

SOROZATOK ÉS FÜGGVÉNYEK HATÁRÉRTÉKE

LUKÁCS ANDOR
 BABEŞ-BOLYAI TUDOMÁNYEGYETEM
 MATEMATIKA ÉS INFORMATIKA KAR
 KOLOZSVÁR

1. SOROZATOK HATÁRÉRTÉKE

1.1. Műveleti ötletekkel kiszámolható határértékek (konjugálás, teleszkópikus összegek, Cesaro–Stolz-tétel, Cauchy–d’Alembert-tétel).

Tétel (Cesaro–Stolz). Ha a $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat szigorúan növekvő, korlátlan és létezik a $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$ határérték, akkor létezik a $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$ határérték is és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}.$$

Tétel (Cauchy–d’Alembert) Ha $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ és létezik a $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ határérték, akkor létezik a $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$ határérték is és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

1. Számítsd ki a következő határértékeket!

- | | |
|---|--|
| (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \left(\sqrt{n + \frac{1}{2}} \right);$ | (h) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n}{1} \ln 2 + \frac{n-1}{2} \ln 3 + \dots + \frac{1}{n} \ln(n+1)}{n \ln 2 + (n-1) \ln 3 + \dots + 1 \cdot \ln(n+1)};$ |
| (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n});$ | (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!};$ |
| (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n^3 + n} - \sqrt{n^2 - n});$ | (j) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n};$ |
| (d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right);$ | (k) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\ln n};$ |
| (e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \right);$ | (l) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\ln(n!)};$ |
| (f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \dots + \frac{n}{(n+1)!} \right);$ | (m) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{(n+1)(n+2) \dots (n+n)};$ |
| (g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 2^p + \dots + n^p}{n^{p+1}},$ ha $p \in \mathbb{N};$ | (n) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{3^{3n} (n!)^3}{(3n)!}}.$ |

2. Igazold, hogy ha $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = x$. Igaz-e az állítás fordítottja?

3. Igazold, hogy ha $x_n > 0$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén és ha $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} = x.$$

Igaz-e az állítás fordítottja?

1.2. Majorálási kritériummal és fogó-tétellel kiszámolható határértékek.

Tétel (Majorálási kritérium). Ha a $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat konvergens, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ és létezik $\ell \in \mathbb{R}$ úgy, hogy

$$|a_n - \ell| \leq b_n, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

akkor az $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat is konvergens és $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \ell$.

Tétel (Fogó-tétel). Ha az $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ és $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozatoknak létezik határértéke és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \ell,$$

valamint

$$a_n \leq x_n \leq b_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

akkor az $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozatnak is létezik határértéke és $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \ell$.

4. Számítsd ki a következő határértékeket!

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n};$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1!+2!+\dots+n!}{(2n)!};$$

$$(c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\dots(1+a^n)}, a > 0;$$

$$(d) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2} \right);$$

$$(e) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n}} \right);$$

$$(f) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right);$$

$$(g) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{\sqrt{n^2+k}}.$$

1.3. Konvergencia vizsgálata a monotonitás és korlátosság segítségével. Egyéb konvergenciával kapcsolatos feladatok.

5. Igazold, hogy a $\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \dots$ sorozat konvergens és számítsd ki a határértékét!

6. Igazold, hogy a $\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \dots$ sorozat konvergens és számítsd ki a határértékét!

7. Bizonyítsd be, hogy az

$$x_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}$$

képlettel értelmezett sorozat konvergens és a határértéke $\frac{1}{2}$ és 1 között van!

8. Igazold, hogy az

$$x_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$$

képlettel értelmezett sorozat konvergens és a határértéke $\frac{1}{2}$ és 1 között van!

9. Igazold, hogy az

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$$

képlettel értelmezett sorozat konvergens és határértéke 0 és 1 között van!

10. Igazold, hogy az $a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$ képlettel értelmezett sorozat konvergens és határértéke e . Igazold azt is, hogy e irracionális!

11. Igazold, hogy az $a_n = \frac{n^n}{(n!)^2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ képlettel értelmezett sorozat konvergens, majd számítsd ki a határértékét!

1.4. Rekurzívan értelmezett sorozatok konvergenciájával kapcsolatos feladatok.

12. Tanulmányozd a következő rekurzívan értelmezett sorozatok konvergenciáját, és ha konvergensek, számítsd ki a határértéküket is!

$$(a) a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}, a_0 \in [-2, \infty);$$

$$(b) a_n = \frac{1}{1+a_{n-1}}, a_0 = 0;$$

$$(c) a_n = 1 + \frac{2}{a_{n-1}}, a_0 = 1;$$

$$(d) a_n = \frac{1}{2} \left(a_{n-1} + \frac{a}{a_{n-1}} \right), a_0, a > 0.$$

13. Legyen x_1 és y_1 két olyan pozitív valós szám, amelyekre $x_1 < y_1$. Értelmezzük az $x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}$ és $y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$ képlettel az $(x_n)_{n \geq 1}$ és $(y_n)_{n \geq 1}$ valós számsorozatokat. Bizonyítsd be, hogy mindkét sorozat konvergens és a határértékeik megegyeznek!

