1. FEJEZET

Sorozatok

1. Kitűzött feladatok

1.1. Feladat. Az $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ sorozat tagjait az

$$a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = \frac{1}{3}, \text{ és } a_{n+1} = \frac{1}{n^2-1}a_{n-1} - \frac{1}{n(n+2)}a_n, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$$

összefüggések határozzák meg.

a) Írd fel az a_n-et az n függvényében!

b) Számítsd ki a $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$ határértéket!

1.2. Feladat. Tanulmányozd az $(x_n)_{n\geq 0}$ sorozat konvergenciáját, ha

$$x_0 = 4, \text{ és } x_{n+1} = \frac{5}{x_n - 3}, \forall n \geq 0.$$

1.3. Feladat. Az $(a_n)_{n\geq 1}$ sorozat tagjait az

$$a_1 = 1, a_2 = 3, \text{ és } a_{n+2} = (n+3)a_{n+1} - (n+2)a_n, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$$

összefüggések határozzák meg. Írd fel az a_n-et az n függvényében!

1.4. Feladat. Az $(a_n)_{n\geq 0}$ valós számsorozat teljesíti a

$$4a_{n+1} \cdot a_{n-1} \cdot a_{n-2} = 8a_n^2 \cdot a_{n-2} - 3a_n \cdot a_{n-1}^2$$

összefüggést, bármely $n \geq 2$ esetén. Számítsd ki a $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot 2^{\frac{n(n+1)}{2}}$ határértéket, ha $a_0 = a_1 = 2a_2 \neq 0$.

Gheorghe Vrânceanu Emlékverseny, 1988

1.5. Feladat. Adott az $u_1 \in (0,1)$ és $u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$ rekurzió által meghatározott sorozat. Számítsd ki a $\lim\limits_{n\to\infty} u_1 \cdot u_2 \cdot \ldots \cdot u_n$ határértéket!

Helyi olimpia, 1992, Marius Cavachi

1.6. Feladat. Írjunk fel az $a_n = \left[(2+\sqrt{3})^n\right]$ sorozat tagjaira egy rekurziót, ahol $[x]$ az x egész része!

Spiru Haret Emlékverseny, 1986

1.7. Feladat. Tekintsük az $(x_n)_{n\geq 0}$ és $(y_n)_{n\geq 0}$ sorozatokat, amelyeket a következő feltételek határoznak meg:

$$x_0 = 1, x_1 = 2, x_{n+1} = 4x_n - x_{n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

$$y_0 = 0, y_1 = 1, y_{n+1} = 4y_n - y_{n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Igazold, hogy $x_n^2 = 3y_n^2 + 1, \forall n \in \mathbb{N}$.

1.8. Feladat. Adott az $(x_n)_{n\geq 1}$, $x_1 = 2$,

$$x_{n+1} = 2x_n + \sqrt{3x_n^2 - 3}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

rekurzív sorozat. Igazold, hogy a sorozat minden tagja természetes szám!

1.9. Feladat. Adott az $(x_n)_{n\geq 1}$,

$$x_1 = 1, x_{n+1} = \frac{1}{16}\left(1 + 4x_n + \sqrt{1 + 24x_n}\right), \forall n \in \mathbb{N}^*$$

rekurzív sorozat. Határozd meg a sorozat általános tagjának képletét!

1.10. Feladat. Határozd meg az $(a_n)_{n\geq 0}$ sorozat általános tagjának képletét, ha $a_{a_n} + a_n = 2n + 3, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Spiru Haret, Gheorghe Vrânceanu Emlékverseny, 1991, Bogdan Enescu

1.11. Feladat. Bizonítsd be, hogy ha az $(a_n)_{n\geq 0}$ valós számsorozat teljesíti az

$$a_{n+1} = |a_n - a_{n-1}|$$

összefüggést, bármely $n \geq 1$ esetén, akkor tartalmaz nullához tartó részsorozatot!

