Universitatea Babeș-Bolyai, Cluj-Napoca

Probleme de logică matematică

Alexandru-Ion Marinescu
amarinescu@cs.ubbcluj.ro

Două valori de adevăr (logica Booleană):

- **Adevărat** sau **Fals**
- **1** sau **0**
- **T** sau **F**

Operatori logici unari sau binari,
in ordinea priorității:

- **Negație** (unar)
- **Și** (binar)
- **Sau** (binar)
- **Implicație** logică (binar)

- Oricărei propoziții logice îi putem asocia un *tabel de adevăr*

- Putem privi propoziția logică drept o *funcție* de N variabile logice, care se evaluează la 1 sau 0

- Formalizând matematic, avem $f: \{0,1\}^N \rightarrow \{0,1\}$

- Tabelul de adevăr se construiește dând *fiecărei* variabile logice *toate* combinațiile posibile de 0 sau 1

- În total, tabelul va avea 2^N rânduri și cel puțin $N + 1$ coloane (câte o coloană pentru fiecare variabilă logică și cel puțin o coloană pentru propoziția logică întreagă)

Operatorul unar **negație** logică

p	$\neg p$
0	1
1	0

Operatorul binar **și** logic

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Operatorul binar **sau** logic

p	q	$p \lor q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Operatorul binar **implicație** logică

p	q	$p \to q$	$\neg p \lor q$	$\neg q \to \neg p$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	1	1	1

- Remarcăm din tabelul de adevăr că, în logică, falsul *implică orice*, pe când adevărul *implică numai adevăr*. Adevărul nu poate implica fals.

- Implicația logică este echivalentă, conform tabelului de adevăr cu "*non p sau q*".

- "Dacă plouă, atunci sunt nori pe cer.„

  p este o condiție *suficientă* pentru ***q***
  q este o condiție *necesară* pentru ***p***

- "Dacă nu sunt nori pe cer, atunci nu plouă."

Tautologia

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
0	1	1
1	0	1

Definiție: O propoziție logică având numai valoarea **1** (**adevărat**) în coloana aferentă ei din tabelul de adevăr se numește **tautologie**.

Legile lui **de Morgan**

$$\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$$

p	q	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p \vee \neg q$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	0	0

$$\neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$$

p	q	$\neg(p \vee q)$	$\neg p \wedge \neg q$
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	0	0

Exercițiu

Să se determine tabelul de adevăr pentru următoarea propoziție logică:

$$\neg p \wedge q \vee r$$

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{r}$	$\neg \boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q} \vee \boldsymbol{r}$	$\neg \boldsymbol{p} \wedge (\boldsymbol{q} \vee \boldsymbol{r})$	$\neg p \wedge q \vee r$
0	0	0	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0	1
1	1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	1	0	1

Notations: ! = NOT; & = AND; | = OR

Original: NOT ((a > 0) AND (b > 0))
!(a>0) | !(b>0)
a<=0 | b<=0

❖ (NOT (a < 0)) AND (NOT (b < 0))
a>=0 & b>=0

❖ B. (a ≤ 0) AND (b ≤ 0)

✓ C. (NOT (a > 0)) OR (NOT (b > 0))

❖ D. NOT ((a > 0) OR (b < 0))
!(a>0) & !(b<0)
a<=0 & b>=0

ex. 7/ses. toamna 2022

Notations: ! = NOT; & = AND; | = OR

X mod 2 =0 & !(10<x & x<20)
!(10<x & x<20)=!(10<x) | !(x<20)=x<=10 | x>=20

✓ **NOT**((x > 10) **AND** (x < 20)) **AND** (**NOT** (x **MOD** 2 = 1))

❖ (x **MOD** 2 = 0) **AND** ((x < 10) **OR** (x > 20))

❖ C. **NOT**(x **MOD** 2 = 1) **AND** ((x > 10) **AND** (x < 20))

✓ **NOT**((x **MOD** 4 = 1) **OR** (x **MOD** 4 = 3) **OR** ((x > 10) **AND** (x < 20)))
!(x%4=1 | x%4=3) | x>10 & x<20)
!x%4=1 & !x%4=3 & (x<=10 | x>=20)
X%4 aparține {0, 2, 3}
X%4 aparține {0, 1, 2}
X%4=0 | x%4=2

ex. 27/ses. toamna 2022

Notations: ! = NOT; & = AND; | = OR

x<y, !(x<t & t<y)
!x<t | !t<y
x>=t | t>=y

❖ A. (t > x) **SAU** (t < y)
✓ B. (t ≤ x) **SAU** (t ≥ y)
❖ C. (t ≤ x) **ȘI** (t ≥ y)
❖ D. (t > x) **ȘI** (t < y)

ex. 2/ses. toamna 2021

Notations: ! = NOT; & = AND; | = OR

|x| mod 2 =1 & x<0

✓ (|x| **MOD** 2 = 1) **ȘI** (x < 0)

❖ **NU** ((|x| **MOD** 2 = 0) **ȘI** (x ≥ 0))
!(|X| MOD 2=0) | x<0

✓ **NU** ((|x| **MOD** 2 = 0) **SAU** (x ≥ 0))
!(|x| mod 2=0) & x<0
|x| mod 2 =1 & x<0

❖ (|x| **MOD** 2 =1) **SAU** (x < 0)

ex. 11/ses. toamna 2021

Notations: ! = NOT; & = AND; | = OR

(X OR Z) AND (NOT X OR Y).

- ✓ ***X*** ← FALSE; ***Y*** ← FALSE; ***Z*** ← TRUE
- ❖ ***X*** ← TRUE; ***Y*** ← FALSE; ***Z*** ← FALSE
- ❖ ***X*** ← FALSE; ***Y*** ← TRUE; ***Z*** ← FALSE
- ✓ ***X*** ← TRUE; ***Y*** ← TRUE; ***Z*** ← TRUE

ex. 11/model ex. 2021

x	y	z	$x\|z$	$!\,x \mid y$	$prop$
0	0	0	0	1	0
0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	1	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	0	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1