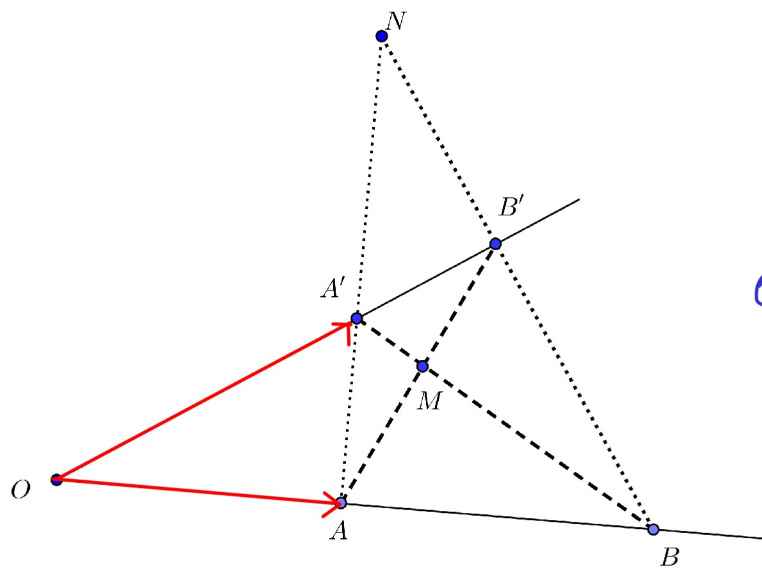
$$\overrightarrow{OM} = m\frac{1-n}{1-mn}\overrightarrow{OA} + n\frac{1-m}{1-mn}\overrightarrow{OA'} \tag{1.1}$$

$$\overrightarrow{ON} = m\frac{n-1}{n-m}\overrightarrow{OA} + n\frac{m-1}{m-n}\overrightarrow{OA'}\,. \tag{1.2}$$

unde $\{M\} = AB' \cap A'B$, $\{N\} = AA' \cap BB'$, $\overrightarrow{OB} = m\,\overrightarrow{OA}$ and $\overrightarrow{OB'} = n\,\overrightarrow{OA'}$.

Soluţie. Vom demonstra doar egalitatea (1.1), cealaltă demonstrându-se analog. În acest sens observăm că pentru vectorul $\overrightarrow{OM}$ avem descompunerile

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BM}\,.$$



O, X, Y

$\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{OY} - \overrightarrow{OX}$

$\Updownarrow$

$\overrightarrow{OX} + \overrightarrow{XY} = \overrightarrow{OY}$

Deoarece vectorii $\overrightarrow{AM}$ şi $\overrightarrow{AB'}$ sunt coliniari, iar vectorii $\overrightarrow{BM}$ şi $\overrightarrow{BA'}$ sunt de asemenea coliniari rezultă că există scalarii $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ astfel încât $\overrightarrow{AM} = \alpha\,\overrightarrow{AB'}$ şi $\overrightarrow{BM} = \beta\,\overrightarrow{BA'}$. Aşadar $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OA} + \alpha\,\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{OA} + \alpha(\overrightarrow{OB'} - \overrightarrow{OA}) = (1-\alpha)\,\overrightarrow{OA} + \alpha n\,\overrightarrow{OA'}$ şi $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{OB} + \beta\,\overrightarrow{BA'} = \overrightarrow{OB} + \beta(\overrightarrow{OA'} - \overrightarrow{OB}) = (1-\beta)m\,\overrightarrow{OA} + \beta\,\overrightarrow{OA'}$. Prin urmare $(1-\alpha)\,\overrightarrow{OA} + \alpha n\,\overrightarrow{OA'} = (1-\beta)m\,\overrightarrow{OA} + \beta\,\overrightarrow{OA'}$. Deoarece vectorii $\overrightarrow{OA}$ şi $\overrightarrow{OA'}$ sunt necoliniari, deducem că

$$\begin{cases} 1-\alpha = (1-\beta)m \\ \alpha n = \beta. \end{cases}$$

Acest sistem liniar este compatibil determinat şi are soluţia

$$\alpha = \frac{1-m}{1-mn},\ \beta = n\frac{1-m}{1-mn},$$

care poate fi uşor determinată folosind metoda substituţiei. Folosind valoarea lui α sau valoarea lui β, astfel determinate, într-una din reprezentările lui $\overrightarrow{OM}$ sub forma