Grigore Moisil Emlékverseny, 1996, Mircea Bălaj

1.12. Feladat. Adott az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 4x - x^2, \forall x \in \mathbb{R}$ függvény, és tekintsük az $x_{n+1} = f(x_n), x_0 \in \mathbb{R}$ rekurzió által meghatározott sorozatot. Igazold, hogy végtelen sok olyan x_0 valós szám létezik, amelyre az $(x_n)_{n\geq 0}$ sorozat periodikus.

1.13. Feladat. Periodikus-e az $a_n = (-1)^{[\sqrt{n}]}$ sorozat?

Spiru Haret Emlékverseny, 1985, Bogdan Enescu

1.14. Feladat. Tanulmányozd az $(a_n)_{n\geq 0}$ sorozat konvergenciáját, ha $a_0 > 0, a_0 \neq e$, és

$$a_{n+1} = e^{\frac{1}{1-\ln a_n}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Spiru Haret Emlékverseny, 1985, Sorin Săileanu

1.15. Feladat. Az $(x_n)_{n\geq 1}$ valós számsorozat teljesíti az $x_1 = 2$,

$$x_{n+1} = \frac{2 + x_n}{1 - 2x_n}$$

összefüggéseket, bármely $n \in \mathbb{N}^*$. Bizonyítsd be, hogy a 0 nem tagja a sorozatnak, és $x_n \neq x_m$, ha $n \neq m$.

Megyei olimpia, 1995

1.16. Feladat. Az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sorozatra $x_1 = 1$, $x_2 = a$ és

$$x_n = (2n+1)x_{n-1} - (n^2 - 1)x_{n-2}, \quad \forall n \geq 3.$$

Milyen $a > 0$ értékekre teljesülaz $x_i | x_j$ összefüggést minden $i \leq j$ esetén?

Válogatóverseny, 1995

1.17. Feladat. Az $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}$ pozitív valós számokra

$$x_{n+1} = x_1 + x_2 + \ldots + x_n.$$

Bizonyítsd be, hogy

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{x_i(x_{n+1} - x_i)} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_{n+1}(x_{n+1} - x_i)}.$$

Válogatóverseny, 1996, Mircea Becheanu

1.18. Feladat. Az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ valós számsorozatra

$$x_{n+1}^2 < x_n^2 \text{ és } x_{n+1} + x_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Bizonyítsd be, hogy az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens!

Gazeta Matematică, 1/1977, D.M. Bătineţu

1.19. Feladat. Az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sorozatra teljesülnek az

$$a + a_{n-1}^2 \leq a_{n+1}^3 \leq a + a_n^2$$

egyenlőtlenségek, minden $n \geq 2$ esetén ($a > 0$ rögzített). Bizonyítsd be, hogy az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sorozat konvergens!

Helyi olimpia, 1991, Marius Cavachi

1.20. Feladat. Az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pozitív számsorozat teljesíti az

$$(n+1)x_{n+1} - nx_n < 0$$

egyenlőtlenséget, minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén. Bizonyítsd be, hogy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergens.

Felvételi, 1987

1.21. Feladat. Az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat teljesíti az

$$x_n \in (0, 2) \text{ és } (2 - x_n)x_{n+1} > 1$$

összefüggéseket, bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén. Bizonyítsd be, hogy a sorozat konvergens, majd számítsd ki a határértékét!

1.22. Feladat. Az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sorozat teljesíti az

$$x_{n+1} \leq x_n^2 \leq x_{n-1}$$

egyenlőtlenséget, bármely $n \geq 2$ esetén. Tanulmányozd az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sorozat konvergenciáját, és konvergencia esetén számítsd ki a határértékét!

1.23. Feladat. Az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatra

$$\frac{1+x_n}{2} \leq x_{2n+2} \leq \frac{1+x_{n+1}}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

a) Bizonyítsd be, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} = 1$.
b) Adjál példát nemkonstans sorozatra, amely teljesíti az adott feltételt!

1.24. Feladat. Bizonyítsd be, hogy ha az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat tagjaira

$$a_n^2 - 2a_{n+1} \leq 4a_n - 9 < 2(3a_n - a_{n+1} - 1), \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

akkor az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens, majd számítsd ki a határértékét!

