---

23 noiembrie 2019 Conf. dr. Adriana Buică

Ecuaţii şi inecuaţii

Probleme rezolvate

1. Să se determine valorile parametrului $m \in \mathbb{R}$ astfel încât ecuaţia $\sqrt{2|x| - 2x} = m - x$ să aibă trei soluţii reale distincte.

2. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ inecuaţia $\sqrt{\log_2 \frac{3-2x}{1-x}} < 1$.

3. Să se afle soluţiile reale ale ecuaţiilor $\sqrt{2-x} - x = 0$, respectiv, $\sqrt{2-x} - x = 1$, şi ale inecuaţiei $\ln(\sqrt{2-x} - x) \leq 0$.

Probleme propuse

4. Să se determine mulţimea soluţiilor ecuaţiei $x^2 - |x| = mx(x+1)$, discutând în funcţie de parametrul $m \in \mathbb{R}$.

5. Să se determine $x, y \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$xy + x + y = 11$$
$$xy(x+y) = 30.$$

6. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuaţia $\frac{x+1}{x^2-3x+5} \leq 1.$

7. Fie $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_3 x + \log_{\sqrt{x}} x - \log_{\frac{1}{3}} x - 6$. Să se determine domeniul maxim de definiţie D. Să se rezolve ecuaţia $f(x) = 0$ şi inecuaţia $f(x) \geq 0$.

8. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $3^x + 4^x = 5^x$ şi inecuaţia $3^x + 4^x > 5^x$.

9. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ inecuaţia $(\sqrt{2} - 1)^x + (3 - 2\sqrt{2})^x > 2$.

10. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ inecuaţia $\log_2(9 - 2^x) > 3 - x$.

11. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ inecuaţia $\lg(x^2 - 3) > \lg(x + 3)$.

12. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ inecuaţia $2\ln^2 x + 1 < 3\ln x$.

13. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $2^x + \log_2 x - 2 = 0$.

14. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $2^x \log_2 x - 4 = 0$.

15. Să se arate că ecuaţia $x^3 + x = a$ are o singură soluţie pentru orice $a \in \mathbb{R}$.

Rezultate utile

Fie $I, J \subset \mathbb{R}$ intervale nevide şi $f : I \to J$ o funcţie. Fie $a, b \in J$ cu $a \leq b$.

Dacă f e injectivă, atunci ecuaţia $f(x) = a$ are cel mult soluţie.

Dacă f e bijectivă, atunci ecuaţia $f(x) = a$ are soluţie unică, $x = f^{-1}(a)$.

Dacă f e strict monotonă, atunci f e injectivă.

Dacă f e injectivă şi monotonă, atunci f e strict monotonă.

Dacă f e bijectivă şi crescătoare / descrescătoare, atunci inversa ei are aceeaşi calitate.

Presupunem că f e bijectivă şi fie $S_{\leq}$, respectiv $S_{\geq}$, mulţimea soluţiilor inecuaţiei $f(x) \leq a$, respectiv $f(x) \geq a$. Dacă f e crescătoare, atunci $S_{\leq} = (-\infty, f^{-1}(a)] \cap I$ şi $S_{\geq} = [f^{-1}(a), \infty) \cap I$. Dacă f e descrescătoare, atunci $S_{\leq} = [f^{-1}(a), \infty) \cap I$ şi $S_{\geq} = (-\infty, f^{-1}(a)] \cap I$.

Presupunem că f e bijectivă şi fie S mulţimea soluţiilor inecuaţiilor $a \leq f(x) \leq b$. Dacă f e crescătoare, atunci $S = [f^{-1}(a), f^{-1}(b)] \cap I$. Dacă f e descrescătoare, atunci $S = [f^{-1}(b), f^{-1}(a)] \cap I$.