$$(1-\alpha)\overrightarrow{OA}+\alpha n\overrightarrow{OA'}$$

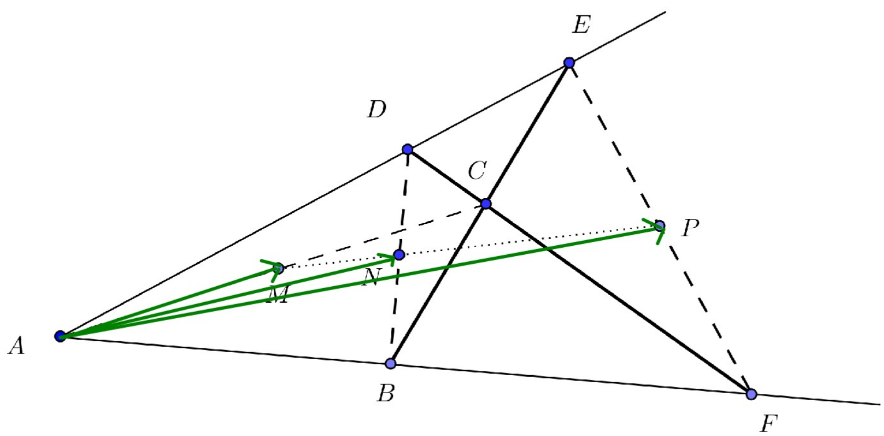
sau sub forma

$$(1-\beta)m\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OA'}$$

deducem imediat (1.1).

5. Considerăm un patrulater convex $ABCD$ având laturile opuse neparalele. Fie M şi N mijloacele diagonalelor $[AC]$ respectiv $[BD]$ ale patrulaterului dat, iar P mijlocul segmentului $[EF]$, unde $\{E\}=AD\cap BC$ şi $\{F\}=AB\cap CD$. Arătaţi că vectorii $\overrightarrow{MN}$ şi $\overrightarrow{MP}$ sunt coliniari, adică punctele M, N, P sunt coliniare.

   Soluţie. Deoarece vectorii $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{AF}$ sunt coliniari, iar vectorii $\overrightarrow{AD}$ şi $\overrightarrow{AE}$ sunt de asemenea coliniari rezultă că există scalarii $m, n\in\mathbb{R}$ astfel încât $\overrightarrow{AF}=m\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{AE}=n\overrightarrow{AD}$.



   Vom exprima acum vectorii $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AN}$ şi $\overrightarrow{AP}$ în termenii vectorilor $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{AD}$ şi scalarii m şi n. De exemplu

$$\overrightarrow{AN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)\text{ şi }\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{AE}\right)=\frac{1}{2}\left(m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AD}\right).$$

   Folosind egalitatea (1.1) deducem

$$\overrightarrow{AC}=m\frac{1-n}{1-mn}\overrightarrow{AB}+n\frac{1-m}{1-mn}\overrightarrow{AD}$$

şi deci

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM} &= \frac{1}{2}\,\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(m\frac{1-n}{1-mn}\,\overrightarrow{AB} + n\frac{1-m}{1-mn}\,\overrightarrow{AD}\right)\\ &= \frac{1}{2(1-mn)}\left(m(1-n)\,\overrightarrow{AB} + n(1-m)\,\overrightarrow{AD}\right)\\ &= \frac{1}{2(1-mn)}\left(m\,\overrightarrow{AB} + n\,\overrightarrow{AD} - mn(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})\right)\\ &= \frac{1}{2(1-mn)}\left(2\,\overrightarrow{AP} - 2mn\,\overrightarrow{AN}\right) = \frac{1}{1-mn}\left(\overrightarrow{AP} - mn\,\overrightarrow{AN}\right).\end{aligned}$$

Pin urmare

$$\begin{aligned}(1-mn)\,\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AP} - mn\,\overrightarrow{AN} &\Longleftrightarrow \overrightarrow{AM} - mn\,\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AP} - mn\,\overrightarrow{AN}\\ &\Longleftrightarrow \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AP} = mn\left(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AN}\right) \Longleftrightarrow \overrightarrow{MP} = mn\,\overrightarrow{MN}.\end{aligned}$$

Aceasta arată că vectorii $\overrightarrow{MN}$ şi $\overrightarrow{MP}$ sunt coliniari, adică punctele M, N, P sunt coliniare.

6. Relativ la un reper cartezian ortonormat considerăm vectorul de vectorul $\overrightarrow{v_t}(t, t^2)$, $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Să se arate că:

   (a) vectorii $\overrightarrow{v_t}$ şi $\overrightarrow{v}(a, b)$ sunt coliniari dacă şi numai dacă $at - b = 0$.