Helyi olimpia, 1982, D.M. Bătineţu

1.25. Feladat. Az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ szigorúan pozitív valós számokból álló sorozat tagjai teljesítik az

$$x_n(2a - x_{n+1}) > a^2$$

egyenlőtlenséget, bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén ($a \in \mathbb{R}_+^*$ rögzített). Bizonyítsd be, hogy az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens, majd számítsd ki a határértékét!

Gazeta Matematică, 9/1982, Dorel Miheţ

1.26. Feladat. Az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nemnegatív valós számokból álló sorozat tagjai teljesítik az

$$x_{n+1}^3 < 3x_n - 2,$$

egyenlőtlenséget, bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén. Bizonyítsd be, hogy az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens, majd számítsd ki a határértékét!

Gazeta Matematică, 12/1983, Mariana Mirică

1.27. Feladat. Lehet-e konvergens az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sorozat, ha $a_1 < a_2$, és a második tagtól kezdődően minden tag szigorúan kisebb a szomszédos tagok számtani középarányosánál?

1.28. Feladat. Az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ valós számsorozat tagjai teljesítik az

$$x_1 = 1,\ (n+1)(x_{n+1} - x_n) \geq 1 + x_n$$

egyenlőtlenséget, bármely $n \in \mathbb{N}^*$ esetén. Bizonyítsd be, hogy az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sorozat nem korlátos!

Gazeta Matematică, 10/1988, Mircea Lascu

1.29. Feladat. Az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ valós számsorozat tagjai teljesítik az

$$x_n \leq a \cdot x_{n+1} \text{ és } b \cdot x_{n+2} + c \cdot x_n \leq d \cdot x_{n+1}$$

összefüggéseket, bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén, ahol $a > 1$, $c > 0$, és $b > d$ rögzített pozitív számok. Számítsd ki a $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ határértéket!

Helyi olimpia, 1982, D.M. Bătineţu és Mircea Trifu

1.30. Feladat. Az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ és $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ valós számsorozatok teljesítik az

$$n^2(x_k \cdot x_m - k \cdot x_m - m \cdot x_k) \leq (1-kn)(1+mn), \quad \forall m,n \in \mathbb{N}^*, k \leq m,$$

valamint az

$$y_1 = 1,\ y_{n+1} = \sqrt{1 + x_{n+1}y_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

összefüggéseket. Bizonyítsd be, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 1$.

Helyi olimpia, 1987, D.M. Bătineţu

1.31. Feladat. Az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ valós számsorozat konvergens és tagjai teljesítik az

$$x_n^2 - x_n \cdot x_{n+1} - \frac{1}{n} \geq 0$$

egyenlőtlenségeket, bármely $n \in \mathbb{N}^*$ esetén. Bizonyítsd be, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \leq 0$.

Grigore Moisil Emlékverseny, 1990

1.32. Feladat. Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvényre igaz az

$$f(x) \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \mathbb{Z}$$

implikáció. Bizonyítsd be, hogy az $a_n = f(n) - n$, $n \geq 0$ sorozat monoton.

Grigore Moisil Emlékverseny, 1993, Liviu Vlaicu

1.33. Feladat. Az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pozitív tagú számsorozat teljesíti az

$$a_{n+1} \leq \operatorname{arctg} a_n$$

egyenlőtlenséget, bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén. Bizonyítsd be, hogy a sorozat konvergens, majd számítsd ki a határértékét!

1.34. Feladat. Bizonyítsd be, hogy ha az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nemnegatív tagú sorozat tagjaira

$$2x_{n+2} \leq x_{n+1} + x_n, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

akkor az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens.

1.35. Feladat. Az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ valós számsorozat tagjai teljesítik a következő egyenlőtlenségeket:

$$x_n > 1, \forall n \in \mathbb{N} \text{ és } x_{n+1} \leq \sqrt{x_n \cdot x_{n-1}}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Bizonyítsd be, hogy az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens!