14. Legyen x_1 és y_1 két olyan pozitív valós szám, amelyekre $x_1 < y_1$. Értelmezzük az $x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}$ és $y_{n+1} = \frac{2x_n y_n}{x_n + y_n}$ képlettel az $(x_n)_{n \geq 1}$ és $(y_n)_{n \geq 1}$ valós számsorozatokat. Bizonyítsd be, hogy mindkét sorozat konvergens és a határértékeik megegyeznek!

2. FÜGGVÉNYEK HATÁRÉRTÉKE

2.1. Függvényhatárértékek létezése, bal- és jobboldali határértékek.

15. Igazold, hogy nem léteznek a következő függvény-határértékek:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \lim_{x \rightarrow \infty} \sin x; & \text{(c)} \lim_{x \rightarrow \infty} (1 - \cos x)e^x; & \text{(d)} \lim_{x \rightarrow 1} e^{\frac{x}{x-1}}. \\ \text{(b)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}; & & \text{(e)} \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \sin x) \ln x. \end{array}$$

16. Számítsd ki a következő függvények jobb- és baloldali határértékeit a 0-ban:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} f(x) = \frac{|\sin \frac{1}{x}|}{1 + 2^{\frac{1}{x}}}; & \text{(b)} f(x) = x \cdot \frac{|\sin \frac{1}{x}|}{1 + 2^{\frac{1}{x}}}; & \text{(c)} f(x) = \frac{\cos \frac{1}{x^2}}{x}. \end{array}$$

2.2. Alaphatárértékek és azok segítségével kiszámolható határértékek.

A l'Hospital-szabály alkalmazhatósága.

17. Igazold az alábbi alap függvény-határértékeket (elfogadhatod, hogy $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$):

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1; & \text{(d)} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{a^x - a^{x_0}}{x - x_0} = a^{x_0} \ln a; & \text{(g)} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\cos x - \cos x_0}{x - x_0} = -\sin x_0; \\ \text{(b)} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\ln x - \ln x_0}{x - x_0} = \frac{1}{x_0}; & \text{(e)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1; & \text{(h)} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^r - x_0^r}{x - x_0} = r x_0^{r-1}. \\ \text{(c)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a; & \text{(f)} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} = \cos x_0; & \end{array}$$

Miért nem alkalmazható egyik fenti határérték számolásakor sem a l'Hospital szabály? Mit "jelentenek" ezek a határértékek?

18. Számítsd ki a következő függvényhatárértékeket!

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{x}; & \text{(g)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{x \sin x}; & \text{(m)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 x + \sin^3 2x + \dots + \sin^3 nx}{x^3}; \\ \text{(b)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x \sin x} - \sqrt{\cos 2x}}{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}; & \text{(h)} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x}{\cos 2x} \right)^{x^2}; & \text{(n)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+5x)}{x}; \\ \text{(c)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}; & \text{(i)} \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^x - a^a}{x - a}, \text{ ahol } a > 0; & \text{(o)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2}; \\ \text{(d)} \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^2) \operatorname{ctg}^2 x; & \text{(j)} \lim_{x \rightarrow a} \frac{a^x - x^a}{x - a}, \text{ ahol } a > 0; & \text{(p)} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{2^{\operatorname{ctg} x} - 2}{x - \frac{\pi}{4}}; \\ \text{(e)} \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{tg}^2 \sqrt{x})^{\frac{1}{2x}}; & \text{(k)} \lim_{x \rightarrow a} \frac{a^a - a^a}{x - a}, \text{ ahol } a > 0; & \text{(q)} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right)^{x^2}; \\ \text{(f)} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{\sin x}{x - \sin x}}; & \text{(l)} \lim_{x \rightarrow a} \frac{a^{x^x} - a^a}{x - a}, \text{ ahol } a > 0; & \text{(r)} \lim_{x \rightarrow e} (\ln x)^{\frac{1}{x^2 - 3ex + 2e^2}}. \end{array}$$

19. Határozd meg az $a, b, c, p \in \mathbb{R}$ valós számokat úgy, hogy teljesüljön a

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{9x^4 - 24x^3 + 6x^2 + 5} - (ax^p + bx + c) \right) = \frac{7}{3}$$

egyenlőség!