   (b) Există $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ astfel încât $\overrightarrow{v_t}$ este coliniar cu $\overrightarrow{b}(17, 19)$.[2]

(a) $\vec{v}$ şi $\vec{v}_t$ sunt coliniari $\Leftrightarrow \dfrac{a}{t} = \dfrac{b}{t^2} \Leftrightarrow a = \dfrac{b}{t}$

$\Leftrightarrow at - b = 0$

(b) $a = 17,\ b = 19$ $\qquad 17t - 19 = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{19}{17}$

[2]ADMITERE, UNIVERSITATEA BABEŞ-BOLYAI CLUJ-NAPOCA, FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ, Iulie 2021, Proba scrisă la MATEMATICĂ, Varianta 1

1.2 Probleme care implică produsul scalar al vectorilor

$v(a, b)$

1. Relativ la un reper cartezian ortonormat considerăm vectorul de vectorul $\overrightarrow{v_t}(t, t^2)$, $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Să se arate că:

$\overrightarrow{v_s}(s, s^2)$

   (a) vectorii $\overrightarrow{v_s}$ şi $\overrightarrow{v_t}$ sunt perpendiculari dacă şi numai dacă $st = -1$.

   (b) vectorii $\overrightarrow{v_t}$ şi $\overrightarrow{v}(a, b)$ sunt perpendiculari dacă şi numai dacă $a + bt = 0$.

   (c) $\overrightarrow{v_2}$ este perpendicular pe $\overrightarrow{v}\left(-1, \frac{1}{2}\right)$[3]

a $\overrightarrow{v_s} \perp \overrightarrow{v_t} \Leftrightarrow \overrightarrow{v_s} \cdot \overrightarrow{v_t} = 0 \Leftrightarrow ts + t^2 s^2 = 0 \Leftrightarrow st(1 + st) = 0 \,/ :st$

$\Leftrightarrow 1 + st = 0 \Leftrightarrow st = -1$

b $\overrightarrow{v_t} \perp \overrightarrow{v} \Leftrightarrow \overrightarrow{v_t} \cdot \overrightarrow{v} = 0 \Leftrightarrow at + bt^2 = 0 \Leftrightarrow t(bt + a) = 0 \,/ :t$

$\Leftrightarrow a + bt = 0$

c $t = 2, \ a = -1, \ b = \frac{1}{2}$ $\quad a + bt = -1 + \frac{1}{2} 2 = -1 + 1 = 0$

$\overrightarrow{v_2} \perp \overrightarrow{v}$

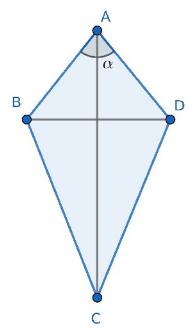
[3] ADMITERE, UNIVERSITATEA BABEŞ-BOLYAI CLUJ-NAPOCA, FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ, Iulie 2021, Proba scrisă la MATEMATICĂ, Varianta 1

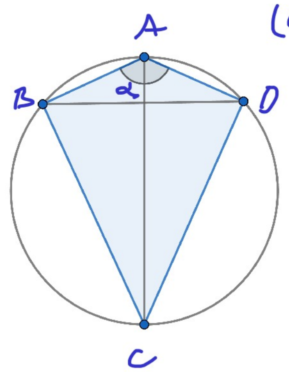
2. Se consideră patrulaterul convex $ABCD$ astfel încât triunghiurile ABD şi CBD sunt isoscele ($AB = AD = a$, $CB = CD = c$) şi fie $\alpha = m(\widehat{BAD})$. Să se arate că

   (a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = a^2 \cos\alpha$.

   (b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD} = (a^2 - c^2) \cos\alpha$, dacă $ABCD$ este, în plus, inscriptibil.

   Soluţie.





(a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = AB \cdot AD \cdot \cos(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB}})$

$= a^2 \cos\alpha$

$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} \overset{?}{=} 0 \iff AC \perp BD$

$\Delta ABC \equiv \Delta ADC$ (LLL)

$\Rightarrow m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{DAC})$

$\Rightarrow AC$ – bisectoare în triunghiurile isoscele ABD și CBD

Prin urmare AC este înălțime în triunghiurile isoscele ABD și CBD adică $AC \perp BD$

(b) $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD} = CB \cdot CD \cos(\widehat{\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}})$

$= c^2 \cos(\pi - \alpha) = c^2(-\cos\alpha) = -c^2\cos\alpha$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD} = a^2\cos\alpha - c^2\cos\alpha = (a^2 - c^2)\cos\alpha$

Observaţie Dacă iar $ABCD$ este romb, atunci

(a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = a^2 \cos \alpha$.

(b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$.

În cazul particular $a = 12$, $\alpha = 60^\circ$ (şi $ABCD$ bineînţeles romb), atunci obţinem că $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 72$[4]

[4]CONCURS DE ADMITERE, UNIVERSITATEA BABEŞ-BOLYAI CLUJ-NAPOCA, FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ, 21 iulie 2019 Proba scrisă la MATEMATICĂ