Grigore Moisil Emlékverseny, 1994, Dan Bărbosu

1.36. Feladat. Legyen $a_0 \in \mathbb{R}, a_0 > 0$, és tekintsük az

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}, \forall n \in \mathbb{N}$$

rekurencia által meghatározott $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatot. Bizonyítsd be, hogy

a) $a_n > \sqrt{a_0^2 + 2n}, \quad \forall n \geq 1;$

b) $a_n^2 \leq a_0^2 + 2n + \frac{1}{a_0}(a_n - a_0), \quad \forall n \geq 1.$

1.37. Feladat. Az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ és $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sorozatokat az

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{b_n} \text{ és } b_{n+1} = b_n + \frac{1}{a_n}$$

rekurenciák határozzák meg, ahol $n \in \mathbb{N}^*$, $a_1 > 0$ és $b_1 > 0$. Igazold, hogy $a_{25} + b_{25} > 10\sqrt{2}$.

1.38. Feladat. Az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sorozatot a következő rekurzió határozza meg:

$$x_1 = 1, x_{n+1} = \frac{x_n + 2}{x_n + 1}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Igazold, hogy az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sorozat konvergens, és számítsd ki a határértékét!

1.39. Feladat. Tekintsük az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatot, ahol

$$x_0 = 1, \text{ és } x_n = \frac{x_{n-1}}{x_{n-1} + 1}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Igazold, hogy $x_n < \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

1.40. Feladat. Az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sorozat teljesíti a következő rekurziót:

$$x_1 = a \in (0,1), \text{ és } x_{n+1} = x_n(1 - x_n), \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Igazold, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, és $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot x_n = 1$.

1.41. Feladat. Az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sorozat tagjai teljesítik az

$$x_1 = x_2 = 1, \text{ és } x_{n+1} = \sqrt{n x_n + x_{n-1}}$$

összefüggéseket, bármely $n \geq 2$. Számítsd ki a $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{n}$ határértéket!

Helyi olimpia, 1988, Constantin Caragea

1.42. Feladat. Az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sorozat teljesíti az

$$x_1 = 1 \text{ és } x_{n+1} = \frac{x_n}{2+x_n}$$

összefüggésket, bármely $n \in \mathbb{N}^*$ esetén. Bizonyítsd be, hogy az $y_n = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$ sorozat konvergens!

Spiru Haret és Gheorghe Vrânceanu Emlékverseny, 1991, Liliana Niculescu

1.43. Feladat. Az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatokra teljesülnek a következő feltételek:

- $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ szigorúan növekvő;
- $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ korlátlam;
- $x_n \geq n \cdot y_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Bizonyítsd be, hogy az $a_n = x_{n+1} - x_n$ sorozat korlátlan!

Helyi olimpia, 1978, Dorin Andrica

1.44. Feladat. Az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sorozatra teljesülnek az

$$x_1 > 1 \text{ és } x_{n+1} = x_n + x_n^2, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

összefüggések. Számítsd ki a $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^n}{x_{n+1}}$ határértéket!

Helyi olimpia, 1991, Gheorghe Bordea

1.45. Feladat. Tanulmányozd az $x_1 = a \in (-1, 1)$,

$$x_{n+1} = \frac{a \cdot x_n}{\sqrt{(2a^2-1)x_n^2 + (1-a^2)}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

összefüggésekkel értelmezett sorozat konvergenciáját!

Megyei olimpia, 1994, Silviu Boga

1.46. Feladat. Az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ és $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sorozatok teljesítik az

$$x_{n+1} = x_n^2 + 1 \text{ és } y_{n+1} = x_n \cdot y_n$$

összefüggéseket, minden $n \geq 1$ esetén. Bizonyítsd be, hogy létezik a $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n}$ határérték és $\sqrt{7}$-nél szigorúan kisebb!

Grigore Moisil Emlékverseny, 1992, Şerban Buzeţeanu és Dorin Andrica

1.47. FELADAT. Az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sorozatot az

$$x_1 \in \mathbb{R} \text{ és } x_{n+1} = \sqrt{\frac{1+x_n^2}{n}},\ \forall n \in \mathbb{N}^*$$

összefüggésekkel értelmezzük. Számítsd ki a $\lim\limits_{n\to\infty} n^a \cdot x_n$ határértéket, ha $a \in \mathbb{R}$ egy rögzített paraméter!

Gheorghe Vrânceanu Emlékverseny, 1990, Dan Popescu

1.48. FELADAT. Tanulmányozd az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergenciáját, ha $x_0 = b \in (a, 2a)$, és $a > 0$ rögzítettek, illetve

$$x_{n+1} = a + \sqrt{x_n \cdot (2a - x_n)}, \quad \forall n \geq 0.$$

Spiru Haret és Gheorghe Vrânceanu Emlékverseny, 1990, Petre Năchilă

1.49. FELADAT. Az a és b egynél szigorúan nagyobb valós számok és $x_0 = x_1 = 1$, valamint

$$\left(\sqrt[p]{a^p + b^p}\right)^{x_{n+2}} = a^{x_{n+1}} + b^{x_n}, \quad \forall n \geq 0$$

ahol $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$ rögzített. Bizonyítsd be, hogy az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens!

Spiru Haret és Gheorghe Vrânceanu Emlékverseny, 1992, Cornel Noană

1.50. FELADAT. Az $(a_n)_{n\geq 1}$ szigorúan pozitív tagú valós számsorozat tagjai teljesítik az

$$a_{n+1} - \frac{1}{a_{n+1}} = a_n + \frac{1}{a_n}$$

összefüggést, minden 0-tól különböző n természetes szám esetén. Számítsd ki a $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n} \right)$ határértéket!

Spiru Haret Emlékverseny, 1989

1.51. FELADAT. Jelöljön $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ egy valós számsorozatot. Számítsd ki a $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{n^{2+\alpha}}$ határértéket, ha az $x_n = a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n$ sorozat korlátos, és $\alpha > 0$ rögzített!

Grigore Moisil Emlékverseny, 1991, Dumitru Acu

1.52. Feladat. Az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ valós számsorozat teljesíti az

$$a_1 > 0, a_{n+1}^2 = n(a_n - a_{n+1}), \forall n \in \mathbb{N}^*$$

összefüggésket. Bizonyítsd be, hogy $\lim_{n\to\infty} n^{a_n} = e$.

Megyei olimpia, 1993, Gheorghe Marchitan

1.53. Feladat. Jelöljük a_n-nel az $x^2 = e$ egyenlet megoldásainak számát S_n-ben. Bizonyítsd be, hogy $a_{n+1} = a_n + n \cdot a_{n-1}$, $\forall n \geq 2$, majd számítsd ki a $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n!}$ határértéket!

Megyei olimpia, 1991, Gheorghe Bodea

1.54. Feladat. Az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ valós számsorozat tagjai teljesítik az

$$a_1 > 1 \text{ és } a_{n+1} = 2a_n^2 - 1,\ \forall n \geq 1$$

összefüggéseket. Számítsd ki a $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{n-1}}{a_n}$ határértéket!

Spiru Haret és Gheorghe Vrânceanu Emlékverseny, 1996

1.55. Feladat. Az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat minden tagja a $(0, 1)$ intervallumban található. Értelmezzük az

$$x_0 = a, x_{n+1} = b \cdot a_n + x_n \cdot (1 - a_n),\ \forall n \in \mathbb{N}$$

összefüggéseket teljesítő $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatot. Bizonyítsd be, hogy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergens, majd adjál meg egy szükséges és elégséges feltételt ahhoz, hogy az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat határértéke b legyen!

Spiru Haret és Gheorghe Vrânceanu Emlékverseny, 1994

1.56. Feladat. Tanulmányozd az $x_0 \in [-\sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}]$,

$$x_{n+1} = 1 + x_n - \frac{x_n^2}{2},\ \forall n \geq 0$$

összefüggésekkel értelmezett sorozat konvergenciáját!

Spiru Haret és Gheorghe Vrânceanu Emlékverseny, 1993, Ion Chiţescu